华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

51

PEARSON

A First Course in Probability

(Ninth Edition)

概率论基础教程

(原书第9版)

(美) Sheldon M. Ross 著
南加州大学

童行伟 梁宝生 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学

51

A First Course in Probability

(Ninth Edition)

概率论基础教程

（原书第9版）

（美）Sheldon M. Ross 著
南加州大学
童行伟 梁宝生 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

概率论基础教程（原书第9版）/（美）罗斯（Ross，S. M.）著；童行伟，梁宝生译．—北京：机械工业出版社，2014.1

（华章数学译丛）

书名原文：A First Course in Probability，Ninth Edition

ISBN 978-7-111-44789-4

Ⅰ．概…　Ⅱ．①罗…　②童…　③梁…　Ⅲ．概率论-教材　Ⅳ．O211

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第272749号

本书版权登记号：图字：01-2013-3389

这本经典的概率论教材通过大量的例子系统介绍了概率论的基础知识及其应用，主要内容有组合分析、概率论公理、条件概率、离散型随机变量、连续型随机变量、随机变量的联合分布、期望的性质、极限定理和模拟等，内容丰富，通俗易懂．各章末附有大量的练习，分为习题、理论习题和自检习题三大类，并在书末给出自检习题的全部解答．

本书是概率论的入门书，适合作为数学、统计学、经济学、生物学、管理学、计算机科学及其他各工学专业本科生的教材，也适合作为研究生和应用工作者的参考书．

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：明永玲

北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷

2014年1月第1版第1次印刷

186mm×240mm·26.5印张

标准书号：ISBN 978-7-111-44789-4

定　　价：69.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604

购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

概率论是研究自然科学和社会科学中随机现象的数量规律的数学分支，是研究统计学必不可少的重要工具．概率论的理论和方法已经成为所有科学工作者、工程师、医务人员和企业家等的基本工具．概率论和高等数学一样，已经成为我国高等院校各专业普遍设立的一门基础课．

本书是一本非常有特色的不可多得的好教材，尽管“概率论”的教材非常多，但是能出其右者寥寥．本书不仅介绍了概率理论和方法，而且采用了大量生动的例子来说明这些理论和方法是如何应用在实际生活中的，让读者在获得概率论知识的同时，也体会了概率论的应用魅力．书中侧重介绍概率论中最基本的概念，如概率、条件概率、期望、贝叶斯公式、大数定律、中心极限定理、马尔可夫链等．同时，本书还提供了大量有意义的练习，分为习题、理论习题和自检习题三大类．从习题中，读者也可受益匪浅．本书设定的门槛很低，只要有初等微积分知识的读者，都可以读懂，所以是一本非常好的“概率论”入门书．

本书初版于 1976 年，经过作者几十年的修改和锤炼，内容得到极大丰富，在美国的概率论教材中市场占有率达到 55％．当然，这个数字的准确性我们不能去证明，但是，我们能证明的是，美国的斯坦福大学、华盛顿大学、普度大学、密歇根大学和约翰霍普金斯大学等众多名校都采用这本经典的教材．本书的前几版都曾引进到国内，颇受国内师生的欢迎，对我国的概率论教学产生了广泛的影响，我们相信这个版本也一定会受到国内各界的欢迎．

我们在翻译本书的过程中，参考了第 6 版和第 7 版的中译本，在此对这两个版本的译者表示衷心的感谢．北京师范大学数学科学学院的李昕泽、郭菲菲为本书的翻译做了许多深入细致的工作．郭菲菲同学对本书前三章的翻译提出了许多宝贵意见．李昕泽同学参与本书最后三章的翻译工作，并提出了许多建设性意见，对此我们表示忠心的感谢．尽管我们尽力提供优秀的作品，但由于译者的精力和水平有限，难免会存在错漏之处，敬请有识之士指正！

译者

2013 年 10 月

前　　言

“我们看到，概率论实际上只是将常识归结为计算，它使我们能够用理性的头脑精确地评价凭某种直觉感受到的、往往又不能解释清楚的见解……引人注意的是，概率论这门起源于对机会游戏进行思考的科学，早就应该成为人类知识中最重要的组成部分……生活中那些最重要的问题绝大部分其实只是概率论的问题.”著名的法国数学家和天文学家拉普拉斯侯爵(人称“法国的牛顿”)如是说. 尽管许多人认为，这位对概率论的发展作出过重大贡献的著名侯爵说话夸张了一些，但是概率论已经成为几乎所有的科学工作者、工程师、医务人员、法律工作者和企业家们手中的基本工具，这是一个不争的事实. 实际上，有见识的人们不再问：“是这样吗?”而是问：“有多大的概率是这样?”

