初級混合數學

五冊

教育部審定

新中學教科書

初級混合數學

第五冊

編者

歙縣 程廷熙　高安 傅種孫

校者

江寧 張鵬飛　無錫 華襄治

中華書局印行

有著作權不准翻印

民國十四年二月發行
民國十五年五月六版

新中學教科書 初級混合數學（全六冊）

【第五冊定價銀六角】

（外埠酌加郵滙費）

編者 歙縣程廷熙 高安傅種孫

閱者 江寧張鵬飛 無錫華襄治

發行者 中華書局

印刷者 中華書局

印刷所 上海靜安寺路二七七號 中華書局

總發行所 上海棋盤街 中華書局

分發行所 北京 天津 保定 張家口 濟南 青島 太原 開封 鄭州 西安 蘭州 南京 徐州 杭州 蘭溪 安慶 蕪湖 南昌 九江 漢口 武昌 沙市 長沙 衡州 常德 成都 重慶 福州 廈門 廣州 潮州 汕頭 雲南 貴陽 奉天 吉林 哈爾濱 新加坡 中華書局

新中學教科書

初級混合數學第五册

目次

第壹章　幾何初步

(1—18 頁)

1. 點—直線—距離　2. 長
3. 平面　4. 角
5. 全等形　6. 全等之實驗法
7. 相等之角　8. 圓
9. 折線　10. 多邊形
11. 全等之三角形　12. 平行線
13. 平行線之性質　14. 三角形之性質及種類
15. 多邊形之內角和及外角和　16. 垂直線之性質
17. 全等之直角三角形　18. 作圖

第貳章　四邊形

(19—40 頁)

1. 四邊形之種類　2. 梯形及平行四邊形之高及底
3. 平行四邊形之性質　4. 全等三角形法
5. 證相等之別法　6. 證垂直法
7. 平行四邊形之充分條件　8. 證平行之法

9. 全等之平行四邊形 10. 疊合法之用處
11. 等分線段 12. 倍線段定理之證法
13. 三角形之中線與重心 14. 線段和差定理之證法

第叄章 不等式

(41—53頁)

1. 不等式 2. 全與分
3. 大小與正負 4. 不等量與等量之加減
5. 諸不等量之關係
6. 不等量與等量之乘除 7. 不等量與不等量之加減乘除
8. 不等式之解法
9. 不等角與不等線段之基本定理

第肆章 推證法

(54—73頁)

1. 推證之必要 2. 引用根據之規則
3. 推證法 4. 順證與反證之意義
5 反證之方式 6. 反證法中之分別反駁
7. 關係語
8 逆定理之製造法 9. 還原法
10. 還原法在代數上之應用 11. 綜合法與分析法
12. 假如法
13. 分析法示範

第伍章 圓

(74—112頁)

1. 圓心　　2. 直徑
3. 全等圓　　4. 圓心角——弧——扇形
5. 弧與弦及弓形　　6. 比較弦,弧,圓心角之大小之方法
7. 弦及弧之垂直平分線
8. 諸點共線之證法　　9. 圓內接多邊形
10. 諸線共點之證法　　11. 三角形之外接圓
12. 圓界角　　13. 圓內接四邊形
14. 弧,弦及所對圓心角,圓界角互相利用以比較大小
15. 割線　　16. 切線
17. 切線(續)　　18. 弦與切線相交之角
19. 圓外切多邊形　　20. 三角形之內切圓及旁切圓
21. 線心距離
22. 同圓或等圓內二弦之大小之證法　　23. 兩圓相切
24. 證二圓相切
25. 兩圓之關係及公切線

第陸章　幾何作圖

(113—132頁)

1. 作圖題　　2. 作圖之根據
3. 作圖之器具　　4. 作圖之規範
5. 推究　　6. 作三角形之有解情形
7. 馭作圖題之方法
8. 造因法　　9. 拼合法
10. 三角形之奠基法　　11. 輔助線
12. 分析法別例

第柒章 軌跡

(133—152頁)

