学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·人教大纲版·

高中数学

三年级（全）

主编／王 政

东北师范大学出版社

学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·人教大纲版·

高中数学

三年级㊤

主编/王 政

东北师范大学出版社·长春

□本册主编：王　政
□编　　者：孙玉强　田序强　马阳光　崔国海　张建国　于新芝　邵军强
于华亭　迟万卿　王　芳　李　华　盖风强　宋旭波　赵庆利
李凤奎　祁学雷　孙庭晓　金永兴　宋　艳　王保文　宋文胜

图书在版编目（CIP）数据

学考第一．教材同步点拨．高三数学．全：人教大纲版／王政主编．—长春：东北师范大学出版社，2005.4
ISBN 7-5602-4093-3

Ⅰ．学…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 019578 号

□总策划：第二编辑室
□责任编辑：尹卫东　□封面设计：魏国强
□责任校对：王　蓉　□责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
电话：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
广告许可证：吉工商广字 2200004001001 号
东北师范大学出版社激光照排中心制版
黑龙江新华印刷二厂印装
黑龙江省阿城市通城街(150300)
2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
幅面尺寸：210 mm×296 mm　印张：14　字数：532 千
印数：00 001—20 000 册

定价：16.80 元

如发现印装质量问题，影响阅读，可直接与承印厂联系调换

目 录

第一章 概率与统计 …… 1

1.1 离散型随机变量的分布列 …… 1

基础知识归纳 …… 1
重点知识讲解 …… 1
易混知识辨析 …… 2
典型例题 …… 2
教材例题习题的变形题 …… 3
学科内综合题 …… 3
综合应用题 …… 3
创新题 …… 4
高考题 …… 5
1.1 同步测试 …… 5

1.2 离散型随机变量的期望与方差 …… 7

基础知识归纳 …… 7
重点知识讲解 …… 7
易混知识辨析 …… 7
典型例题 …… 7
教材例题习题的变形题 …… 8
学科内综合题 …… 8
综合应用题 …… 9
创新题 …… 9
高考题 …… 10
1.2 同步测试 …… 11

1.3 抽样方法 …… 12

基础知识归纳 …… 12
重点知识讲解 …… 12
典型例题 …… 13
教材例题习题的变形题 …… 14
学科内综合题 …… 14
综合应用题 …… 15
创新题 …… 15
高考模拟题 …… 15
1.3 同步测试 …… 16

1.4 总体分布的估计 …… 17

基础知识归纳 …… 17
重点知识讲解 …… 17
易混知识辨析 …… 19
典型例题 …… 19
教材例题习题的变形题 …… 20
学科内综合题 …… 20
综合应用题 …… 21
创新题 …… 21
高考模拟题 …… 22
1.4 同步测试 …… 23

1.5 正态分布 …… 25

基础知识归纳 …… 25
重点知识讲解 …… 25
易混知识辨析 …… 26
典型例题 …… 26
教材例题习题的变形题 …… 27
学科内综合题 …… 27
综合应用题 …… 27
创新题 …… 28
高考模拟题 …… 28
1.5 同步测试 …… 28

1.6 线性回归 …… 30

基础知识归纳 …… 30
重点知识讲解 …… 30
易混知识辨析 …… 30
典型例题 …… 30
教材例题习题的变形题 …… 31
学科内综合题 …… 32
综合应用题 …… 32
创新题 …… 32
高考模拟题 …… 33
1.6 同步测试 …… 33

1.7 实习作业 …… 35
基础知识归纳 …… 35
第一章测试性自我考评 …… 36
教材基础知识针对性训练 …… 36
探究应用拓展性训练 …… 37

第二章 极 限 …… 38
2.1 数学归纳法及其应用举例 …… 38
基础知识归纳 …… 38
重点知识讲解 …… 38
易混知识辨析 …… 38
典型例题 …… 39
教材例题习题的变形题 …… 39
学科内综合题 …… 39
综合应用题 …… 40
创新题 …… 40
高考题 …… 41
2.1 同步测试 …… 42
2.2 研究性课题:杨辉三角形 …… 44
基础知识归纳 …… 44
典型例题 …… 44
教材例题习题的变形题 …… 44
学科内综合题 …… 45
综合应用题 …… 45
创新题 …… 45
2.2 同步测试 …… 45
2.3 数列的极限 …… 46
基础知识归纳 …… 46
重点知识讲解 …… 46
易混知识辨析 …… 47
典型例题 …… 47
教材例题习题的变形题 …… 48
学科内综合题 …… 48
综合应用题 …… 48
创新题 …… 49
高考模拟题 …… 49
2.3 同步测试 …… 50
2.4 函数的极限 …… 52
基础知识归纳 …… 52
重点知识讲解 …… 52
易混知识辨析 …… 54
典型例题 …… 54
教材例题习题的变形题 …… 55
学科内综合题 …… 56
综合应用题 …… 56
创新题 …… 56
高考模拟题 …… 57
2.4 同步测试 …… 57
2.5 极限的四则运算 …… 59
基础知识归纳 …… 59
重点知识讲解 …… 59
易混知识辨析 …… 60
典型例题 …… 60
教材例题习题的变形题 …… 62
学科内综合题 …… 63
综合应用题 …… 63
创新题 …… 64
高考模拟题 …… 64
2.5 同步测试 …… 65
2.6 函数的连续性 …… 67
基础知识归纳 …… 67
重点知识讲解 …… 67
典型例题 …… 68
教材例题习题的变形题 …… 70
学科内综合题 …… 70
综合应用题 …… 71
创新题 …… 71
高考模拟题 …… 72
2.6 同步测试 …… 73
第二章测试性自我考评 …… 74
教材基础知识针对性训练 …… 74
探究应用拓展性训练 …… 75

第三章 导 数 …… 77
3.1 导数的概念 …… 77
重点知识归纳 …… 77
重点知识讲解 …… 78
易混知识辨析 …… 78
典型例题 …… 79
教材例题习题的变形题 …… 80
综合应用题 …… 80
创新题 …… 80
高考题 …… 81
3.1 同步测试 …… 81
3.2 几种常见的函数的导数 …… 82
基础知识归纳 …… 82
重点知识讲解 …… 82
易混知识辨析 …… 83

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

典型例题 …… 83
教材例题习题的变形题 …… 83
学科内综合题 …… 84
综合应用题 …… 84
创新题 …… 85
高考题 …… 85
3.2 同步测试 …… 86

3.3 函数的和、差、积、商的导数 …… 87
基础知识归纳 …… 87
重点知识讲解 …… 87
易混知识辨析 …… 88
典型例题 …… 88
教材例题习题的变形题 …… 89
学科内综合题 …… 89
综合应用题 …… 89
创新题 …… 90
高考题 …… 90
3.3 同步测试 …… 91

