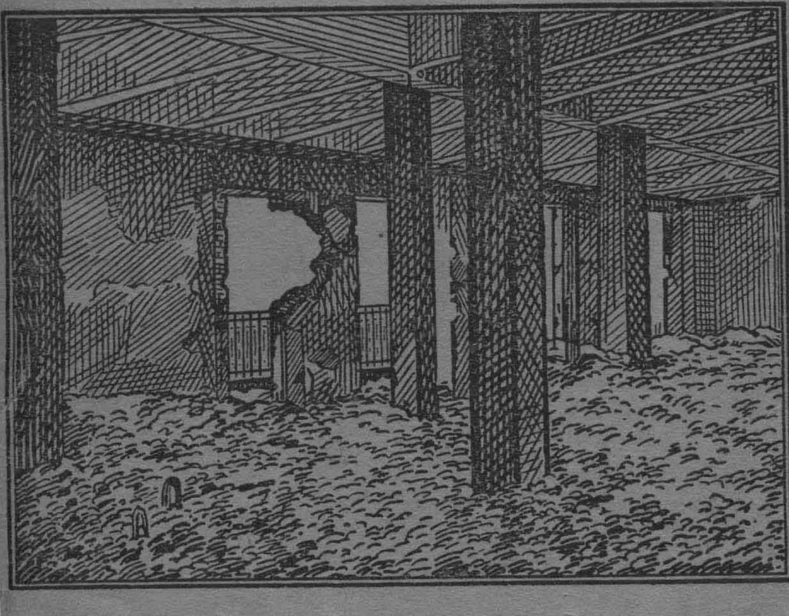
解析几何学

新學制高級中學教科書

解析幾何學

段子燮編

商務印書館發行



民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉為其難因將學校需用各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國十七年六月初版
民國二十一年六月印行 國難後第一版
民國二十一年十月印行 國難後第三版

(一一二三)

新學制高級中學教科書 解析幾何學

每冊定價大洋陸角
(外埠酌加運費匯費)

編纂者 段子燮

發行兼印刷者 上海商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館

一一二三

目 次

新學制高中教科書

解析幾何學

緒論

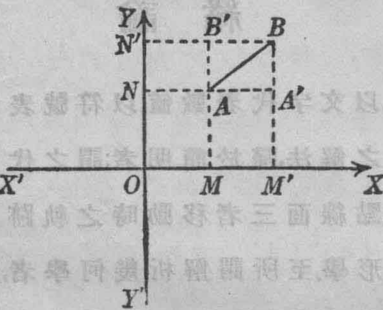
於數學中,以文字代表數值,以符號表示運算之方略,使各種問題之解法,歸於簡明者;謂之代數學.處理圖形之位置形狀,點線面三者移動時之軌跡與關係者,謂之幾何學,或稱形學.至所謂解析幾何學者,乃綜合二者之學,以代數之方程,處理點線面固定之位置形狀及移動之跡象者也.

第一章

坐標 Coordinates

§1. 坐軸標 *axes of coordinates* 於平面上,任意一點之移動,其方向不外乎前後左右.如圖一,若 A 點移動至 B 點,其行動之方向:可作爲先自 A 向右移動至 A',復自 A' 向前移動至 B;或先自 A 向前移動至 B', 復自 B'

向右移動至 B,故其行動之方向,仍歸於前後左右.是以於一平面上,設依前後左右之方向作二定直線;則任意一點之位置,即可以其與二軸之平行距離定之.此平行距離名曰坐標,二定線謂之二坐標軸,二軸之交點謂之原點 *origin*.

