

舒
析
以
何
字

新學制高級中學教科書

解析幾何學

段子雙編

商務印書館發行



民國二十一年一月二十九日
敝公司突遭國難總務處印刷
所編譯所書棧房均被炸燬附
設之涵芬樓東方圖書館尙公
小學亦遭殃及盡付焚如三十
五載之經營隳於一旦迭蒙
各界慰問督望速圖恢復詞意
懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
困不敢不勉爲其難因將學校
需用各書先行覆印其他各書
亦將次第出版惟是圖版裝製
不能盡如原式事勢所限想荷
鑒原謹布下忱統祈垂鑒

上海商務印書館謹啓

版 權 所 有 翻 印 必 究

中華民國十七年六月初版
民國二十一年六月
民國二十一年六月
民國二十一年六月
國難後第一版
國難後第一版
國難後第一版
國難後第三版

(一一二三)

新學制高級
中學教科書
解析幾何學

每冊定價大洋陸角

(外埠酌加運費匯費)

編纂者 段子燮

發行所 上海商務印書館

發行所 上海商務印書館

目次

第一章 坐標(*Coördinates.*).....1

1. 坐標軸, 2. 正坐標制, 3. 坐標之方向, 4. 坐標之數值.

第二章 點(*Point.*)6

1. 點之坐標及位置之決定, 2. 描點, 3. 點與點間之距離, 4. 二點聯線間分點之坐標, 5. 幾何上之應用.

第三章 軌跡與方程式(*Loci and equations.*)....21

1. 緒論, 2. 例題, 3. 普通作圖法, 4. 作圖簡法, 5. 截距, 6. 對稱, 7. 間隔, 8. 幾近線, 9. 例題.

第四章 直線(*Straight lines.*).....37

1. 直線線坡, 2. 求一直線之線坡, 3. 由線坡求二直線之交角, 4. 直線之普通式, 5. 二點式, 6. 點坡式, 7. 線坡式, 8. 截距式, 9. 法線式, 10. 公式之變換, 11. 普通式與線坡式之變換, 12. 普通式與點坡式之變換, 13. 普通式與二點式之變換, 14. 普通式與截距式之變換, 15. 普通式與法線式之變換, 16. 由已知之

直線式求其他之直線式，17. 線與線及線與點間之距離，18. 幾何學上之應用例題，19. 結論。

第五章 圓(*Circle*).....73

1. 定義，2. 圓方程式，3. 普通一般圓方程式，4. 上式之討論，5. 圓方程式之所呈形，6. 圓方程式中之常數，7. 例題，8. 切線之法線，9. 圓切線方程式，10. 圓法線方程式，11. 求圓切線法線之例題。

第六章 圓錐曲線(*Conic sections*).....84

1. 定義，2. 圓錐曲線之由來，3. 各項名辭，4. 曲線之斜坡，5. 圓錐曲線之分類。

第七章 拋物線(*Parabola*).....87

1. 定義，2. 基本方程式，3. 拋物線之焦點及準線之位置，4. 拋物線之作圖法，5. 普通一般之拋物線方程式，6. 拋物線之切線方程式，7. 拋物線之法線方程式，8. 次切線與次法線，9. 切線長與法線長，10. 拋物線之特性。

第八章 橢圓(*Ellipse*).....103

1. 定義，2. 關於橢圓之各項名辭，3. 橢圓心至準線之垂距，4. 橢圓心至焦點之距離，5. 基本方程式，6.

橢圓之又一定義, 7. 普通一般之橢圓方程式, 8. 橢圓方程式之概論, 9. 橢圓之線坡, 10. 切線方程式, 11. 法線方程式, 12. 切線法線在 X, Y 軸之截距, 13. 次切線及次法線, 14. 橢圓之特性.

第九章 雙曲線(*Hyperbola.*)122

1. 定義, 2. 關於雙曲線之各項名辭, 3. 雙曲線心至準線之垂距, 4. 雙曲線心至焦點之距離, 5. 基本方程式, 6. 共軛雙曲線, 7. 等邊雙曲線, 8. 雙曲線之又一定義, 9. 普通一般之雙曲線方程式, 10. 雙曲線方程式之概論, 11. 切線方程式, 12. 法線方程式, 13. 切線法線在 X, Y 軸上之截距, 14. 雙曲線之特性, 15. 圓錐曲線之機械作圖法.