3.4 复合函数的导数 …… 92
基础知识归纳 …… 92
重点知识讲解 …… 92
易混知识辨析 …… 93
典型例题 …… 93
教材例题习题的变形题 …… 93
学科内综合题 …… 94
综合应用题 …… 94
创新题 …… 95
高考题 …… 95
3.4 同步测试 …… 96

3.5 对数函数与指数函数的导数 …… 97
第一课时 对数函数 …… 97
基础知识归纳 …… 97
易混知识辨析 …… 97
典型例题 …… 97
教材例题习题的变形题 …… 98
学科内综合题 …… 98
综合应用题 …… 98
创新题 …… 99
高考题 …… 99
同步测试 …… 99
第二课时 指数函数 …… 100
基础知识归纳 …… 100
易混知识辨析 …… 100
典型例题 …… 100
教材例题习题的变形题 …… 101
学科内综合题 …… 101
综合应用题 …… 101
创新题 …… 101
高考题 …… 102
同步测试 …… 102

3.6 函数的单调性 …… 103
基础知识归纳 …… 103
重点知识讲解 …… 103
易混知识辨析 …… 103
典型例题 …… 104
教材例题习题的变形题 …… 104
学科内综合题 …… 105
综合应用题 …… 105
创新题 …… 106
高考题 …… 107
3.6 同步测试 …… 107

3.7 函数的极值 …… 108
基础知识归纳 …… 108
重点知识讲解 …… 108
典型例题 …… 109
教材例题习题的变形题 …… 109
学科内综合题 …… 110
综合应用题 …… 110
创新题 …… 111
高考题 …… 111
3.7 同步测试 …… 112

3.8 函数的最大值与最小值 …… 113
基础知识归纳 …… 113
重点知识讲解 …… 113
易混知识辨析 …… 114
典型例题 …… 114
教材例题习题的变形题 …… 114
学科内综合题 …… 115
综合应用题 …… 116
创新题 …… 116
3.8 同步测试 …… 118

第三章测试性自我考评 …… 120

第四章 数系的扩充——复数 …… 122

4.1 复数的概念 …… 122
重点知识归纳 …… 122
重点知识讲解 …… 122
易混知识辨析 …… 123
典型例题 …… 123

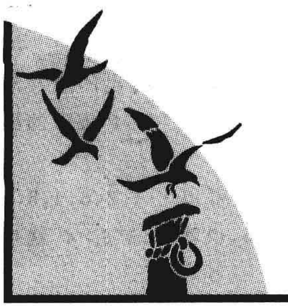
教材例题习题的变形题………………………… 124
学科内综合题………………………………… 124
综合应用题…………………………………… 125
创新题………………………………………… 125
高考题………………………………………… 125
4.1 同步测试 ……………………………… 126
4.2 复数的运算 ………………………… 126
4.3 数系的扩充 ………………………… 126
基础知识归纳………………………………… 126
重点知识讲解………………………………… 127
典型例题 ………………………………… 128
教材例题习题的变形题 ………………… 130
学科内综合题 …………………………… 130
综合应用题…………………………………… 131
创新题………………………………………… 132
高考题………………………………………… 132
同步测试……………………………………… 134
研究性学习课题:复数与平面向量、三角函数的联系…………………………………………… 135
基础知识归纳………………………………… 135
重点知识讲解………………………………… 135
易混知识辨析 ………………………… 136
典型例题 ……………………………… 137
学科内综合题 ………………………… 137
综合应用题…………………………………… 138
高考题………………………………………… 139
同步测试……………………………………… 139
第四章测试性自我考评……………………… 140
教材基础知识针对性训练…………………… 140
探究应用拓展性训练………………………… 141

期中测试…………………………………… 142
教材基础知识针对性训练…………………… 142
探究应用拓展性训练………………………… 144

期末测试…………………………………… 145
教材基础知识针对性训练…………………… 145
探究应用拓展性训练………………………… 147

参考答案 …………………………………… 149

第一章 概率与统计



一 随机变量

1.1 离散型随机变量的分布

基础知识归纳

1. 随机变量

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量. 随机变量常用希腊字母 ξ, η 等表示.

随机变量有以下特点：① 它可以用数字来表示，即使随机试验的结果不具有数量性质，也仍然可以用规定的数字来表示；② 这个数字在随机试验前是无法预先确定的；③在不同的随机试验中，结果可能有变化.

2. 离散型随机变量、连续型随机变量

如果随机变量可能取的值可以按一定次序一一列出，那么这样的随机变量叫做离散型随机变量. 如果随机变量可以取某一区间内 的一切值，那么这样的随机变量叫做连续型随机变量.

3. 离散型随机变量的分布列

设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$ ξ 取每一个值 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$，则称表为随机变量 ξ 的概率分布，简称 ξ 的分布列.

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

任一离散型随机变量的分布列都具有下面两个性质：

(1) $p_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots$

(2) $p_1+p_2+\cdots=1$.

4. 二项分布

在 n 次独立重复试验中某事件发生的次数 ξ 是一个随机变量，如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $k=0,1,\cdots,n$, $q=1-p$. 于是得到随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^n p^n q^0$

称这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 $\xi \sim B(n,p)$，其中 n, p 为参数，并记

$$C_n^k p^k q^{n-k}=b(k;n,p).$$

5. $\eta=a\xi+b$

若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi+b$，其中 a, b 是常数，则 η 也是随机变量，且 $P(\eta=ax_i+b)=P(\xi=x_i)$.

6. $\xi \sim B(n,p)$

若 $\xi \sim B(n,p)$，则 $P(\xi=k)=b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}$.

重点知识讲解

1. 写出离散型随机变量的分布列

根据离散型随机变量的分布列的意义，第一步需要分析离散型随机变量的所有可能取值；第二步求其取每个值时的概率. 第二步要综合运用在排列、组合和概率一章所学随机事件的概率知识解决. 这里关键是分析所求概率的类型是等可能事件的概率、互斥事件和的概率、还是相互独立事件积的概率.

2. 离散型随机变量分布列性质的运用

由离散型随机变量分布列的概率可知，离散型随机变

量取各个可能值是互斥事件，因此，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

易混知识辨析

1. 随机变量与随机试验

教科书在介绍随机变量的概念时，不加定义地引入了"随机试验"的概念. 一般地，一个试验如果满足下列条件，这种试验就是一个随机试验，为方便起见，也简称试验：①试验可以在相同的情形下重复进行；②试验的所有可能结果是明确可以知道的，并且不只一个；③每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在每次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果. 由此可见，随机变量不过是随机试验结果的数量化，即用变量表示而已.