一般方法和数学水平

本书是概率论的入门教材，适用于具备初等微积分知识的数学、统计、工程和其他学科(包括计算机科学、生物学、社会科学和管理科学)的学生. 本书不仅介绍概率论的数学理论，而且通过大量例子来展示这门学科的广泛应用.

内容和课程计划

第 1 章阐述了组合分析的基本原理，它是计算概率的最有用的工具.

第 2 章介绍了概率论的公理体系，并且阐明如何应用这些公理进行概率计算.

第 3 章讨论概率论中极为重要的两个概念，即事件的条件概率和事件的独立性. 通过一系列例子说明：当部分信息可利用时，条件概率就会起作用；即使在没有部分信息时，条件概率也可以使概率的计算变得容易. 利用“条件”计算概率这一极为重要的技巧还将出现在第 7 章，在那里我们用它来计算期望.

第 4～6 章引入随机变量的概念. 第 4 章讨论离散型随机变量，第 5 章讨论连续型随机变量，第 6 章讨论随机变量的联合分布. 在第 4 章和第 5 章中讨论了两个重要概念，即随机变量的期望值和方差，并且对许多常见的随机变量求出了相应的期望值和方差.

第 7 章进一步讨论了期望值的一些重要性质. 书中引入了许多例子，解释如何利用随机变量和的期望等于随机变量期望的和这一重要规律来计算随机变量的期望值. 本章中还有几节介绍条件期望(包括它在预测方面的应用)和矩母函数. 本章最后一节介绍了多元正态分布，同时给出了来自正态总体的样本均值和样本方差的联合分布的简单证明.

在第 8 章我们介绍了概率论的主要理论结果. 特别地，我们证明了强大数定律和中心极限定理. 在强大数定律的证明中，我们假定了随机变量具有有限的四阶矩，因为在这种假定之下，证明非常简单. 在中心极限定理的证明中，我们假定了莱维连续性定理成立. 在本章中，我们还介绍了若干概率不等式，如马尔可夫不等式、切比雪夫不等式和切尔诺夫界. 在本章最后一节，我们给出用有相同期望值的泊松随机变量的相应概率去近似独立

伯努利随机变量和的相关概率的误差界.

第 9 章阐述了一些额外的论题，如马尔可夫链、泊松过程以及信息编码理论初步. 第 10 章介绍了统计模拟.

与以前的版本一样，在每章末给出了三组练习题——习题、理论习题和自检习题. 自检习题的全部解答在附录 B 给出，这部分练习题可以帮助学生检测他们对知识的掌握程度并为考试作准备.

第 9 版的特色

第 9 版继续对教材进行微调和优化，除了大量的小修改使得教材更加清晰外，本版还包括了很多新的或更新的练习题和正文内容，内容的选择不仅因为它们本身的趣味性，更是为了用它们来建立学生对概率的直觉. 第 3 章的例 3h 和例 4k 就是这个目标的最好例证，例 3h 介绍双胞胎同卵的比例的估计，例 4k 分析发球和接球游戏.

致谢

我要感谢下面这些为了改进本教材而慷慨地与我联系并提出意见的人们：Amir Ardestani(德黑兰理工大学)，Joe Blitzstein(哈佛大学)，Peter Nuesch(洛桑大学)，Joseph Mitchell(纽约州立大学石溪分校)，Alan Chambless(精算师)，Robert Kriner、Israel David(本-古里安大学)，T. Lim(乔治梅森大学)，Wei Chen(罗格斯大学)，D. Monrad(伊利诺伊大学)，W. Rosenberger(乔治梅森大学)，E. Ionides(密歇根大学)，J. Corvino(拉法叶学院)，T. Seppalainen(威斯康星大学)，Jack Goldberg(密歇根大学)，Sunil Dhar(新泽西理工学院)，Vladislav Kargin(斯坦福大学)，Marlene Miller、Ahmad Parsian 和 Fritz Scholz(华盛顿大学).