第十章 坐標之變形 (*Transformation of coordinates.*)138

1. 坐標軸之移動, 2. 移軸方程式, 3. 轉軸方程式, 4. 坐標軸轉移之總式, 5. 應用.

新學制高中教科書

解析幾何學

緒論

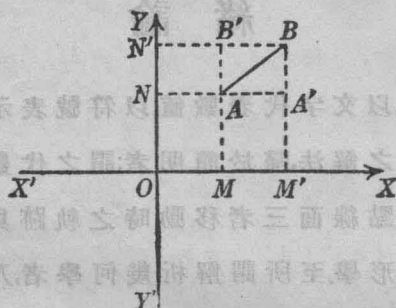
於數學中，以文字代表數值，以符號表示運算之方略，使各種問題之解法，歸於簡明者，謂之代數學。處理圖形之位置形狀，點線面三者移動時之軌跡與關係者，謂之幾何學，或稱形學。至所謂解析幾何學者，乃綜合二者之學，以代數之方程，處理點線面固定之位置形狀及移動之跡象者也。

第一章

坐標 Coordinates

§1. 坐軸標 axes of coordinates 於平面上，任意一點之移動，其方向不外乎前後左右。如圖一，若 A 點移動至 B 點，其行動之方向：可作為先自 A 向右移動至 A' ，復自 A' 向前移動至 B ；或先自 A 向前移動至 B' ，復自 B'

向右移動至 B , 故其行動之方向, 仍歸於前後左右, 是以於一平面上, 設依前後左右之方向作二定直線; 則任意一點之位置, 即可以其與二軸之平行距離定之, 此平行距離名曰坐標, 二定線謂之二坐標軸, 二軸之交點謂之原點 *origin*.



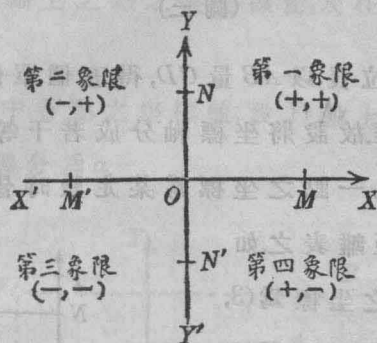
(圖一)

§2. 正坐標制 rectangular coordinates 普通

常以互為正交之二直線為軸, 是為正坐標制, 如圖一之 XX' , YY' 是也. 其橫軸稱為 X 軸, 縱軸稱為 Y 軸, O 即為其原點. A 點與二軸之平行距離為 AN 與 AM , 即等於 OM 與 ON ; 故 A 點之坐標為 OM 與 ON , 以 (OM, ON) 表之. 常稱 OM 為橫坐標; 或 x ; ON 為縱坐標, 或 y ; 即 $(x, y) = (OM, ON)$. 同樣: B 點之坐標為 $(x, y) = (OM', ON')$.

正坐標或稱卡氏坐標 *Cartesian coordinates*, 因此種坐標制, 首涉及之者為笛卡兒 *Descartes* 氏故也.

§ 3. 坐標之方向 在平面上,設取一線向某方進行之方向爲正,則其反對方向爲負,其指向常以字母之先後表之,如定 $\xrightarrow{A} B$ AB 爲正,則 BA 爲負;即 $AB = -BA$, 及 $BA = -AB$. 通常以向右向上進行者爲正,而以向左向下進行者爲負;如圖二: OM, ON , 爲正, 而 OM', ON' 爲負也。

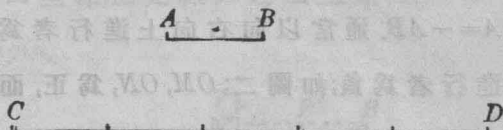


(圖二)