2. 随机变量与函数

所谓随机变量，不过是随机试验的结果和实数之间的一个对应关系(对每一个试验结果自然地对应着一个实数)，这种对应关系是人为(当然也是客观存在的)地建立起来的，这与函数概念的本质是一样的. 只不过在函数概念中，函数 $f(x)$ 的自变量 x 是实数；而在随机变量的概念中，随机变量 ξ 的自变量是试验结果.

3. n 次独立重复试验、二项分布与二项式定理

二项分布是在 n 次独立重复试验中某事件发生次数 ξ 的概率分布，$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ 恰好是二项展开式 $(q+p)^n=C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}+\cdots+C_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+C_n^np^nq^0$ 中的第 $k+1$ 项(这里的 k 可取 $0,1,\cdots,n$).

易错

典型例题

例 1 写下列随机变量可能取的值，并说明随机变量所取值表示的随机试验的结果.

(1) 一口袋中装有 5 只同样大小的白球，编号为 1，2，3，4，5，现从该口袋中随机地取出 3 只球，被取出的球的最大号码数 ξ； $\xi=3.4.5.$

(2) 某单位的某部电话在单位时间内收到的呼叫次数 ξ.

解析 (1) 因为取出 3 只球，所以 ξ 不可能取 1，2；

(2) η 可取一切自然数.

答案 (1) ξ 可取 3，4，5.

对应.

$\xi=3$，表示取出的 3 只球的编号为 1，2，3；

$\xi=4$，表示取出的 3 只球的编号为 1，2，4 或 1，3，4 或 2，3，4；

$\xi=5$，表示取出的 3 只球的编号为 1，2，5 或 1，3，5 或 1，4，5 或 2，3，5 或 2，4，5 或 3，4，5；

(2) η 可取 $0,1,2,\cdots,n,\cdots$

$\eta=i$ 表示被呼叫 i 次，其中 $i=0,1,2,\cdots$

评注 (1) 中说明随机变量所取值表示的随机试验的结果时要具体，如 $\xi=5$，不能只回答取出 3 只球，所取出球的最大号码为 5 的情况.

例举详细

例 2 抛掷两枚骰子各一次，记第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数的差为 ξ，试问："$\xi>4$"表示的试验结果是什么？

解析 因为一枚骰子的点数可以是 1，2，3，4，5，6 六种结果之一，由已得 $-5\leqslant\xi\leqslant5$，也就是说"$\xi>4$"就是"$\xi=5$".

答案 "$\xi>4$"表示第一枚为 6 点，第二枚为 1 点.

评注 该题也可以先一一列出两枚骰子掷出点数的所有可能情况，然后再分析满足要求的试验结果是什么，但这样思考的话，解起来就显麻烦了.

例 3 一个盒中放有大小相同的红色、绿色、黄色三种小球，已知红球个数是绿球个数的两倍，黄球个数是绿球个数的一半，现从该盒中随机地取出一个球，若取出红球得 1 分，取出黄球得 0 分，取出绿球得 -1 分. 试写出从该盒中随机取出一个球所得分数 ξ 的分布列.

解析 显然 $\xi=1$ 或 0 或 -1，欲求 $P(\xi)$，需要知道红球、绿球、黄球的个数.

答案 设黄球的个数为 n，则绿球的个数为 $2n$，红球的个数为 $4n$，盒中球的总数为 $7n$.

$P(\xi=1)=\frac{4n}{7n}=\frac{4}{7}$，$P(\xi=0)=\frac{n}{7n}=\frac{1}{7}$，

$P(\xi=-1)=\frac{2n}{7n}=\frac{2}{7}$.

∴从该盒中随机取出一个球所得分数 ξ 的分布列为

ξ	1	0	-1
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

评注 设出各色球的个数是解决此题的关键.

例 4 一个类似于细胞分裂的物体，一次分裂为二，两次分裂为四，如此继续分裂有限多次，而随机终止. 设分裂 n 次终止的概率是 $\frac{1}{2^n}(n=1,2,3,\cdots)$，记 ξ 为原物体在分裂终止后所生成的子块数目，求 $P(\xi\leqslant10)$.

解析 ξ 的取值只能是 $2,4,8,16,\cdots$

所以 $P(\xi\leqslant10)=P(\xi=2)+P(\xi=4)+P(\xi=8)$.

答案 原物体在分裂终止后所生成的子块数目 ξ 的分布列为

ξ	2	4	8	16	…	2^n	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

$\therefore P(\xi\leqslant10)=P(\xi=2)+P(\xi=4)+P(\xi=8)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

评注 离散型随机变量在某一范围内取值的概率

等于它在这个范围内各个值的概率之和.

例 5 重复抛掷一枚骰子 5 次,得到点数为 6 的次数记为 ξ,求 $P(\xi>3)$.

解析 这是一个 n 次独立重复试验,$\xi\sim B(n,p)$.

答案 随机变量 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{6}\right)$,

$\therefore P(\xi=4)=C_5^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{7776}$, 选错.

$P(\xi=5)=C_5^5\left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{1}{7776}$,

$\therefore P(\xi>3)=P(\xi=4)+P(\xi=5)=\frac{13}{3888}$.

评注 如果 $\xi\sim B(n,p)$,那么关于 $P(\xi)$ 的计算套公式即可.

教材例题习题的变形题

例 1 (**P5 练习 1**)某城市出租车的起步价为 10 元,若行驶路程不超过 4 km,则按 10 元的标准收车费.若行驶路程超过 4 km,则按每超出 1 km 加收 2 元计费(超出不足 1 km的部分按 1 km 计).从该市的民航机场到某宾馆的路程为 15 km,某司机经常驾车在机场与此宾馆之间接送旅客,由于行车路线的不同以及途中停车时间要转换成行车路程(该市规定,每停车 5 min 按 1 km 路程计费).这名司机一次接送旅客的行车路程是一个随机变量,他收旅客的车费 η 也是一个随机变量.

(1) 求车费 η 关于行车路程 ξ 的关系式. (忽略时间)

(2) 已知某旅客实付车费 38 元,而出租车实际行驶了 15 km,问:出租车在途中因故停车累计最多几分钟?

解析 (1) η 由起步价 10 元和超出 4 km 时,每超出 1 km 加收 2 元计费两部分构成;(2) 38 元减去行驶 15 km 所需的费用,再转换成时间即可.

答案 (1) $\eta=2(\xi-4)+10=2\xi+2$.

(2) 由 $38=2\xi+2$ 得 $\xi=18$,$5\times(18-15)=15$,

$\therefore$ 出租车在途中因故停车累计最多 15 min.