1. 物體之運動
2. 軌跡之意義
3. 幾何軌跡
4. 軌跡語意之分析
5. 軌跡定理之證法
6. 軌跡命題之形式
7. 描跡法及其應注意之點
8. 乙種軌跡定理之證法
9. 軌跡問題解法
10. 軌跡之交點—作圖

第捌章 無定一次方程

(153—165頁)

1. 無定一次方程
2. 附條件的解答
3. 二元無定一次方程
4. 解法第一
5. 解答無窮與有限之辨別
6. 解法第二
7. 解法第三
8. 多元無定一次方程
9. 孫子數物
10. 大衍—求一術
11. 混合法

第玖章 一次方程與行列式

(166—181頁)

1. 一次方程之解
2. 行列式
3. 非聯立方程
4. 多元一次聯立方程
5. 消元法
6. 第三級行列式
7. 行列式之展開
8. 行列式解法
9. 應用問題

新中學教科書

初級混合數學

第三學年上

第壹章

幾何初步

今將上學年所習幾何方面材料,提選綱要,編次於此,以資溫習而備引證. 以幾何步伐之整嚴,溫故知新,專賴此章.

§ **1.** 點——直線——距離. 點(Point)與直線(Straight line),爲幾何中之基本名詞,無容解釋. 二點間有一種相互關係,曰距離(Distance),一直線與一點之關係曰某點在某直線上,或曰某直線過某點,(二語之意義相同)此二者亦爲基本之關係.

點之記號常用英文大字母A, B, C,........

A, B二點間之距離常用AB代之.

以上二基本名詞與二基本關係適合於下列之各公理:——

公理一. 過二點之直線必有一焉,且惟有一焉.

據此,則每一直線可以其上二點定之. 故通常取一直線

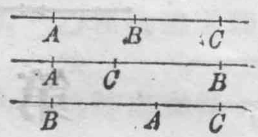
上二點之名以名該直線. 如一直線上如有 A, B 二點,則該直線可名之曰AB直綫. 又此公理往往爲作圖之便利而述之曰「過二點可作一直線且祇可作一直線」,此稱爲**直尺公理**.

公理二. 若A, B, C 三點在一直線上,則

$AB+BC=AC$

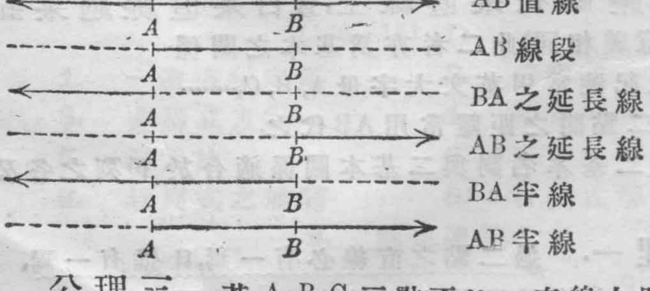
或 $AC+CB=AB$

或 $BA+AC=BC$

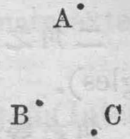


三者必居其一且祇居其一.

定義. 設A, B 爲二點,則AB直線之點,有成 $AX+XB=AB$ 者,爲在AB之間, AB **線段**卽合此等點而成者也;有成 $YA+AB=YB$ 者,爲與B在A之異側, **BA之延長線**卽合此等點而成者也;有成 $AB+BZ=AZ$者,爲與A在B之異側, **AB之延長線**卽合此等點而成者也. AB線段合BA之延長線爲**BA半線**. AB線段合AB之延長線爲**AB半線**. A, B二點爲AB線段之**兩端**, A點爲AB半線之**端點**.



公理三. 若 A, B, C 三點不在一直線上,則



AB+BC>AC,

且 AC+CB>AB,

且 AB+AC>BC.

§2. 長. A, B 二點之距離,亦有時稱為 AB 綫段之長(Length).

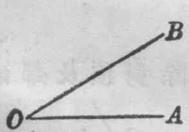
§3. 平面. 平面(Plane)一名,吾人不欲加以界說,但舉其重要性質如下:——

公理四. 過三點,必有一平面焉,且僅有一平面焉.