任一平面,正坐標恆分之成四部,其每小部分名曰象限 *quadrant*; 常以在二軸正向間者爲第一象限,更依時鐘指針轉動之反向,依次定爲第二第三第四象限;如圖二之 $XOY, YOX', X'OY', Y'OX$ 即爲第一第二第三第四象限. 各點之坐標:在第一象限內, x, y 皆爲正;在第二象限內, x 爲負,而 y 爲正;在第三象限內, x, y 皆爲負;在第四象限內,則 x 爲正,而 y 爲負。

§4. 坐標之數值

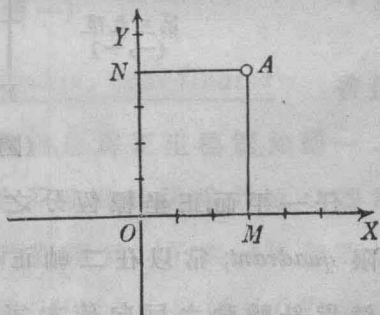
任何數值,皆可以線段表之,祇須先取一定長之線段,爲一單位;於是於另一直線上,取其一段,使等於某單位數,則此線段即表某數,如圖三:



(圖三)

取 AB 爲一單位長,以 AB 量 CD ,得五個單位長, CD 即等於五,餘可類推.故設將坐標軸分成若干等分,使每分爲一單位長;則凡一點之坐標爲某定數時,皆可以其點與軸之某單位距離表之.如

圖四:設 A 點之坐標爲 $(3, 4)$; 作此點時,僅須於 X 軸正向取 3 單位,如 OM ; 於 Y 軸正向取 4 單位,如 ON ; 過 M, N 各作平行於他軸之直線,則其交點之坐標,即爲 $(3, 4)$ 矣.



(圖四)

習題一

1. 設一點在 Y 軸之右三單位距離處,問此點之橫

坐標為何者？

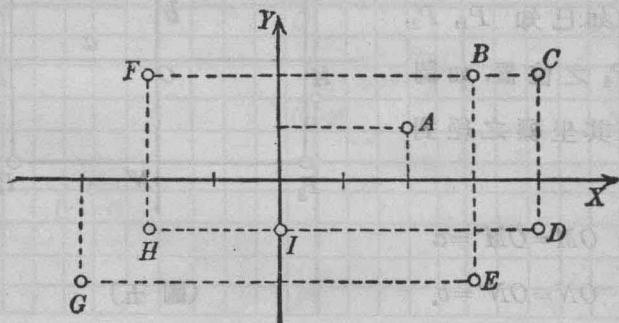
2. 設一點在 X 軸之上 b 單位距離處，問此點之縱坐標為何者？又設在 X 軸之下 b 單位距離處則如何？

3. 原點之坐標為何者？

4. 設某點之 (a) 橫坐標為正；(b) 橫坐標為負；(c) 縱坐標為正；(d) 縱坐標為負；問各點之位置？

5. 問在 X 軸上之點之縱坐標值，及在 Y 軸上之點之橫坐標值？

6. 書明圖中各點之坐標值；設 Y 軸上每一等分為 b ， X 軸上每一等分為 a 。



第二章

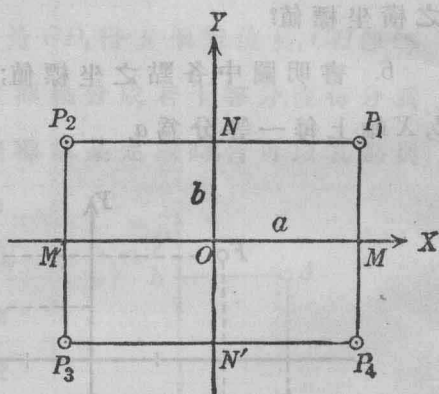
點 Points

§ 1. 點之坐標及位置之決定

設一點之位置已定，即可量其與二軸之距離，及其所在之象限，而定其坐標之值；反之，設

已知坐標之值，則其點之位置亦定；可如上章所述作之。

例如：已知 P_1, P_2, P_3, P_4 之位置，如圖五；則其坐標之絕對值爲



$$OM = OM' = a$$

$$ON = ON' = b.$$

(圖五)

設令 P_1, P_2, P_3, P_4 四點之坐標爲 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$