例 2 (**P9 练习 5**)(1) 已知随机变量 ξ 所有可能取的值是 $1,2,\cdots,n$,且取这些值的概率依次是 $k,2k,\cdots,nk$,求常数 k 的值. 仍 利用之和为1与数列结合

(2) 已知随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=i)=\frac{i}{2a}(i=1,2,3)$,则 $P(\xi=2)$ 的值为(C). $\frac{1}{2a}+\frac{2}{2a}+\frac{3}{2a}=1$ $a=3$

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

解析 随机变量 ξ 分布列已知,可以考虑用分布列的性质建立关于待定系数的方程即可求解.

答案 (1) $\because k+2k+\cdots+nk=1$,

$\therefore \frac{kn(1+n)}{2}=1$.

$\therefore k=\frac{2}{n(1+n)}$.

$\frac{1}{2a}+\frac{2}{2a}+\frac{3}{2a}=1$

(2) $\because \frac{1}{2a}+\frac{2}{2a}+\frac{3}{2a}=1$,$\therefore a=3$,$\therefore P(\xi=2)=\frac{1}{3}$.

评注 当离散型随机变量的分布列已知,求参数的值时,可以通过分布列的性质建立关于参数的方程求解.

例 3 (**P9 练习 7**)(1) 如果 $\xi\sim B\left(20,\frac{1}{3}\right)$,求使 $P(\xi=k)$ 取最大值的 k 的值.一般地,如果 $\xi\sim B(n,p)$,其中 $0<p<1$,讨论当 k 由 0 增加到 n 时,$P(\xi=k)$ 的变化情况.k 取什么值时,$P(\xi=k)$ 取最大值?

(2) 已知 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中,只有第五项的二项式系数最大,求该展开式中系数最大的项.

解析 可以通过考查 $P(\xi=k)$ 的单调性求解.

答案 (1) 由 $\frac{P(\xi=k+1)}{P(\xi=k)}=\frac{C_{20}^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{20-k-1}}{C_{20}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}}$

$=\frac{20-k}{2(k+1)}\geqslant 1$,得 $k\leqslant 6$.

当 $k>6$ 时,$P(\xi=k+1)<P(\xi=k)$;

当 $k=6$ 时,$P(\xi=k+1)=P(\xi=k)$;

$\therefore k=6,7$ 时,$P(\xi=k)$ 取最大值.

一般情况下:

一般地,由 $\frac{P(\xi=k+1)}{P(\xi=k)}=\frac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{C_n^kp^kq^{n-k}}\geqslant 1$,得 $\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}\geqslant 1$,

即 $(n-k)p\geqslant q(k+1)$, $(p+q=1\quad q=1-p)$

$\therefore k\leqslant np-q=(n+1)p-1$.

① 如果 $(n+1)p$ 是正整数,那么 $(n+1)p-1$ 也是正整数,此时 $k=(n+1)p-1$,$k+1=(n+1)p$ 且 $P(\xi=k+1)=P(\xi=k)$,即当 k 取 $(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$ 时,$P(\xi=k)$ 取最大值.

② 如果 $(n+1)p$ 不是正整数,那么对任何实数 k,$P(\xi=k+1)\neq P(\xi=k)$,所以当 $k+1<(n+1)p$ 时,$P(\xi=k+1)=P(\xi=k)$.记小于 $(n+1)p$ 的最大整数为 $[(n+1)p]$,则当 $k=[(n+1)p]$ 时,$P(\xi=k)$ 取最大值.

(2) 由二项式系数性质可知 $n=8$,设第 $r+1$ 项的系数 T_{r+1} 最大,则 $\begin{cases}T_{r+1}\geqslant T_r,\\T_{r+1}\geqslant T_{r+2}\end{cases}$,$T_{r+1}=2^{-r}C_8^r(r=0,1,2\cdots 8)$,代入上式得 $\begin{cases}8-r+1\geqslant 2r,\\2(r+1)\geqslant 8-r,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant r\leqslant 3$ $(r\in\mathbf{N})$,

$\therefore r=2$ 或 $r=3$,$\therefore$ 二项式的展开式中系数最大的项是 $T_3=7x^{\frac{5}{2}}$,$T_4=7x^{\frac{7}{4}}$.

学科内综合题

例 1 某人骑车从家到公司的途中有 5 个路口,假设他在各个路口遇到红灯是相互独立事件,且概率都是 $\frac{1}{3}$,求:

(1) 此人在途中遇到红灯的次数 ξ 的分布列.

(2) 此人首次遇到红灯或到达目的地而停车时所经过了的路口数 η 的分布列.

(3) 此人途中至少遇到一次红灯的概率.

解析 (1) $\xi \sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$,(2) $\eta=k(k=0,1,2,3,4)$ 代表前 k 个路口均为绿灯,(3)即求 $P(\xi\geqslant 1)$.

答案 (1) ξ 分布列为

$$P(\xi=k)=C_5^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}(k=0,1,2,3,4,5).$$

(2) η 分布列为

$$\begin{cases}P(\eta=k)=\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{1}{3}(k=0,1,2,3,4),\\ P(\eta=5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}.\end{cases}$$

(3) $P(\xi\geqslant 1)=1-P(\xi=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{211}{243}$.

例 2 甲、乙两名篮球队员独立地轮流投篮,直到有一人投中为止,甲投中的概率为 0.4,乙投中的概率为 0.6,分别求甲、乙两人投篮次数的分布列(假设甲先投).

解析 设 $\xi=$ 甲投篮的次数,$\eta=$ 乙投篮的次数,事件 A 为前 $k-1$ 次均不中,第 k 次甲投中;事件 B 为前 $k-1$ 次均不中,第 k 次甲仍投不中而乙投中,事件 C 为前 k 次均不中,第 $k+1$ 次甲投中,则 A,B,C 互斥,所求分布列为

$$P(\xi=k)=P(A+B)=P(A)+P(B),$$
$$P(\eta=k)=P(B+C)=P(B)+P(C).$$

答案 $P(\xi=k)=0.6^{k-1}\times 0.4^{k-1}\times 0.4+0.6^k\times 0.4^{k-1}\times 0.6=0.76\times 0.24^{k-1}(k=1,2,3,\cdots)$.

$P(\eta=0)=0.4$,$P(\eta=k)=0.6^k\times 0.4^{k-1}\times 0.6+0.6^k\times 0.4^k\times 0.4=0.456\times 0.24^{k-1}(k=1,2,3,\cdots)$.

评注 对于比较复杂的分布列问题,求 ξ 取各个值的概率时就要注意分析是等可能事件的概率、互斥事件和的概率还是相互独立事件的概率.当然,如果恰好是 n 次独立重复试验就简单多了.

综合应用题

例 1 若离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1
P	$9c^2-c$	$3-8c$

试求常数 c.

解析 运用分布列性质求解.