我也要特别感谢第 9 版的审查者：Richard Laugesen(伊利诺伊大学)，Stacey Hancock(克拉克大学)，Stefan Heinz(怀俄明大学)，Brian Thelen(密歇根大学). 准确性的审查者 Keith Friedman(得克萨斯大学奥斯汀分校)和 Stacey Hancock(克拉克大学)非常仔细地审查了书稿内容，在此也要特别感谢他们.

最后，我要感谢下面这些审查者提出很有用的评论意见，其中第 9 版的审查者用星号标记.

K. B. Athreya(爱荷华州立大学)
Richard Bass(康涅狄格大学)
Robert Bauer(伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校)
Phillip Beckwith(密歇根科技大学)
Arthur Benjamin(哈维姆德学院)
Geoffrey Berresford(长岛大学)
Baidurya Bhattacharya(特拉华大学)
Howard Bird(圣克劳德州立大学)
Shahar Boneh(丹佛大都会州立学院)
Jean Cadet(纽约州立大学石溪分校)
Steven Chiappari(圣塔克拉拉大学)
Nicolas Christou(加州大学洛杉矶分校)
James Clay(亚利桑那大学图森分校)

Francis Conlan(圣克拉拉大学)
Justin Corvino(拉法叶学院)
Jay DeVore(加州州立理工大学圣路易斯奥比斯波分校)
Scott Emerson(华盛顿大学)
Thomas R. Fischer(德州农工大学)
Anant Godbole(密歇根科技大学)
Zakkula Govindarajulu(肯塔基大学)
Richard Groeneveld(爱荷华州立大学)
* Stacey Hancock(克拉克大学)
Mike Hardy(麻省理工学院)
Bernard Harris(威斯康星大学)
Larry Harris(肯塔基大学)
David Heath(康奈尔大学)
* Stefan Heinz(怀俄明大学)
Stephen Herschkorn(罗格斯大学)
Julia L. Higle(亚利桑那大学)
Mark Huber(杜克大学)
Edward Ionides(密歇根大学)
Anastasia Ivanova(北卡罗来纳大学)
Hamid Jafarkhani(加州大学欧文分校)
Chuanshu Ji(北卡罗来纳大学教堂山分校)
Robert Keener(密歇根大学)
* Richard Laugesen(伊利诺伊大学)
Fred Leysieffer(佛罗里达州立大学)
Thomas Liggett(加州大学洛杉矶分校)
Helmut Mayer(佐治亚大学)
Bill McCormick(佐治亚大学)
Ian McKeague(佛罗里达州立大学)
R. Miller(斯坦福大学)
Ditlev Monrad(伊利诺伊大学)
Robb J. Muirhead(密歇根大学)
Joe Naus(罗格斯大学)
Nhu Nguyen(新墨西哥州立大学)
Ellen O'Brien(乔治梅森大学)
N. U. Prabhu(康奈尔大学)
Kathryn Prewitt(亚利桑那州立大学)
Jim Propp(威斯康星大学)
William F. Rosenberger(乔治梅森大学)
Myra Samuels(普度大学)
I. R. Savage(耶鲁大学)
Art Schwartz(密歇根大学安阿伯分校)
Therese Shelton(西南大学)
Malcolm Sherman(纽约州立大学奥尔巴尼分校)
Murad Taqqu(波士顿大学)
* Brian Thelen(密歇根大学)
Eli Upfal(布朗大学)
Ed Wheeler(田纳西大学)
Allen Webster(布拉德利大学)

S. R.
smross@usc. edu

目　录

第1章 组合分析

1.1 引言

首先，我们看一个经典的概率论问题：一个通信系统由 n 个天线组成，它们按线性顺序排成一排. 只要没有两个相邻的天线都失效，这个系统就能接收到所有进来的信号，此时称这个通信系统是有效的. 如果已经知道这 n 个天线里恰好有 m 个天线是失效的，那么此通信系统仍然有效的概率是多大？例如，设 $n=4$，$m=2$，那么共有 6 种可能的系统配置，即

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \quad & 0 & 1 & 0 & 1 & \quad & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \quad & 1 & 0 & 0 & 1 & \quad & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

其中，1 表示天线有效，0 表示天线失效. 可以看出前 3 种排列下通信系统仍然有效，而后 3 种排列下系统将失效，因此，所求的概率应该是 $3/6=1/2$. 对于一般的 n 和 m 来说，用类似的方法可以计算出系统有效的概率. 即先计算使得系统有效的配置方式有多少种，再计算总共有多少种配置方式，两者相除即为所求概率.