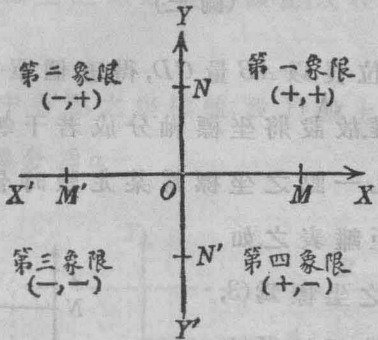


(圖一)

§2. 正坐標制 *rectangular coordinates* 普通常以互為正交之二直線為軸,是為正坐標制,如圖一之 XX', YY' 是也.其橫軸稱為 X 軸,縱軸稱為 Y 軸,O 即為其原點.A 點與二軸之平行距離為 AN 與 AM,即等於 OM 與 ON;故 A 點之坐標為 OM 與 ON,以 (OM, ON) 表之.常稱 OM 為橫坐標;或 x;ON 為縱坐標,或 y;即 $(x, y)=(OM, ON)$.同樣:B 點之坐標為 $(x, y)=(OM', ON')$.

正坐標或稱卡氏坐標 *Cartesian coordinates*, 因此種坐標制,首涉及之者為笛卡兒 *Descartes* 氏故也.

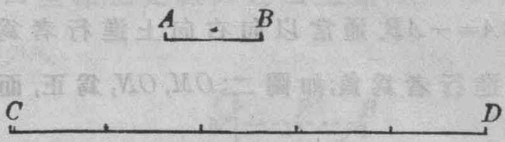
§ 3. 坐標之方向 在平面上,設取一線向某方進行之方向爲正,則其反對方向爲負.其指向常以字母之先後表之,如定 $\overset{A\qquad B}{\longrightarrow}$ AB 爲正,則 BA 爲負;即 $AB=-BA$, 及 $BA=-AB$. 通常以向右向上進行者爲正,而以向左向下進行者爲負;如圖二: OM, ON, 爲正, 而 OM', ON' 爲負也.



(圖二)

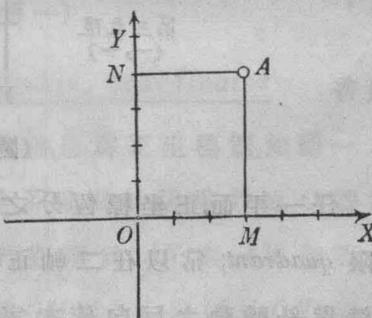
任一平面,正坐標恆分之成四部,其每小部分名曰象限 *quadrant*; 常以在二軸正向間者爲第一象限,更依時鐘指針轉動之反向,依次定爲第二第三第四象限;如圖二之 XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ 即爲第一第二第三第四象限.各點之坐標:在第一象限內, x, y 皆爲正;在第二象限內, x 爲負,而 y 爲正;在第三象限內, x,y 皆爲負;在第四象限內,則 x 爲正,而 y 爲負.

§4. 坐標之數値　任何數値,皆可以線段表之,祇須先取一定長之線段,爲一單位;於是於另一直線上,取其一段,使等於某單位數,則此線段卽表某數.如圖三:



(圖三)

取 AB 爲一單位長,以 AB 量 CD, 得五個單位長, CD 卽等於五,餘可類推.故設將坐標軸分成若干等分,使每分爲一單位長;則凡一點之坐標爲某定數時,皆可以其點與軸之某單位距離表之.如圖四:設 A 點之坐標爲(3,4);作此點時,僅須於 X 軸正向取 3 單位,如 OM; 於 Y 軸正向取 4 單位,如 ON; 過 M, N 各作平行於他軸之直線,則其交點之坐標,卽爲(3,4)矣.



(圖四)

習題一

1. 設一點在 Y 軸之右三單位距離處,問此點之橫

坐標爲何者?

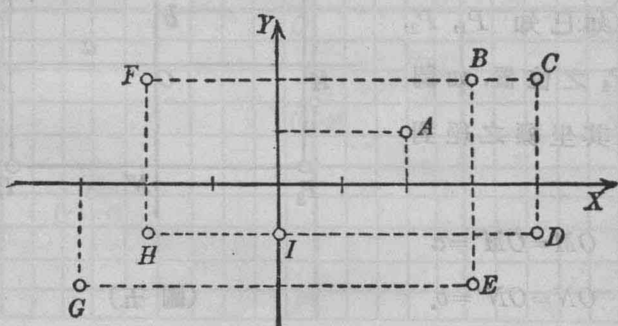
2. 設一點在X軸之上b單位距離處,問此點之縱坐標爲何者?又設在X軸之下b單位距離處則如何?