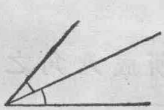
公理五. 一直線上若有二點在一平面上,則該直線完全在此平面上.

公理六. 二平面若有一公共點則必另有別一公共點.

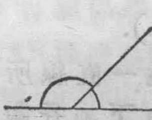
§4. 角. 二半綫共一端點者合成一角(Angle),以二半線為其邊(sides),以公共端點為其頂點(Vertex).如 OA 與 OB 二半線成一角,曰 ∠AOB 或 ∠BOA, OA 及 OB 為其邊, O 為其頂點.



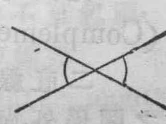
(角)



(鄰角)



(鄰補角)



(對頂角)

二角共頂,共一邊,且餘二邊分居於公共邊之兩側者,互稱為鄰角(Adjacent angles).

二鄰角之外邊成一直線者互稱為鄰補角(Adjacent supplememt).

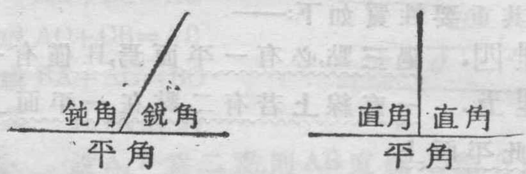
二角之邊成二直線者互稱爲**對頂角**(Opposite angles).

角之等於其鄰補角者曰**直角**(Right angle).

角之小於其鄰補角者曰**銳角**(Acute angle).

角之大於其鄰補角者曰**鈍角**(Obtuse angle).

角之二邊成一直線者曰**平角**(Straight angle).



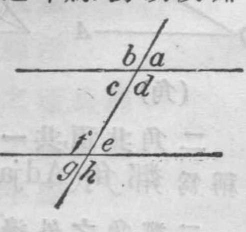
二直線相交成直角者曰互相**垂直**(Perpendicular).

二相鄰銳角之外邊互相垂直者互爲**鄰餘角**(Adjacent complement).

此角等於彼角之鄰補角者,彼此二角互爲**補角**(Supplement).

此角等於彼角之鄰餘角者,彼此二角互爲**餘角**(Complement).

二直線爲一直線所割,所成八角之中,除對頂及鄰補之關係外,尚有下列各關係:——



1. a 與 e, b 與 f, c 與 g, d 與 h, 互爲**同位角**(Exterior-interior angles).

2. c 與 e, d 與 f 互爲**內錯角**(Alternate-interior angles).

3. a 與 g, b 與 h 互爲外錯角(Alternate-exterior angles).

4. c 與 f, d 與 e 互爲割線同側內角(Interior angles on the same side of the transversal).

5. a 與 h, b 與 g 互爲割線同側外角(Exterior angles on the same side of the transversal).

§ 5. 全等形.

定義. 點之集合謂之形(Figure),如線段,半線,直線,角,平面等皆形也.

定義. 設有[X]與[Y]二形:(1)每於[X]中任取一點 X_1,則[Y]中必有一對應點 Y_1,(2)每於[Y]中任取一點 Y_2,則[X]中必有一對應點 X_2,(3)每逢X與Y對應,X_2與Y_2對應,則 $X_1X_2=Y_1Y_2$,如此二形吾人稱之爲互相全等(Congruent),而寫作

$$[X]\cong[Y].$$

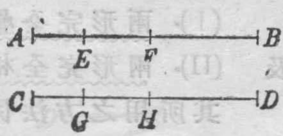
由此義觀之可見全等形相等二點之距離相等.

下列二公理於全等問題甚有關係,學者不可忽視.

公理七. 若 AB=CD,則AB線段≅CD線段.

此可稱爲等線段公理(Axiom for congruent segments).

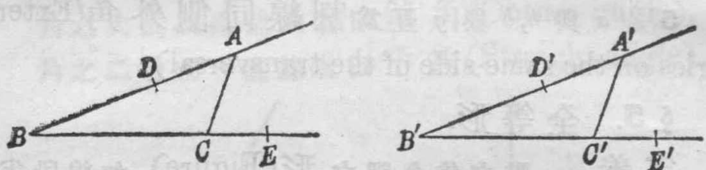
其意蓋謂:設AB上有一點E,CD上有一點G,若AE=CG,則EB=GD;又設EB上有一點F,GD上有一點H,若EF=GH,則FB=HD;推而廣之,舉凡對應點之距離莫不相等.