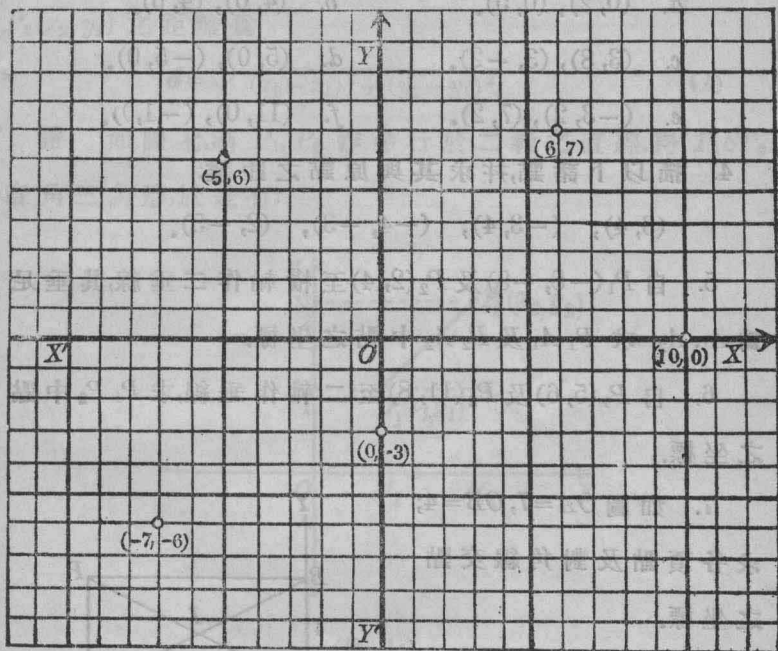
$$\text{即得 } P_1(x_1, y_1) \equiv (a, b), \quad P_2(x_2, y_2) \equiv (-a, b)$$

$$P_3(x_3, y_3) \equiv (-a, -b), \quad P_4(x_4, y_4) \equiv (a, -b),$$

反之，設已知四點之坐標，如上四組之值，則按前法定

各點之位置,即得 P_1, P_2, P_3, P_4 四點.

§2. 描點 Plotting a point 依坐標法決定一點之位置,謂之描點.描點時,以用細線方格紙 *square paper*, 即坐標紙 *coordinate paper*, 爲便而準確,如圖六.



(圖六)

習題二

1. 作二正交軸,以 $\frac{1}{2}$ 吋,即二分,爲單位;描下諸點:

(2, 1), (1, 2), (-1, 2), (-2, 1), (-2, -1), (-1, -2),

(1, -2), (2, -1).

2. 作二正交軸;以任意長度爲單位,描下諸點:

(1, 3), (3, 2), (3, -2), (4, -6), (6, 0), (0, -5)

3. 作下之諸點;并求其每雙點間之距離:

a. (0, 2), (0, 5).

b. (4, 0), (4, 6).

c. (3, 8), (3, -2).

d. (5, 0), (-5, 0).

e. (-3, 2), (7, 2).

f. (11, 0), (-1, 0).

4. 描以下諸點,并求其與原點之距離:

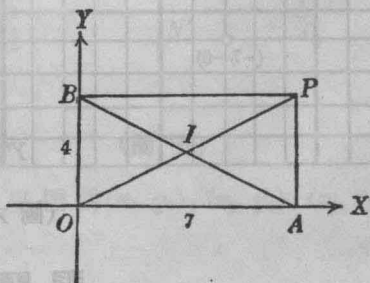
(3, 4), (-3, 4), (-4, -3), (2, -5).

5. 自 $P_1(-8, -8)$ 及 $P_2(2, 4)$ 至橫軸作二垂線,其垂足爲 A_1, A_2 ; 求 $P_1 A_1$ 及 $P_2 A_2$ 中點之坐標.

6. 自 $P_1(5, 6)$ 及 $P_2(11, 8)$ 至二軸作垂線,求 $P_1 P_2$ 中點之坐標.

7. 如圖 $OA=7, OB=4$;
求各頂點及對角線交點
之坐標.

8. 過 $A(6, 0), B(0, 8),$
 $O(0, 0)$ 三點作一圓, 求圓
心坐標,并圓半徑.