从上述讨论可以看出，一个有效的计算事件可能发生结果的数目的方法是非常有用的. 事实上，概率论中的很多问题只要通过计算某个事件发生结果的数目就能得以解决. 关于计数的数学理论通常称为组合分析(combinatorial analysis). 1

1.2 计数基本法则

在本节的讨论中，我们都是以计数基本法则为基础的. 简单地说，若一个试验有 m 种可能的结果，而另一个试验又有 n 种可能的结果，则这两个试验一共有 mn 种可能的结果.

> **计数基本法则**
>
> 假设有两个试验，其中试验 1 有 m 种可能的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 n 种可能的结果，则这两个试验一共有 mn 种可能的结果.

基本法则的证明 通过列举两个试验所有可能的结果可以证明这个问题，即

$$\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,n) \\ (2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (m,1), & (m,2), & \cdots, & (m,n) \end{matrix}$$

其中，$(i,\ j)$表示试验 1 出现第 i 种可能的结果，试验 2 出现第 j 种可能的结果. 因此，所有可能的结果组成一个矩阵，共有 m 行 n 列，元素的总数为 $m\times n$，这样就完成了证明.

例 2a 一个小团体由 10 位妇女组成，其中每位妇女又有 3 个孩子. 现在要从中选取一位妇女和这位妇女的孩子中的一个作为“年度母亲和年度儿童”，问一共有多少种可能的

选取方式？

解 将选择妇女看成试验1，而接下来选择这位妇女三个孩子中的一个看作试验2，那么根据计数基本法则可知，一共有 $10\times3=30$ 种可能的选取方式. ■

当有2个以上的试验时，基本法则可以推广.

推广的计数基本法则

如果一共有 r 个试验，试验1有 n_1 种可能的结果. 对应于试验1的每一种可能的结果，试验2有 n_2 种可能的结果，对应于前两个试验的每一种可能的结果，试验3有 n_3 种可能的结果……那么这 r 个试验一共有 $n_1n_2\cdots n_r$ 种可能的结果.

例 2b 一个大学计划委员会由3名大一新生、4名大二学生、5名大三学生和2名大四学生组成，现在要从中选4个人组成一个分委员会，要求这4个人来自不同的年级，那

2 么可能有多少种不同的分委员会？

解 可以把这个问题理解为从每个年级选取一个代表，从而有4个独立的试验，根据推广的计数基本法则，一共有 $3\times4\times5\times2=120$ 种可能的分委员会. ■

例 2c 对于7位车牌号，如果要求前3位必须是字母，后4位必须是数字，那么一共有多少种不同的7位车牌号？

解 根据推广的计数基本法则，可知答案为 $26\times26\times26\times10\times10\times10\times10=175\,760\,000$. ■

例 2d 对于只定义在 n 个点上的函数，如果每个函数的取值只能是0或1，那么这样的函数共有多少个？

解 设这 n 个点为 $1,2,\cdots,n$，既然对每个点来说，$f(i)$ 的取值只能是0或者1，那么一共有 2^n 个可能的函数. ■

例 2e 在例2c中，如果不允许字母或数字重复，一共有多少种可能的车牌号？

解 这种情况下，一共有 $26\times25\times24\times10\times9\times8\times7=78\,624\,000$ 种可能的车牌号. ■

1.3 排列

随意排列字母a，b，c，一共有多少种不同的排列方式？通过直接列举，可知一共有6种，即abc，acb，bac，bca，cab和cba. 每一种都称为一个排列(permutation). 因此，3个元素一共有6种可能的排列方式. 这个结果能通过计数基本法则得到：在排列中第一个位置可供选择的元素有3个，第二个位置可供选择的元素是剩下的两个元素之一，第三个位置只能选择剩下的1个元素. 因此，一共有 $3\times2\times1=6$ 种可能的排列.

假设有 n 个元素，那么用上述类似的推理，可知一共有

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$$

种不同的排列方式.

