运筹学

主　编　张文会　李昕光
副主编　王云龙　罗文文

YUNCHOUXUE

東北林業大學出版社

运　筹　学

主　编　　张文会　李昕光
副主编　　王云龙　罗文文

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学／张文会，李昕光主编．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2013.6
（东北林业大学优秀教材丛书）
ISBN 978－7－5674－0213－3

Ⅰ.①运…　Ⅱ.①张…②李…　Ⅲ.①运筹学－高等学校－教材　Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第139891号

责任编辑：卜彩虹　刘　晓
封面设计：刘长友
出版发行：东北林业大学出版社
（哈尔滨市香坊区哈平六道街6号　邮编：150040）
印　　装：哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：14
字　　数：249千字
版　　别：2013年6月第1版
版　　次：2013年6月第1次印刷
定　　价：27.00元

前 言

运筹学是一门以人机系统的组织、管理为对象，应用数学和计算机等工具来研究各类资源的合理规划、使用并提供优化决策方案的科学，是管理类、交通运输类本科生和研究生的专业基础课。

本书是以编者多年教学实践为基础，参照自编的讲义以及相关教材编写而成，编写过程中力求各章节内容间的有机联系，理顺和整合部分内容，构成符合教学大纲的理论体系和知识结构。每章末均编写了适当数量的习题，以便于学生课后复习，巩固所学知识，有的习题还对正文的教学内容作了适当的引申。

本书共分8章，包括线性规划、对偶理论、整数规划、目标规划、运输问题、动态规划、网络模型和排队论，建议授课48学时。

本书由张文会、李昕光任主编，王云龙、罗文文任副主编。具体分工如下：第一章、第二章由张文会（东北林业大学）编写，第三章、第四章由罗文文（东北林业大学研究生）编写，第五章、第六章由王云龙（黑龙江工程学院）编写，第七章、第八章由李昕光（东北林业大学）编写。研究生罗文文参与了本书的统稿工作，最后由张文会、李昕光定稿。

本书得到了东北林业大学2012年优秀教材及学术著作出版基金以及黑龙江省教育科学“十二五”规划青年专项课题：基于CDIO理念的交通运筹学教学改革研究（GBD1211006）的资助，在此表示感谢。本书编写过程中参考了大量的国内外文献，在此向所引文献的作者表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中难免存在疏漏谬误和不尽如人意之处，恳请广大读者批评指正。

编 者

2012年10月10日

目　　录

1　线性规划

1.1　线性规划及其数学模型

1.1.1　线性规划

线性规划是合理利用、调配资源的一种应用数学方法。它的基本思路就是在满足一定的约束条件下,使预定的目标达到最优。它的研究内容可归纳为两个方面:一是系统的任务已定,如何合理筹划,精细安排,用最少的资源(人力、物力和财力)去实现这个任务;二是资源的数量已定,如何合理利用、调配,使任务完成得最多。前者是求极小值,后者是求极大值。线性规划是在满足企业内、外部的条件下,实现管理目标和极值(极小值和极大值)问题,就是要以尽少的资源输入来实现更多社会需要产品的产出。因此,线性规划是辅助企业"转轨""变型"的十分有利的工具,它在辅助企业经营决策、计划优化等方面具有重要的作用。

线性规划是运筹学的一个重要分支。它发展较早,理论上比较成熟,应用较广。20 世纪 30 年代,线性规划从运输问题的研究开始,在军事领域中得到广泛应用和发展。现在已推广并应用于国民经济的综合平衡、生产力的合理布局、最优计划与合理调度等问题,并取得了比较显著的经济效益。线性规划的广泛应用,除了它本身具有实用的特点之外,还由于线性规划模型的结构简单,比较容易被一般未具备高深数学基础,但熟悉业务的经营管理人员所掌握。它的解题方法,简单的可用手算,复杂的可借助于电子计算机的专用软件包,输入数据就能算出结果。

我国于 20 世纪 50 年代初期开始线性规划的研究与应用工作,中国科学院数学所建立了运筹室,最早应用在物资调运方面,在实践中取得了一定的成果,在理论上得到了论证。目前,国内高等学校已将其列为运筹学中必选的课程内容之一,在实际应用方面也已列入重点企业试点和研究项目之一。