9. 一點 $P(x, y)$ 移動時其橫坐標恆等於縱坐標,即
 x 恆等於 y ; 求 P 點移動之途徑,并證明所得之結果

正確。

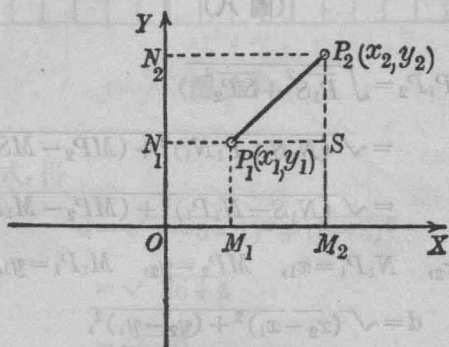
10. 作動點 P 之途徑, 設其縱坐標恆較橫坐標大一。

§ 3. 點與點間之距離

a. 基本公式 於正坐標制, 任意二點 $P_1(x_1, y_1)$, 及 $P_2(x_2, y_2)$ 之距離爲

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (I)$$

證 如圖七, 過 P_1, P_2 作平行於二軸之直線, 得 P_1SP_2 直角三角形; 於是有:



(圖七)

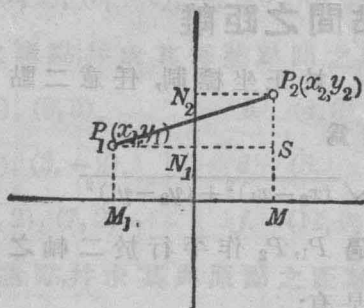
$$P_1S = M_1M_2 = x_2 - x_1$$

$$SP_2 = N_1N_2 = y_2 - y_1$$

$$P_1P_2 = \sqrt{P_1S^2 + SP_2^2}$$

故
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

b. 上式之討論 設 P_1P_2 不同在第一象限內，或皆在第一象限外，上之公式亦合理，因如圖八：



(圖八)

$$\begin{aligned}
 P_1P_2 &= \sqrt{P_1S^2 + SP_2^2} \\
 &= \sqrt{(N_1S + P_1N_1)^2 + (MP_2 - MS)^2} \\
 &= \sqrt{(N_1S - N_1P_1)^2 + (MP_2 - M_1P_1)^2}
 \end{aligned}$$

但 $N_1S = x_2$, $N_1P_1 = x_1$, $MP_2 = y_2$, $M_1P_1 = y_1$.

故 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

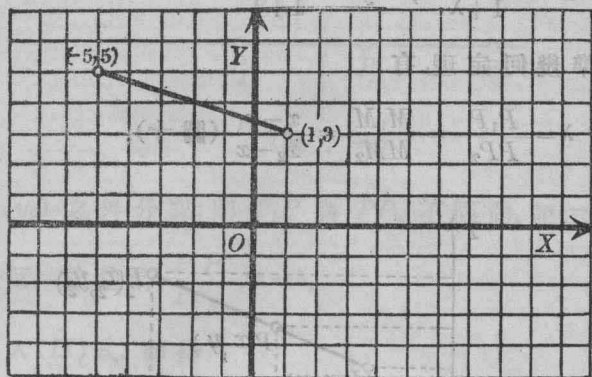
結果得式與上同；由此類推，可知上之公式於各種情形皆合。

c. 任意一點與原點之距離 按上(D)式，可令 P_1 為原點，有 $x_1 = y_1 = 0$ ；於是得所求之距離為

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

d. 例題 求 $(1, 3)$ 點與 $(-5, 5)$ 點間之距離。

解 如圖九令 $(1, 3)$ 爲 P_1 , $(-5, 5)$ 爲 P_2 , 於是得 $x_1=1$, $y_1=3$, $x_2=-5$, $y_2=5$;



(圖九)

代入 (I) 式, 得

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-5-1)^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{36+4} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

於此直可視作所求爲一直角三角形之斜邊, 此直角三角形之二邊爲 6 與 2 也。

§ 4. 二點聯線間分點之坐標

a. 內分點之坐標 設 $P(x, y)$ 爲 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 之