公理八. 若 AB=A′B′, AC=A′C′, BC=B′C′,則

$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

此可稱爲等角公理(Axiom for c n uent an les).其意蓋謂:設於BA半綫上取一點D,B'A'半線上取一點D',BC半線上取一點E,B'C'半線上取一點E,



則 DC=D'C', AE=A'E', DE=D'E',舉凡對應點之距離莫不相等也.

以後爲簡便起見,全等線段僅言相等,以＝號表之,全等角亦僅言其相等,亦以＝號表之,但此外別種形之全等仍曰全等,仍以≌表之.

由全等形之定義可知

定理一. 若兩形全等,則相當之線段相等,相當之角相等.

§ 6. 全等之實驗法.

二形是否全等之問題,往往用疊合法 (Superposition) 以實驗之. 其所根據之理由僅在:

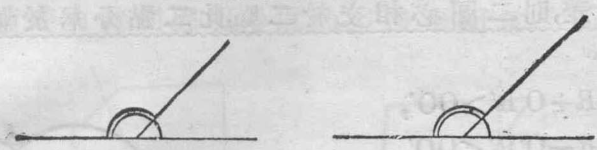
(I). 兩形完全疊合者卽完全相等

及 (II). 兩形完全相等者可使之完全疊合.

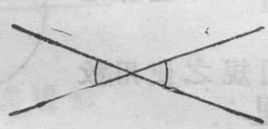
其所用之方法係:先用(I)由相等以推及疊合後用(II)由疊合以推及相等. 蓋定理之題設僅言及相等,故推證時須從相等出發;定理之題斷僅言及相等,故推證之結論仍須歸於相等也.

§7. 相等之角.

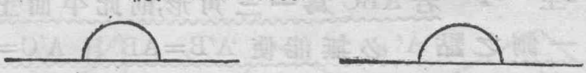
定理一. 相等二角之鄰補角相等.



定理二. 二對頂角相等.



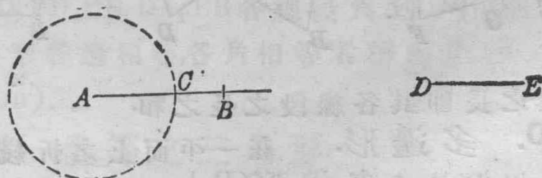
定理三. 二平角相等.



§8. 圓. 設O與X_0為α平面上二點,所有α上之點X,其與O之距離$OX=OX_0$者,共同成一圓(Circle),O為圓心(Centre),每一線段OX各為半徑(Radius),兩半徑共一直線者合為一直徑(Diameter).

下列二公理與作圖甚有關係:

公理九. AB半線上必有一點C,其與A之距離等於一指定綫段DE.



此猶云「發自圓心之半線(同平面)必與圓相交」也. 故附

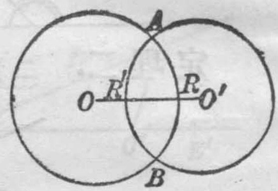
諸圓.

公理十. 二圓圓心之距離若小於二半徑之和而大於其差,則二圓必相交於二點,此二點分居於聯心線之兩側.

如圖, $OR+O'R'>OO'$,

$OR-O'R'<OO'$,

兩圓交於 A, B 二點,在 OO' 直線之兩側.



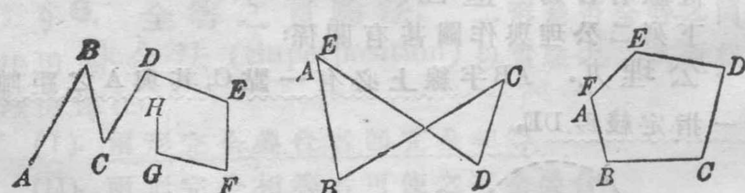
此二公理便於圓規之使用,故可名之曰圓規公理.