1.1.2　数学模型

线性规划的数学模型由决策变量、目标函数与约束条件三个要素构成,其

特征是：

(1)解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，求最大值或最小值；

(2)解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

从实际问题中建立数学模型一般有以下三个步骤：

(1)根据影响所要达到目的的因素找到决策变量；

(2)由决策变量和所在达到目的之间的函数关系确定目标函数；

(3)由决策变量所受的限制条件确定决策变量所要满足的约束条件。

当得到的数学模型的目标函数为线性函数，约束条件为线性等式或不等式时，称此数学模型为线性规划模型。

【例 1.1】 生产计划问题。某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品，这些产品需要在设备 A 上加工，需要消耗材料 B，C。按工艺资料规定，生产单位产品所需的设备台时及 B，C 两种原材料的消耗如表 1－1 所示。已知在计划期内设备的加工能力为 150 台时，可供材料分别为 300 kg，320 kg；每生产一件甲、乙产品，工厂可获得利润分别为 50 元、40 元。假定市场需求无限制，工厂决策者应如何安排生产计划，使工厂在计划期内总的利润最大。

表 1－1

消耗＼产品	甲	乙	现有资源
设备 A	4	3	150
材料 B	7	5	300
材料 C	5	6	320
利润/(元/件)	50	40	

解 这样一个规划问题可用数学语言来描述，即可以用数学模型表示。

假设在计划期内生产这两种产品的产量为待定的未知数 x_1, x_2, x_3，称为决策变量。产品生产得越多，获利就越多，但产量要受到设备和生产能力的限制，这种能力的限制就是约束条件。计划期内设备 A 的有效台时是 150，这是一个限制产量的条件，在安排产品甲、乙产量时，要考虑不得超过设备 A 的有效台时，这个条件可用不等式 $4x_1 + 3x_2 \leqslant 150$ 来表示；材料消耗总量不得超过供应量，应有 $7x_1 + 5x_2 \leqslant 300$，$5x_1 + 6x_2 \leqslant 320$。生产的产量不能小于零，即 $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$，这个条件称为决策变量的非负要求。用 Z 表示利润，则有 $Z = 50x_1 + 40x_2$，这个式子就是目标函数。该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下使利润达到最大，即目标函数达到最大值，用数学表达式描述为

$\max Z = 50x_1 + 40x_2$。综合上述，这个问题的数学模型可归纳为：

$$\max Z = 50x_1 + 40x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leqslant 150 \\ 7x_1 + 5x_2 \leqslant 300 \\ 5x_1 + 6x_2 \leqslant 320 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

在上面的例题中 x_j 称为决策变量，不等式组称为约束条件，函数 Z 称为目标函数。随着讨论问题的要求不同，Z 可以是求最大值（如例 1.1）也可以是求最小值（如例 1.3），因为 Z 是 x_j 的线性函数，Z 的最大值亦是极大值，最小值亦是极小值，所以有时也将 $\max Z$ 与 $\min Z$ 说成求 Z 的极大值与极小值。

由例 1.1 知，一个生产计划问题可用线性规划模型来描述。若求出 x_1，x_2，x_3 的值，即最优解，使目标函数达到最大值，就得到一种最优生产计划方案。

【例 1.2】 投资问题。某投资公司在第一年有 300 万元资金，每年都有如下的投资方案可供考虑采纳："假设第一年投入一笔资金，第二年又继续投入此资金的 50%，那么到第三年就可回收第一年投入资金的一倍金额。"投资公司决定最优的投资策略使第五年所掌握的资金最多。

解 设 x_1：第一年的投资 x_2：第一年的预留资金

x_3：第二年的投资 x_4：第二年的预留资金

x_5：第三年的投资 x_6：第三年的预留资金

x_7：第四年的预留资金

第四年不再进行新的投资，因为这笔投资要到第六年才能回收。约束条件保证每年满足如下关系：追加投资金额 + 新投资金额 + 预留资金 = 可利用的资金总额。

第一年：$x_1 + x_2 = 300$（万元）

第二年：$\left(\dfrac{x_1}{2} + x_3\right) + x_4 = x_2$

第三年：$\left(\dfrac{x_3}{2} + x_5\right) + x_6 = x_4 + 2x_1$

第四年：$\dfrac{x_5}{2} + x_7 = x_6 + 2x_3$

到第五年实有资金总额 $x_7 + 2x_5$，整理后得到下列线性规划模型：

$$\max Z = 2x_5 + x_7$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 300 \\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\
4x_1 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 0 \\
4x_3 - x_5 + 2x_6 - 2x_7 = 0 \\
x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,7
\end{cases}
$$