答案 依题意,得 $\begin{cases}9c^2-c+3-8c=1,\\ 0\leqslant 9c^2-c\leqslant 1,\\ 0\leqslant 3-8c\leqslant 1,\end{cases}$

解得 $c=\frac{1}{3}$.

评注 注意不要漏掉 $0\leqslant p_i\leqslant 1$ 这个条件.

例 2 一口袋中装有五只球,编号为 1,2,3,4,5,在口袋中同时取三只,以 ξ 表示取出的三只球中的最小号码,写出随机变量 ξ 的分布列.

解析 随机变量 ξ 的可能值为 1,2,3.

当 $\xi=1$ 时,即取出的三只球中最小号码为 1,则其他两只球只能在编号为 2,3,4,5 的四只球中任取两只,故有 $P(\xi=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}$.

当 $\xi=2$ 时,即取出的三只球中最小号码为 2,则其他两只球只能在编号为 3,4,5 的三只球中任取两只,故有 $P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

当 $\xi=3$ 时,即取出的三只球中最小号码为 3,则其他两只球只能在编号为 4,5 的两只球中任取两只,故有 $P(\xi=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.

答案

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

评注 求离散型随机变量的分布列,首先要确定其所有可能的取值,然后综合运用排列、组合和概率的知识求其取各个值时的概率.

创新题

例 1 (**拓展题**)在 10 件产品中有 2 件次品,连续抽 3 次,每次抽一件,求:

(1) 不放回抽样时,抽到的次品数 ξ 的分布列.

(2) 放回抽样时,抽到的次品数 η 的分布列.

解析 放回抽样和不放回抽样对随机变量的取值和相应的概率都产生了影响,要具体问题具体分析.

答案 (1) 不放回抽样时,抽取的次品数 ξ 可取 0,1,2.

$P(\xi=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{8}{15}$,$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$,所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2) 放回抽样时,η 可能取的值为 0,1,2,3,

故 $P(\eta=k)=C_3^k0.8^k0.2^{8-k}(k=0,1,2,3,)$,

所以 η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	0.8^3	$C_3^2\,0.8^2\,0.2$	$C_3^1\,0.8^2\,0.2$	$C_3^0\,0.2^3$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

评注 放回抽样时,抽到的次品数是独立重复实验,即 $\eta \sim B(3,0.8)$

例 2 (**开放题**)数列 $\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\cdots,\frac{1}{k},\cdots$ 是否可以是某一离散型随机变量的概率分布?

解析 分析它是否满足分布列的性质即可.

答案 $\because \frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\frac{2}{7}>\frac{1}{5},\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}>\frac{3}{10}>\frac{1}{5},\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}>\frac{4}{14}>\frac{1}{5},\cdots$

所以数列的前 15 项之和为

$$\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{19}\right)>\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1,$$

故此数列一定不是分布列.

评注 判断某数列是否是分布列,就是判断其是否满足分布列的两条性质.

例 3 (**探究题**)设随机变量 ξ 的概率分布为下表,试写出 $\xi+2$ 及 ξ^2 的分布列.

ξ	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\xi+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
ξ^2	4	$\frac{1}{4}$	0	4	16.
P					

解析 如果 $\eta=a\xi+b$,那么 $P(\xi=k)=P(\eta=ak+b)$.

答案

$\xi+2$	0	$\frac{3}{2}$	2	4	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

ξ^2	4	$\frac{1}{4}$	0	16
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$

评注 $P(\xi^2=4)=P(\xi=-2)+P(\xi=2)$.

高考题

例 1 (**2000 年全国**)某厂生产电子元件,其产品的次品率为 5%,现从一批产品中任意地连续取出 2 件,写出其中次品数 ξ 的概率分布.

解析 $\xi \sim B(2,5\%)$.

答案 $P(\xi=0)=C_2^0(95\%)^2=0.9025$,

$P(\xi=1)=C_2^1(5\%)(95\%)=0.095$,

$P(\xi=2)=C_2^2(5\%)^2=0.0025$,

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.9025	0.095	0.0025

例 2(**2004 年安徽春季**)已知盒中有 10 个灯泡,其中 8 个正品,2 个次品,需要从中取出 2 个正品,每次取出 1 个,取出后不放回,直到取出 2 个正品为止.设 ξ 为取出的次数,求 ξ 的分布列.

解析 $\xi=2,3,4$.

答案 $P(\xi=2)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$,

$P(\xi=3)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{14}{45}$,

$P(\xi=4)=1-\frac{28}{45}-\frac{14}{45}=\frac{1}{15}$,

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	2	3	4
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{1}{15}$

同步测试

教材基础知识针对性训练

一、选择题.

1. 投掷均匀硬币一次,随机变量为( ).

A. 出现正面的次数 B. 出现正面或反面的次数

C. 投掷硬币的次数 D. 出现反面次数的和

2. 下列所述:① 某座大桥一天内经过的车辆数 ξ;② 某无线电寻呼台一天内收到的寻呼次数 ξ;③ 一天之内的温度 ξ;④ 一位射手对目标进行射击,击中目标得 1 分,未击中目标得 0 分,用 ξ 表示该射手在一次射击中的得分.其中 ξ 是离散型随机变量的是( ).

A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

3. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{1}{2^k}$,$k=1,2,\cdots$ 则 $P(2<\xi\leqslant 4)$ 的值为( ).

A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{5}{16}$

4. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=m\left(\frac{2}{3}\right)^k$,$k=1,2,3$,则 m 的值为( ).

A. $\frac{7}{38}$ B. $\frac{27}{38}$ C. $\frac{17}{19}$ D. $\frac{27}{19}$

5. 设某批电子表正品率为 $\frac{3}{4}$,现对该批电子表进行测试,

设第ξ次首次测到正品,则$P(\xi=3)$等于(　　).

A. $C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}$　　B. $C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$

C. $\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}$　　D. $\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$

6. 设ξ是一个离散型随机变量,则下面可能不是ξ的概率分布的一组是(　　).

A. 0,0,0,1,0

B. 0.1,0.2,0.3,0.4

C. $p,1-p$

D. $\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\cdots,\frac{1}{(n-1)n}(n\in\mathbf{N}^*)$

二、填空题.

1. 某厂生产电子元件,其产品的次品率为5%,现从一批产品中,任意地连续取出2件,则次品数ξ的概率分布是

ξ	0	1	2
P			

2. 设随机变量的分布列为$P(\xi=k)=\frac{k}{10}(k=1,2,3,4)$,则$P\left(\frac{1}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{5}{2}\right)=$________.

3. 设随机变量ξ的分布列为$P(\xi=k)=\frac{c}{k(k+1)},k=1,2,3$,$c$为常数,则$P(0.5<\xi<2.5)=$________.