由此可以推知:——

定理一. 若 ABC 為一三角形,則此平面上與 A 同在 BC 之一側之點 A′ 必無能使 $A'B=AB$ 且 $A'C=AC$ 者.

定理二. 一平面上,某半線之一側,以該半線為邊,不能作相等之二角.

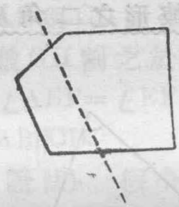
§ 9. 折線. 設有 A, B, C,........G, H 諸點,聯 AB, BC, CD,....GH 各綫段成一折線(Broken line).



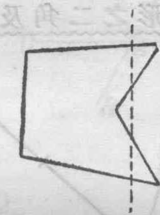
折線之長即其各線段之長之和.

§ 10. 多邊形. 在一平面上之折綫,首尾相重,但自身不相交者為多邊形(Polygon). 多邊形與任何

直線相交祇有二交點者曰**凸多邊形**(Convex polygon),否則爲**凹多邊形**(Concave polygon). 但通常僅稱「多邊形」時,苟非有特別聲明,乃指凸多邊形而言.

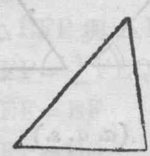


凸多邊形

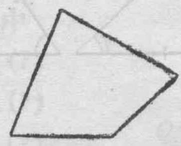


凹多邊形

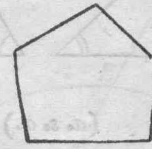
多邊形因邊數之多寡,有**三角形,四邊形,五邊形**,等名稱.



三角形



四邊形



五邊形

多邊形,如 ABCDE,以 A,B,C,D,E 等點爲其**頂點**(Vertices),以 AB,BC,CD,DE,EA 等綫段爲其**邊**(Sides),以∠ABC ∠BCD, ∠CDE, ∠DEA, ∠EAB 爲其**內角**(Interior angles),或簡稱**角**,以各內角之鄰補角爲其**外角** (Exterior angles),以 AC, BD, CE, DA, EB 各線段爲**對角線**(Diagonals)

多邊形各邊相等,各角相等者稱爲**正多邊形**(Regular polygon).

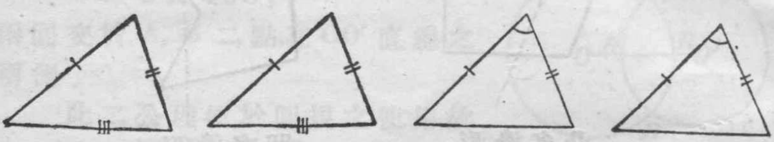
§11. 全等之三角形.

定理. 兩三角形具下列條件之一者必全等,

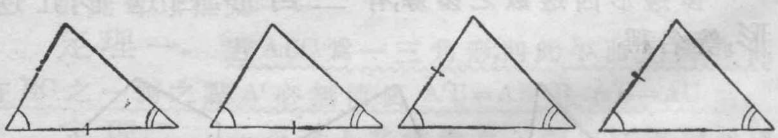
(i)　此形之三邊與彼形之三邊互等;(柒,§4)

(ii)　此形之二邊及夾角與彼形之二邊及夾角互等;(柒,§11)

(iii)　此形之二角及一邊與彼形之二角及一對應邊互等.(柒,§15)



(s. s. s.)　(s. a. s.)



(a. s. a.)　(a. a. s.)

§ **12**　平行線.　同平面二直線不相交者曰互相平行(Parallel).

定理.　一平面上二直線為一直線所割,若有下列條件之一,則二直線必平行,

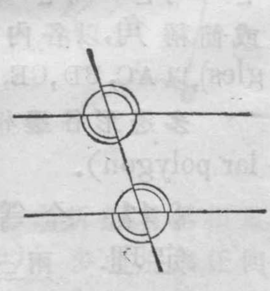
(i)　內錯角相等,

(ii)　外錯角相等,

(iii)　同位角相等,

(iv)　割線同旁兩內角互為補角,

(v)　割線同旁兩外角互為補角.



(三冊,陸章,§1)