【例 1.3】 环保问题。靠近某河流有两个化工厂(见图 1-1),流经第一个化工厂的河流流量为 400 万 m^3/d,在两个工厂之间有一条流量为 200 万 m^3/d 的支流。第一化工厂每天排放含有浓 H_2SO_4 的工业污水 2.5 万 m^3,第二化工厂每天排放这种工业污水 1.6 万 m^3。已知从第一化工厂排出的工业污水流到第二化工厂以前有 25% 可自然净化。根据环保要求,河流中工业污水的含量应不大于 0.2%。因此,这两个工厂都需各自处理一部分工业污水。第一化工厂处理工业污水的成本是 1 000 元/万 m^3,第二化工厂处理工业污水的成本是 800 元/万 m^3。问在满足环保要求的条件下,每厂各应处理多少工业污水,使得这两个工厂总的处理工业污水费用最小。

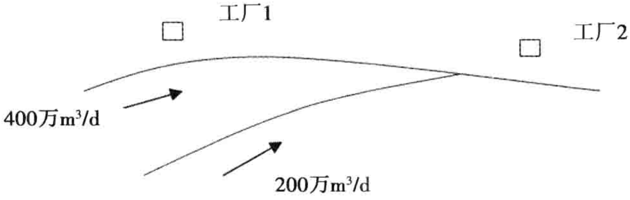

图 1-1

解 设 x_1, x_2 分别为第一个和第二个化工厂每天应处理工业污水的量。

根据河流中工业污水的含量应不大于 0.2% 的要求,可建立以下不等式:

$$(2.5 - x_1)/400 \leqslant 2/1\,000$$

$$[0.75 \times (2.5 - x_1) + (1.6 - x_2)]/600 \leqslant 2/1\,000$$

由于每个工厂每天处理的工业污水量不会大于每天的排放量,故有:

$$x_1 \leqslant 2.5, \quad x_2 \leqslant 1.6$$

经整理,得到下列线性规划模型:

$$\min Z = 1\,000x_1 + 800x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 1.7 \\ 0.75x_1 + x_2 \geqslant 2.275 \\ x_1 \leqslant 2.5 \\ x_2 \leqslant 1.6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 1.4】 合理用料问题。某汽车需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根，这些轴的规格分别为 1.5 m，1 m，0.7 m，这些轴需要用同一种圆钢来做，圆钢长度为 4 m。现在要制造 1 200 辆汽车，最少要用多少圆钢来生产这些轴？

解 这是一个条材下料问题。为了计算方便，这里假定切割的切口宽度为零，在实际应用中，应将切口宽度计算进去。求所用圆钢数量分两步计算，先求出在一根 4 m 长的圆钢上切割三种规格的毛坯共有多少种切割方案，再在这些方案中选择最优或次优方案，即建立线性规划数学模型。求下料方案时应注意：余料不能超过最短毛坯长度；为了不遗漏方案，最好将毛坯长度按降序排列，即先切割长度最长的毛坯，再切割次长的，最后切割最短的。

第一步：设一根圆钢切割成甲、乙、丙三种轴的根数分别为 y_1, y_2, y_3，则切割方式可表示为：

$$1.5y_1 + y_2 + 0.7y_3 \leqslant 4$$

求不等式关于 y_1, y_2, y_3 的非负整数解并且余料不超过 0.7m，如表 1－2 所示。

表 1－2

方案 规格/根	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
y_1	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1 200
y_2	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1 200
y_3	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1 200
余料/m	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

第二步：建立线性规划数学模型。设 $x_j (j = 1, 2, \cdots, 10)$ 为第 j 种下料方案所用圆钢的根数。则用料最少的数学模型为：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{10} x_j$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 \geqslant 1\,200 \\ x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9 \geqslant 1\,200 \\ x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10} \geqslant 1\,200 \\ x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,10 \end{cases}$$

在实际中,如果毛坯规格较多,则切割方案可能很多,甚至有几千个方案,此时用人工编排方案几乎是不可能的。解决这一问题可以编制一个计算机程序由计算机编排方案,给余料确定一个临界值μ,当某方案的余料大于μ时马上舍去该方案,从而减少占用计算机内存,也简化了后面的数学模型。

分析上述例题可知:线性规划是研究线性约束条件下线性目标函数的极大值或极小值问题的数学理论和方法;线性规划的数学模型由决策变量、目标函数与约束条件三个要素构成。则线性规划数学模型的一般表达式可写成为:

$$\max(\min)Z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

为了书写方便,上式也可写成:

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} \geqslant, =) b_i, i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$$

在实际中一般$x_j \geqslant 0$,但有时候$x_j \leqslant 0$或x_j无符号限制。

在线性规划的数学模型中,c_j一般称为价值系数,a_{ij}称为工艺系数,b_j称为资源限量。

1.2 图解法

图解法是直接在平面直角坐标系中作图来解线性规划问题的一种方法。这种方法简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理,但它不是解线性规划问题的主要方法,只适合于求解两个变量的线性规划问题。