三、应用题.

1. 设篮球队A与B进行比赛,每场比赛均要分出胜负,若有一队胜四场,则比赛宣告结束.假设A,B在每场比赛中获胜的概率都是$\frac{1}{2}$,写出比赛场数的分布列.

2. 一批产品共100件,其中10件是次品,为了检验其质量,从中以随机的方式抽出5件,求在抽取的5件产品中次品数的分布列.

3. 从一批有10件合格品与3件次品的产品中一件一件地抽取产品,设各件产品被抽到的可能性相同,在下列三种情况下分别求直到取出合格品为止时所需抽取次数ξ的分布列.

(1) 每次取出的产品都不放回此批产品中.

(2) 每次取出的产品都放回此批产品中,然后再取出一件产品.

(3) 每次取出一件产品后总以一件合格品放回此批产品中.

4. 一个口袋中有7个球,其中4个红球,3个黑球,从袋中任取3个球,求取出的红球数ξ的分布列及$P(\xi>2)$.

5. 某人参加射击训练,击中目标的概率为$\frac{1}{3}$.

(1) 设ξ为他射击6次击中目标的次数,求随机变量ξ的分布列.

(2) 设η为他第一次击中目标时所需要射击的次数,求η的分布列.

(3) 若他连续射击6次,设δ为他第一次击中目标前没有击中目标的次数,求δ的分布列.

(4) 若他只有6颗子弹,若击中目标,则不再射击,否则子弹打光,求他射击次数的分布列.

探究应用拓展性训练●●●

1. **(学科内综合题)**设随机变量$\xi\sim B(2,p)$,$\eta\sim B(4,p)$.若$P(\xi\geqslant1)=\frac{5}{9}$,求$P(\eta\geqslant1)$.

2. **(学科内综合题)**若离散型随机变量ξ的分布列为

ξ	0	1
P	$9c^2-c$	$3-8c$

试求常数c.

3. **(信息题)**已知随机变量ξ的分布列如下表所示,分别求随机变量$\eta_1=2\xi-1$,$\eta_2=\xi^2$的分布列.

ξ	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

4. **(信息题)**一暗箱内有3个蓝球,3个绿球和4个红球,假定取得一个蓝球得1分,取得一个绿球扣1分,取得1个红球得0分.现从暗箱中随机取3个球,求所得分数的概率分布.

5. **(与现实生活联系的应用题)**某工厂对2月份的奖金发放作出了如下规定:在这4周时间里如果有1周完成生产任务,则得奖金48元;如果有2周完成生产任务,则可得奖金80元;如果有3周完成生产任务,可得奖金128元;如果有4周完成生产任务,可得奖金160元;如果4周都未完成任务,则没有奖金.假设某工人每周完成任务与否是等可能的,求该工人在2月份所得奖金的分布列.

一 随机变量

1.2 离散型随机变量的期望与方差

基础知识归纳

1. 数学期望

若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期望或平均数、均值,数学期望又简称为期望,它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

2. 方差

若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

那么,把 $D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots$ 叫做随机变量 ξ 的均方差,简称方差. 式中 $E\xi$ 是随机变量 ξ 的期望,$D\xi$ 的算术平方根 $\sqrt{D\xi}$ 叫做随机变量 ξ 的标准差,记做 $\sigma\xi$. 随机变量的方差与标准差都反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度,其中标准差与随机变量本身有相同的单位.

3. $P(\eta=ax_i+b)=P(\xi=x_i),i=1,2,3,\cdots$

$E(a\xi+b)=aE\xi+b,D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

$D(10\xi)=100D\xi$.

4. 若 $\xi\sim B(n,p)$,**那么** $P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$,

$E(\xi)=np,D\xi=npq(q=1-p)$.

重点知识讲解

期望与方差都是随机变量的重要特征数.

随机变量的分布列完全决定了其取值规律,但往往不能明显而集中地表现随机变量的某些特点. 在许多场合,特别是在实际应用中,人们往往并不知道随机变量的确切分布,虽然,对于任何随机变量都可以通过试验来近似求出它的概率分布,但这常常很复杂且很不经济. 就某些理论研究和实际应用而言,往往也没有必要知道它的一切概率特征,而只需要知道它的一些数学特征. 随机变量的期望与方差都是随机变量的重要特征数(或数字特征),是对于随机变量的一种简明的描写. 随机变量的数学期望表示了随机变量在随机试验中取值的平均值,所以随机变量的数学期望(期望)又常称为随机变量的平均数、均值. 由于离散型随机变量的数学期望的计算是从它的概率分布出发,因而数学期望是随机变量的概率平均值. 随机变量的方差表现了随机变量所取值相对于它的期望的集中与离散的程度. 随机变量 ξ 的标准差 $\sigma\xi$ 与方差一样都反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度. 在实际问题中,标准差用的比方差更广泛,其优点是标准差 $\sigma\xi$ 与随机变量 ξ 本身有相同的量纲(单位或因次).

易混知识辨析

放回抽样与不放回抽样

关于产品的检查问题,常涉及次品率、抽样是否放回的问题. 若采用放回抽样,则各次抽样的次品率不变,各次抽样是否抽出次品是完全独立的事件. 若采用不放回抽样,每次抽样后次品率将会发生变化,因而各次抽样不独立. 但是直观上看,当产品数量很大而抽查次数较少时,在抽样时抽出次品与否对后面抽样的次品率影响很小,因而也可以认为各次抽样是彼此独立的. 一般地,在产品抽查中,已说明产品数量很大时,各次抽查的结果可以认为是彼此独立的.

典型例题

例 1 设随机变量 ξ 的分布列为

ξ	1	2	…	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

求 $D\xi$.

解析 $\because E\xi=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+\cdots+n\times\frac{1}{n}$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2},$$

$$\therefore D\xi=\left(1-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(2-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(n-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left[(1^2+2^2+\cdots+n^2)-(n+1)(1+2+\cdots+n)+\frac{(n+1)^2}{4}\cdot n\right]=\frac{n^2-1}{n}.$$

答案 $\frac{n^2-1}{n}$

评注 这是一道根据方差定义进行计算的题目，计算过程中要用到数列求和公式 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

例 2 一个盒子里装有 12 个零件，其中有 9 个正品，3 个次品. 从中任取一个，如果每次取出次品就不再放回去，再取一个零件，直到取得正品为止，求在取得正品之前已取出次品数的期望.

解析 设取得正品之前已取出的次品数为 ξ，显然 ξ 可能取的值为 0,1,2,3. 当 $\xi=0$ 时，即第一次取得正品，试验停止，则 $P(\xi=0)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. 当 $\xi=1$，即第一次取出次品，第二次取得正品，试验停止，则 $P(\xi=1)=\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}$. 当 $\xi=2$ 时，即第一、二次取出次品，第三次取得正品，试验停止，则 $P(\xi=2)=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{220}$.