这里当 n 为正整数时，$n!$（读作"n 的阶乘"）等于 $1\times2\times\cdots\times n$，同时定义 $0!=1$.

例 3a 一个有 9 名队员的垒球队可能有多少种不同的击球顺序？

解 一共有 $9!=362\,880$ 种可能的击球顺序. ■

例 3b 某概率论班共有 6 名男生、4 名女生，有次测验是根据他们的表现来排名次，假设没有两个学生成绩一样. 3

(a) 一共有多少种可能的名次？

(b) 如果限定男生和女生分开排名次，那么一共有多少种可能的名次？

解

(a) 因为每种名次都对应着一个 10 人的排列方式，所以答案是 $10!=3\,628\,800$.

(b) 男生一起排名次有 $6!$ 种可能，女生一起排名次有 $4!$ 种可能，根据计数基本法则，一共有 $6!\times 4!=720\times 24=17\,280$ 种可能的名次. ■

例 3c Jones 女士要把 10 本书放到书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在 Jones 女士想整理她的书，如果相同学科的所有图书都必须放在一起，那么一共可能有多少种放法？

解 如果最先摆放数学书，接下来放化学书，再下来放历史书，最后放语文书，那么一共有 $4!\times 3!\times 2!\times 1!$ 种排列方式. 而这 4 种学科的顺序一共有 $4!$ 种，因此，所求答案是 $4!\times 4!\times 3!\times 2!\times 1!=6912$. ■

接下来讨论如果有 n 个元素，其中有些是不可区分的，那么这种排列数如何计算？看下面的例子.

例 3d 用 6 个字母 PEPPER 进行排列，一共有多少种不同的排列方式？

解 如果 3 个字母 P 和 2 个字母 E 都是可以区分的(标上号)，即 $P_1E_1P_2P_3E_2R$，那么一共有 $6!$ 种排列方式. 然而，考察其中任一个排列，比如 $P_1P_2E_1P_3E_2R$，如果分别将 3 个字母 P 和 2 个字母 E 重排，那么得到的结果仍然是 PPEPER，即总共有 $3!\times 2!$ 种排列：

$$
\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}
$$

这些排列都是同一种形式 PPEPER. 因此，一共有 $6!/(3!\times 2!)=60$ 种不同的排列方式. ■

一般来说，利用例 3d 同样的推理可知，对于 n 个元素，如果其中 n_1 个元素彼此相同，另 n_2 个彼此相同，…，n_r 个也彼此相同，那么一共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种不同的排列方式.

例 3e 一个棋类比赛一共有 10 个选手，其中 4 个来自俄罗斯，3 个来自美国，2 个来

自英国，另1个来自巴西．如果比赛结果只记录选手的国籍，那么一共有多少种可能的
4 结果？

解　一共有

$$\frac{10!}{4!\times 3!\times 2!\times 1!}=12\,600$$

种可能的结果．■

例3f　将9面小旗排列在一条直线上，其中4面白色、3面红色和2面蓝色，且颜色相同的旗是完全一样的．如果不同的排列方式代表不同的信号，那么这9面旗一共可组成多少种不同的信号？

解　一共有

$$\frac{9!}{4!\times 3!\times 2!}=1260$$

种不同的信号．■

1.4　组合

从 n 个元素当中取 r 个组成一组，一共有多少个不同的组？这也是我们感兴趣的问题．比如，从A，B，C，D和E这5个元素中选取3个组成一组，一共有多少个不同的组？为回答这个问题，可做如下推理：取第一个元素有5种取法，取第2个元素有4种取法，取第三个元素有3种取法，所以，如果考虑选择顺序，那么一共有 $5\times 4\times 3$ 种取法．但是，每一个包含3个元素的组(如包含A，B，C的组)都被计算了6次(即如果考虑顺序，所有的排列ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA都被算了一次)，所以，组的总数为

$$\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=10$$

一般来说，如果考虑顺序，从 n 个元素中取 r 个排成一组，一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的方式，而每个含 r 个元素的小组都被重复计算了 $r!$ 次．所以，从 n 个元素中取 r 个组成不同组的数目为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

记号与术语

对于 $r\leqslant n$，我们定义 $\binom{n}{r}$ 如下：

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

5 这样 $\binom{n}{r}$ 就表示从 n 个元素中一次取 r 个的可能组合数．⊖

⊖ 按照惯例，定义 $0!=1$，因此，$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$．当 $i<0$ 或者 $i>n$ 时，我们也认为 $\binom{n}{i}=0$．

因此，如果不考虑抽取顺序，$\binom{n}{r}$就表示从 n 个元素中取 r 个元素所组成的不同组的数目.