图解法的步骤：

(1)可行域的确定。分别求出满足每个约束条件(包括变量非负要求)的区域,其交集就是可行解集合,称为可行域。

(2)绘制目标函数等值线。先过原点作一条矢量指向点(c_1, c_2),矢量的方向就是目标函数增加的方向,称为梯度方向,再作一条与矢量垂直的直线,这条直线就是目标函数等值线。

(3)求最优解。依据目标函数求最大或最小值来移动目标函数等值线,该直线与可行域边界相交的点对应的坐标就是最优解。一般地,求最大值时该直线沿着矢量方向移动,求最小值时该直线沿着矢量的反方向移动。

【例 1.5】 用图解法求解下列线性规划问题：

$$\max Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 (1)确定可行域。令三个约束条件为等式,得到三条直线,在第一象限画出满足三个不等式的区域,其交集就是可行域。

(2)绘制目标函数等值线。将目标函数的系数组成一个坐标点(1,1),过原点 O 作一条矢量指向点(1,1),矢量长度不限,矢量的斜率保持1:1,再作一条与矢量垂直的直线,这条直线就是目标函数等值线,该直线的位置任意,如果其通过原点,则目标函数值 $Z=0$,如图 1-2 所示。

(3)求最优解。图 1-2 的矢量方向是目标函数增加的方向或称为梯度方向,在求最大值时目标函数等值线沿着梯度方向平行移动(求最小值时将目标函数等值线沿着梯度方向的反方向平行移动),直到可行域的边界停止移动,其交点对应的坐标就是最优解。如图 1-2 所示,最优解 $X=\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$,目标函数的最大值 $Z=\frac{40}{3}$。

上例中求解得到问题的最优解是唯一的,但对于一般线性规划问题,求解结果还可能出现以下几种情况：

(1)多重最优解(无穷多最优解)

【例 1.6】 将例 1.5 的目标函数改为 $\max Z = 4x_1 + 2x_2$,约束条件不变,则表示目标函数中以参数 Z 的这组平行直线与约束条件 $2x_1 + x_2 \leqslant 20$ 的边界线平行。平行移动目标函数直线与可行域相交于线段 AB,则线段 AB 上任意点都是最优解。如图 1-3 所示,即最优解不唯一,有无穷多个,称为多重解。最

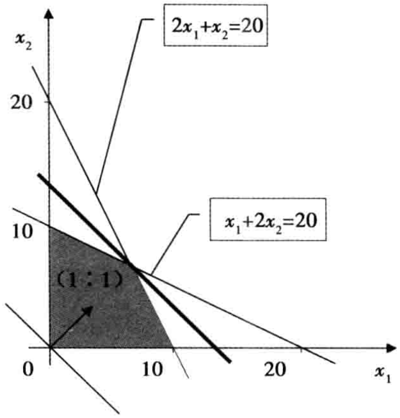

图 1－2

优解的通解可表示为 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。

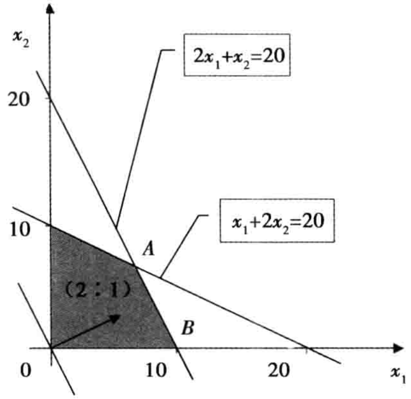

图 1－3

(2)无界解

【例 1.7】 将例 1.5 的约束条件改为 $\begin{cases}x_1+2x_2\geqslant20\\2x_1+x_2\geqslant20\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$，目标函数不变，则可行域如图 1－4 所示，目标函数增加的方向与例 1.5 相同，A 点是最小值点，要达到最大值，目标函数值可在可行域中沿梯度方向继续平移直到无穷远，x_1，x_2 及 Z 都趋于无穷大(无上界)，这种情形称为无界解，也即为无最优解。