当 $\xi=3$ 时，即第一、二、三次取出次品，第四次取得正品，试验停止，则 $P(\xi=3)=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{1}{220}$.

所以 $E\xi=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{9}{44}+2\times\frac{9}{220}+3\times\frac{1}{220}=\frac{3}{10}$.

答案 $\frac{3}{10}$.

评注 本题采用不放回抽样，每次抽样后次品率将会发生变化，即各次抽样是不独立的.

例 3 有一批数量很大的商品的次品率为 1%，从中任意地连续取出 200 件商品，设其中次品数为 ξ，求 $E\xi$，$D\xi$.

解析 因为商品数量相当大，抽 200 件商品可以看作 200 次独立重复试验，所以 $\xi\sim B(200,1\%)$.

因为 $E\xi=np$，$D\xi=npq$，这是 $n=200$，$p=1\%$，$q=99\%$，所以 $E\xi=200\times1\%=2$，$D\xi=200\times1\%\times99\%=1.98$.

答案 $E\xi=2$，$D\xi=1.98$.

评注 解答本题的关键是理解抽 200 件商品可以看作 200 次独立重复试验，即 $\xi\sim B(200,1\%)$，从而可用公式 $E\xi=np$，$D\xi=npq(q=1-p)$ 直接进行计算.

教材例题习题的变形题

例 1 **(P3 例题)** 某商场要根据天气预报来决定节日是在商场内还是在商场外开展促销活动. 统计资料表明，每年国庆节商场内的促销活动可获得经济效益 2 万元；商场外的促销活动如果不遇到有雨天气则带来经济效益 10 万元，如果促销活动中遇到有雨天气则带来经济损失 4 万元. 9 月 30 日气象台预报国庆节当地有雨的概率是 40%，商场应该选择哪种促销方式?

解析 设该商场国庆节在商场外的促销活动获得的经济效益为 ξ 万元，则 $P(\xi=10)=0.6$，$P(\xi=-4)=0.4$，所以 $E\xi=10\times0.6+(-4)\times0.4=4.4$，即在当地有雨的概率是 40% 的情况下，国庆节在商场外促销活动的经济效益的期望是 4.4 万元，超过在商场内促销活动可获得的经济效益 2 万元，所以商场应该选择在商场外的促销方式.

答案 应该选择在商场外的促销方式.

评注 期望与方差在实际应用中可以用来解决一些问题或者作出科学的决策.

例 2 **(P15 例 7)** A，B 两台机床同时加工一种零件，每生产一批数量较大的产品时，出次品的概率如下表所示：

A 机床

次品数 ξ_1	0	1	2	3
P	0.7	0.2	0.03	0.04

B 机床

次品数 ξ_2	0	1	2	3
P	0.8	0.06	0.04	0.10

问哪一台机床加工质量较好.

解析 先比较它们的期望：

$E\xi_1=0\times0.7+1\times0.2+2\times0.06+3\times0.04=0.44$，

$E\xi_2=0\times0.8+1\times0.06+2\times0.04+3\times0.10=0.44$.

它们的期望相同，再比较它们的方差：

$D\xi_1=(0-0.44)^2\times0.7+(1-0.44)^2\times0.2+(2-0.44)^2\times0.03+(3-0.44)^2\times0.04=0.6064$，

$D\xi_2=(0-0.44)^2\times0.8+(1-0.44)^2\times0.06+(2-0.44)^2\times0.04+(3-0.44)^2\times0.10=0.9264$.

答案 $\because D\xi_1<D\xi_2$，$\therefore A$ 机床加工较稳定、质量较好.

评注 此类问题要从平均值、方差、综合评定三个方面进行回答.

学科内综合题

例 1 设事件 A 发生的概率为 p，证明：事件 A 在一次试验中发生次数 ξ 的方差不超过 $\frac{1}{4}$.

解析 因为 ξ 所有可能取的值为 0,1，

且 $P(\xi=0)=1-p$，$P(\xi=1)=p$，

所以 $E\xi=0\times(1-p)+1\times p=p$，

$D\xi=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p=P(1-p)$

$\leqslant\left(\frac{p+1-p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

评注 求出 $D\xi$ 后，$D\xi=P(1-p)$ 是关于 p 的二次函数，可以用基本不等式，也可以用配方法求最值.

例 2 某射手进行射击练习，每 5 发子弹为一组，一旦命中就停止射击，并进入下一组练习，否则一直打完 5 发子弹后才能进入下一组练习. 若该射手在某组射击练习中命中一次，并且已知他射击一次的命中率为 0.8，求在这一组练习中耗用子弹数 ξ 的分布列，并求出 ξ 的期望与方差 $D\xi$(保留两位小数).

解析 该组练习耗费子弹数 ξ 为随机变量，ξ 可以取值为 1,2,3,4,5，设第 k 次击中目标，则前 $k-1$ 次都未击中目标.

$\xi=1$，表示一发即中，$P(\xi=1)=0.8$.

$\xi=2$，表示第一发未中，第二发命中，故

$P(\xi=2)=(1-0.8)\times0.8=0.16$.

$\xi=3$，表示第一、二发未中，第三发命中，故

$P(\xi=3)=(1-0.8)^2\times0.8=0.032$.

$\xi=4$，表示第一、二、三发未中，第四发命中，故

$P(\xi=4)=(1-0.8)^3\times0.8=0.0064$.

$\xi=5$，表示前 4 发未中，第 5 发命中，故

$P(\xi=5)=(1-0.8)^4\times0.8=0.00128$.

$E\xi=1\times0.8+2\times0.16+3\times0.032+4\times0.0064+5\times0.00128\approx1.25$，

$D\xi=(1-1.25)^2\times0.8+(2-1.25)^2\times0.16+(3-1.25)^2\times0.032+(4-1.25)^2\times0.0064+(5-1.25)^2\times0.00128\approx0.30$.

答案 ξ 的分布列

ξ	1	2	3	4	5
P	0.8	0.16	0.032	0.0064	0.00128

$E\xi\approx1.25$，$D\xi=0.30$.

例 3 一整数等可能地在 1,2,3,…,10 中取值，以 ξ 记除尽这一整数的正整数的个数，求 ξ 的期望值 $E\xi$.