等价地，$\binom{n}{r}$就是从一个大小为 n 的集合中选出大小为 r 的子集的个数. 由 $0!=1$，注意

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\times n!}=1$$

这与前面的解释是一致的，因为在一个大小为 n 的集合里恰好只有一个大小为 n 的子集(也就是全集)，而且也恰好只有一个大小为 0 的子集(也就是空集). 一个有用的约定就是：当 $r>n$ 或 $r<0$ 时，定义$\binom{n}{r}=0$.

例 4a　从 20 人当中选 3 人组成委员会，可能有多少种不同的委员会?

解　一共有$\binom{20}{3}=\frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1}=1140$ 种可能的委员会. ■

例 4b　一个团体共有 12 人，其中 5 位女士，7 位男士，现从中选取 2 位女士和 3 位男士组成一个委员会，问有多少种不同的委员会? 另外，如果其中 2 位男士之间有矛盾，并且拒绝一起工作，那又有多少种不同的委员会?

解　因为有$\binom{5}{2}$种方法选取女士，有$\binom{7}{3}$种方法选取男士，所以根据基本计数法则，一共有

$$\binom{5}{2}\times\binom{7}{3}=\frac{5\times 4}{2\times 1}\times\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=350$$

种可能的委员会.

现在来看，如果有两位男士拒绝一起工作，那么选取 3 位男士的$\binom{7}{3}=35$ 种方法中，有$\binom{2}{2}\times\binom{5}{1}=5$ 种同时包含了这两位男士，所以，一共有 $35-5=30$ 种选取方法不同时包含那两位有矛盾的男士；另外，选取女士的方法仍是$\binom{5}{2}=10$ 种，所以，一共有 $30\times 10=300$ 种可能的委员会. ■

例 4c　假设在一排 n 个天线中，有 m 个是失效的，另 $n-m$ 个是有效的，并且假设所有有效的天线之间不可区分，同样，所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种线性排列方式，使得任何两个失效的天线都不相邻?

解　先将 $n-m$ 个有效天线排成一排，既然没有连续两个失效的，那么在两个有效天线之间，必然至多只能放置一个失效的. 即在 $n-m+1$ 个可能位置中(见图 1-1 中的插入符号)，选择 m 个来放置失效天线. 因此有$\binom{n-m+1}{m}$种可能方式确保在两个失效天线之

$\wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \cdots \wedge 1 \wedge 1 \wedge$

1 = 有效天线

∧ = 至多放一个失效天线

图 1-1　天线的排列

6 间至少存在一个有效天线. ■

以下是一个非常有用的组合恒等式：

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \qquad 1\leqslant r\leqslant n \tag{4.1}$$

式(4.1)可用分析的方法证明，也可从组合的角度来证明．设想从 n 个元素中取 r 个，一共有 $\binom{n}{r}$ 种取法．从另一个角度来考虑，不妨设这 n 个元素里有一个特殊的，记为元素 1，那么取 r 个元素就有两种结果，取元素 1 或者不取元素 1．取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种(从 $n-1$ 个元素里面取 $r-1$ 个)；不取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r}$ 种(从去掉元素 1 的剩下 $n-1$ 个元素中取 r 个)．两者之和就是从 n 个元素里取 r 个的方法之和，而从 n 个元素中取 r 个共有 $\binom{n}{r}$ 种方法，所以式(4.1)成立.

值 $\binom{n}{r}$ 经常称为**二项式系数**(binomial coefficient)，是因为它们是下面二项式定理中重要的系数.

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{4.2}$$

下面将介绍二项式定理的两种证明方法，其一是数学归纳法，其二是基于组合考虑的证明.