(3)无可行解

在例 1.5 的数学模型中增加一个约束条件 $x_1+x_2\leqslant30$，则该问题的可行

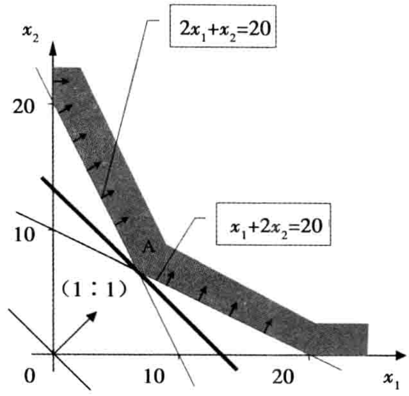

图 1－4

域为空集,如图 1－5 所示,即无可行解,因此该问题也就不存在最优解。

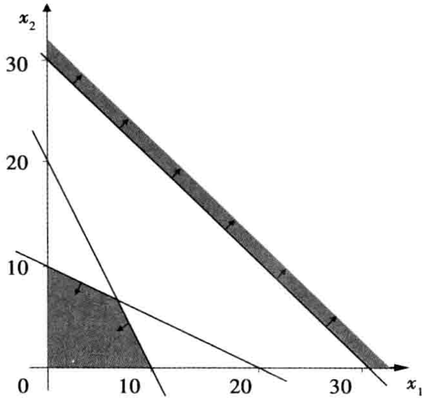

图 1－5

通过以上例题分析,可将图解法得出线性规划问题解的几种情况归纳为如表 1－3 所示。

表 1－3

解的几种情况	约束条件图形特点	数学模型特点
唯一最优解	可行域有界,且只在一个顶点得到最优值	
多重最优解	在可行域的边界上,至少在两个顶点处得到最优值	目标函数和某一约束条件的系数成比例
无可行解(无解)	可行域为空集	有矛盾的约束条件
无界解(无解)	可行域无界,且无有限最优值	缺乏必要的约束条件

1.3 线性规划的单纯形法

1.3.1 线性规划的标准型

线性规划问题有各种不同的形式:目标函数可为最小值,也可为最大值;约束条件可以是线性方程组,也可以是线性不等式组;决策变量通常是非负约束,但也允许在$(-\infty,\infty)$范围内取值,即无约束。在用单纯形法求解线性规划问题时,为了讨论问题方便,需将线性规划模型化为统一的标准形式。

线性规划问题的标准型为:

(1)目标函数求最大值(也可以求最小值);

(2)约束条件均为等式方程;

(3)变量 x_j 为非负;

(4)常数 b_i 都大于或等于零。

标准型的数学模型可表示为:

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n; b_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

或写成下列形式:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n; b_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

或用矩阵形式:

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0, b \geqslant 0 \end{cases}$$

其中:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix};\quad C=[c_1 \quad c_2 \quad \cdots c_n]$$

A——约束方程的 $m\times n$ 维系数矩阵，一般 $m\leqslant n$，且 A 的秩为 m，记为 $r(A)=m$；

b——资源向量；

C——价值向量；

X——决策变量向量。

实际问题提出的线性规划问题的数学模型都应变换为标准型后求解。

以下讨论如何变换为标准型的问题。

(1)若要求目标函数实现最小化，即 $\min Z=CX$，这时只需将目标函数最小化变换为目标函数最大化，即令 $Z'=-Z$，于是得到 $\max Z'=-CX$。

(2)若约束方程为不等式，这里有两种情况：一种是约束方程为"≤"不等式，则可在不等式的左端加入非负松弛变量，把原不等式变为等式；另一种是约束方程为"≥"不等式，则可在不等式的左端减去一个非负剩余变量(也称松弛变量)，把原不等式变为等式。

(3)若变量不满足"$x_j\geqslant 0$"。这里也有两种情况：一种是 $x_j\leqslant 0$，可令 $x'_j=-x_j$，用 x'_j 代替 x_j；另一种是 x_j 无约束，可令 $x_j=x'_j-x''_j$，用 $x'_j-x''_j$ 代替 x_j，其中 $x'_j\geqslant 0, x''_j\geqslant 0$。

(4)若 $b_j\leqslant 0$，这时只需将约束方程两边同时乘以 -1。

【例 1.8】 将下述线性规划问题化为标准型。

$$\min Z=-x_1+2x_2-3x_3$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leqslant 7 \\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2 \\ -3x_1+x_2+2x_3=5 \\ x_1,x_2\geqslant 0, x_3 \text{ 为无约束} \end{cases}$$

解 (1)用 x_4-x_5 替换 x_3，其中 $x_4,x_5\geqslant 0$；

(2)在第一个约束不等式≤号的左端加入松弛变量 x_6；

(3)在第二个约束不等式≥号的左端减去剩余变量 x_7；

(4)令 $Z'=-Z$，把求 $\min Z$ 改为求 $\max Z'$。得到该问题的标准型为：

$$\max Z'=x_1-2x_2+3(x_4-x_5)+0x_6+0x_7$$