解析 在这 10 个数中 $\xi=1$，即只有一个正整数能整除的数，只有 1，它只能被本身整除，所以 $P(\xi=1)=\frac{1}{10}$. $\xi=2$，即只有两个正整数能整除的数，只有 2,3,5,7 这四个数，它们只能被 1 和本身整除，所以 $P(\xi=2)=\frac{4}{10}$. $\xi=3$，即只有三个正整数能整除的数，4 能被 1,2,4 这三个数整除，9 能被 1,3,9 这三个数整除，故这样的数只有 4,9 两个数，所以 $P(\xi=3)=\frac{2}{10}$. $\xi=4$，即共有四个正整数，能整除的数有 6,8,10 三个，故 $P(\xi=4)=\frac{3}{10}$.

$E\xi=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{4}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{3}{10}=2.7$.

答案 2.7

综合应用题

例 1 某份数学试卷由 30 个选择题构成，每个选择题有 4 个选项，其中有且只有一个选项是正确的，每题选对得 5 分，不选或选错均得 0 分，满分为 150 分. 学生甲选对任一题的概率为 0.9，学生乙选对任一题的概率为 0.85，求学生甲和学生乙在这次测试中成绩的期望.

解析 设学生甲在此次考试中答对的题目个数为 ξ，学生乙在此次考试中答对的题目个数为 η，

则 $\xi\sim B(30,0.9)$，$\eta\sim B(30,0.85)$，

$\therefore E\xi=30\times0.9=27$，$E\eta=30\times0.85=25.5$，

$\therefore E(5\xi)=5E\xi=135$，$E(5\eta)=5E\eta=127.5$.

答案 学生甲的成绩期望为 135，学生乙的成绩期望为 127.5.

例 2 设 m L 水中含有 n 个大肠杆菌，现任取 1 L 水检验，设其中含大肠杆菌的个数为 ξ，求 $E\xi$.

解析 任取 1 L 水，则此升水中含一个大肠杆菌的概率是 $\frac{1}{m}$，事件“$\xi=k$”发生，即 n 个大肠杆菌恰有 k 个在此升水中，由 n 次独立重复试验中事件 A(在此升水中含一个大肠杆菌)恰好发生 k 次的概率计算方法可求出 $P(\xi=k)$，进而可求 $E\xi$.

答案 记事件 A:“在所取的 1 升水中含一个大肠杆菌”，则 $P(A)=\frac{1}{m}$，

$\therefore P(\xi=k)=P_n(k)=C_n^k\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，

$\therefore \xi\sim B\left(n,\frac{1}{m}\right)$，则 $E\xi=\frac{n}{m}$.

评注 解本题的关键是证明随机变量 ξ 服从二项分布.

例 3 在有奖摸彩中，一期彩票(发行 10000 张彩票为一期)中有 200 个奖品是 5 元的，20 个奖品是 25 元的，5 个奖品是 100 元的，求在不考虑获利的前提下，一张彩票的合理价格是多少元.

解析 设一张彩票中奖额为随机变量 ξ，显然 ξ 所有可能取得值为 0,5,25,100，依题意可得 ξ 的分布列为

ξ	0	5	25	100
P	$\frac{391}{400}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{2000}$

$\therefore E\xi=0\times\frac{391}{400}+5\times\frac{1}{50}+25\times\frac{1}{500}+100\times\frac{1}{2000}=0.2$.

答案 0.2

评注 一般地，发行各种彩票，政府要从中收取一部分资金用于公共福利事业，同时也要考虑工作人员的工资等问题，本题的“不考虑获利”的意思是指：所收资金全部用于奖品方面的费用.

创新题

例 1 (探究题)设 ξ 是一个离散型随机变量，其分布列如下

表,求 $E\xi$ 和 $D\xi$.

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^2

解析 根据分布列的性质先确定 q 的值,依概率的性质,得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+1-2q+q^2=1,\\ 0\leqslant 1-2q<1,\\ q^2<1,\end{cases}\quad 解得\ q=1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 ξ 的分布列为

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$

$$\therefore E\xi=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times(\sqrt{2}-1)+1\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$
$$=1-\sqrt{2},$$
$$D\xi=[-1-(1-\sqrt{2})]^2\left(\frac{1}{2}\right)+(0-1+\sqrt{2})^2\times$$
$$(\sqrt{2}-1)+[1-(1-\sqrt{2})]^2\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}-1.$$

答案 $E\xi=1-\sqrt{2}$ $D\xi=\sqrt{2}-1$

例 2 **(信息题)** 人寿保险中(某一年龄段),在一年的保险期内,每个被保险人需交纳保费 a 元,若被保险人意外死亡则保险公司赔付 3 万元,出现非意外死亡则赔付 1 万元.经统计,此年龄段一年内意外死亡的概率为 p_1,非意外死亡的概率为 p_2,则 a 需满足什么条件,保险公司才可能盈利.

解析 设 ξ 为盈利数,其概率分布为

ξ	a	$a-30000$	$a-1000$
P	$1-p_1-p_2$	p_1	p_2

且 $E\xi=a(1-p_1-p_2)+(a-30000)p_1+(a-10000)p_2$

若要盈利,则需 $E\xi>0$,故 $a>30000\ p_1+10000\ p_2$.

答案 $a>30000\ p_1+10000\ p_2$

高考题

例 1 **(2004 年天津)** 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛,设随机变量 ξ 表示所选 3 人中女生的人数.

(1) 求 ξ 的分布列.

(2) 求 ξ 的数学期望.

(3) 求"所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$"的概率.

解析 (1) $\because\xi$ 可能取的值为 0,1,2,

$$P(\xi=k)=\frac{C_2C_4^{3-k}}{C_6^3}\ (k=0,1,2),$$

$\therefore\xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) $E\xi=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1.$

(3) $P(\xi\leqslant 1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{4}{5}.$

答案 (1)

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)1 (3) $\frac{4}{5}$

例 2(2003 年全国) A,B 两个代表队进行乒乓球对抗赛,每队三名队员,A 队队员是 A_1,A_2,A_3,B 队队员是 B_1,B_2,B_3.按以往多次比赛的统计,对阵队员之间胜负概率如下表:

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中的对阵方式出场,每场胜队得 1 分,负队得 0 分,设 A 队,B 队最后所得总分分别为 ξ,η.

(1) 求 ξ,η 的概率分布.

(2) 求 $E\xi$,$E\eta$. 期望!

解析 (1)ξ,η 的可能取值分别为 3,2,1,0,

$$P(\xi=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{75}.$$

$$P(\xi=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{28}{75}.$$

$$P(\xi=1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

$$P(\xi=0)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}.$$

根据题意 $\xi+\eta=3$,所以

$$P(\eta=0)=P(\xi=3)=\frac{8}{75}.$$

$$P(\eta=1)=P(\xi=2)=\frac{28}{75}.$$

$$P(\eta=2)=P(\xi=1)=\frac{2}{5}.$$

$$P(\eta=3)=P(\xi=0)=\frac{3}{25}.$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com