二项式定理的归纳法证明 当 $n=1$ 时，式(4.2)可化为

$$x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0=y+x$$

假设式(4.2)对于 $n-1$ 成立，那么对于 n，

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)^{n-1}=(x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k}$$

7
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}$$

在前面的求和公式里令 $i=k+1$，后面的求和公式里令 $i=k$，那么有

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^i y^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-i}\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]x^i y^{n-i}+y^n\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}+y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由式(4.1)得到．根据归纳法，定理得证． ■

二项式定理的组合法证明 考虑乘积

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$$

它展开后一共包含 2^n 个求和项，每一项都是 n 个因子的乘积，而且每一项都包含因子 x_i 或 y_i，$i=1$，2，…，n，例如，

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

这 2^n 个求和项中，一共有多少项含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i 作为因子？含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i 的每一项对应了从 n 个元素 x_1，x_2，…，x_n 里取 k 个元素构成一组的取法．因此，一共有 $\binom{n}{k}$ 个这样的项．这样，令 $x_i=x$，$y_i=y$，$i=1$，…，n，可以看出

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$ ■

例 4d 展开 $(x+y)^3$．

解

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=\binom{3}{0}x^0y^3+\binom{3}{1}x^1y^2+\binom{3}{2}x^2y^1+\binom{3}{3}x^3y^0\\&=y^3+3xy^2+3x^2y+x^3\end{aligned}$$ ■

例 4e 一个有 n 个元素的集合共有多少子集？

解 含有 k 个元素的子集一共有 $\binom{n}{k}$ 个，因此所求答案为

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$ 8

该结果还可以这样得到：给该集合里的每个元素都标上 1 或 0，每种标法都一一对应了一个子集，例如，当把所有元素都标为 1 时，就对应着一个含有所有元素的子集．因为一共有 2^n 种可能的标法，所以一共有 2^n 个子集．

上述结论包含了一个元素都没有的子集(即空集)，所以至少有一个元素的子集一共有 2^n-1 个． ■

1.5 多项式系数

在本节中，我们考虑如下问题：把 n 个不同的元素分成 r 组，每组分别有 n_1，n_2，…，n_r 个元素，其中 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$，一共有多少种不同的分法？要回答这个问题，我们注意，第一组元素有 $\binom{n}{n_1}$ 种选取方法，选定第一组元素后，只能从剩下的 $n-n_1$ 个元素中选第二组元素，一共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种取法，接下来第三组有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种取法，等等．因此，根据推广的计数基本法则，将 n 个元素分成 r 组可能存在

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$
$$=\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种分法.

用另一种方法也可以得到这个结果：考虑 n 个值 1，1，…，1，2，…，2，…，r，…，r，其中对于 $i=1$，…，r，i 出现 n_i 次. 这些值的每个排列对应于按如下方式将 n 个元素分成 r 组的一种分法：令排列 i_1，i_2，…，i_r 对应于第1项归到组 i_1 中，第2项归到组 i_2 中，以此类推. 例如，若 $n=8$ 且 $n_1=4$，$n_2=3$，$n_3=1$，则排列 1，1，2，3，2，1，2，1 对应于将第 1，2，6，8 项归到第一组，第 3，5，7 项归到第二组，第 4 项归到第三组. 因为每个排列产生一种分法并且每个可能的分法是从相同的排列中得到的，所以将 n 个元素分成大小为 n_1，n_2，…，n_r 这样不同 r 组的分法数量，与 n 个值中 n_1 相同，n_2 相同，…，n_r 相同的排列数是
9 相等的，正如1.3节中所示，这等于 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

记号

如果 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则定义 $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ 为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

因此，$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ 表示把 n 个不同的元素分成大小分别为 n_1，n_2，…，n_r 的 r 个不同组的组合数.

例 5a 某个小城的警察局有 10 名警察，其中 5 名警察需要在街道巡逻，2 名警察需要在局里值班，另外 3 名留在局里待命. 问把 10 名警察分成这样的 3 组共有多少种不同分法？

解 一共有 $10!/(5!\times2!\times3!)=2520$ 种分法. ■

例 5b 将 10 个小孩平均分成 A，B 两队分别去参加两场不同的比赛，一共有多少种分法？

解 一共有 $10!/(5!\times5!)=252$ 种分法. ■

例 5c 把 10 个孩子平均分成两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？

解 这个问题与例 5b 的不同之处在于分成的两组是不用考虑顺序的. 也就是说，这里没有 A，B 两组之分，仅仅分成各自为 5 人的两组，故所求答案为 $\frac{10!/(5!\times5!)}{2!}=126$. ■

下面的定理是二项式定理的推广，其证明留作习题.