3. 原點之坐標爲何者?

4. 設某點之(a)橫坐標爲正;(b)橫坐標爲負;(c)縱坐標爲正;(d)縱坐標爲負;問各點之位置?

5. 問在X軸上之點之縱坐標值,及在Y軸上之點之橫坐標值?

6. 書明圖中各點之坐標值;設Y軸上每一等分爲b, X軸上每一等分爲a.



第二章

點 *Points*

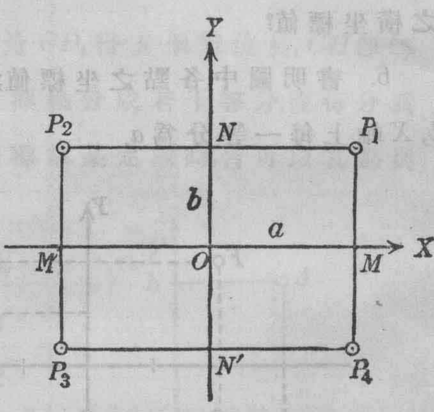
§1. 點之坐標及位置之決定

設一點之位置已定,即可量其與二軸之距離,及其所在之象限,而定其坐標之值;反之,設已知坐標之值,則其點之位置亦定;可如上章所述作之.

例如:已知 P_1, P_2, P_3, P_4 之位置, 如圖五;則其坐標之絕對值爲

$$OM=OM'=a$$

$$ON=ON'=b.$$



(圖 五)

設令 P_1, P_2, P_3, P_4 四點之坐標爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)

即得　$P_1(x_1, y_1)\equiv(a, b)$,　　$P_2(x_2, y_2)\equiv(-a, b)$

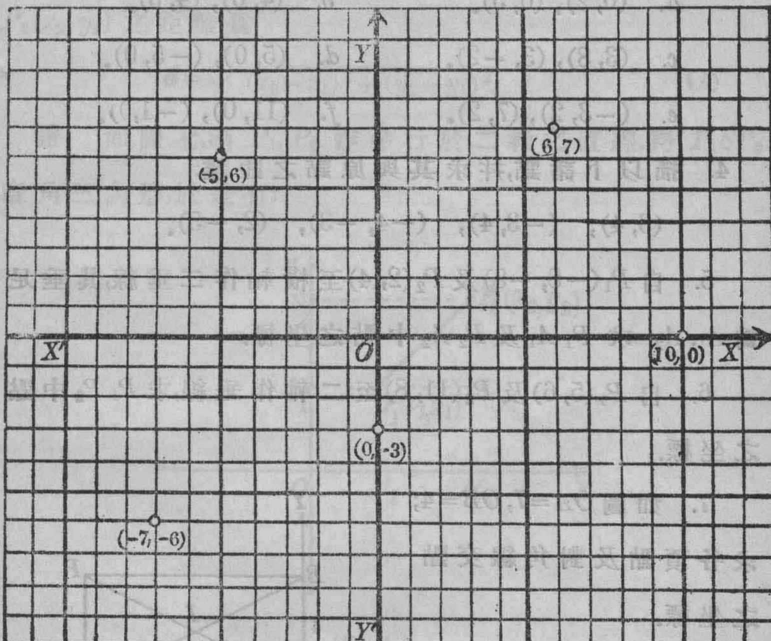
$P_3(x_3, y_3)\equiv(-a, -b)$,　　$P_4(x_4, y_4)\equiv(a, -b)$,

反之,設已知四點之坐標,如上四組之值,則按前法定

各點之位置,即得 P_1, P_2, P_3, P_4 四點.

§2. 描點 *Plotting a point*

依坐標法決定一點之位置,謂之描點.描點時,以用細線方格紙 *square paper*,即坐標紙 *coordinate paper*,爲便而準確,如圖六.



(圖六)

習題二

1. 作二正交軸,以 $\frac{1}{5}$ 吋,即二分,爲單位;描下諸點:

(2,1), (1,2), (−1,2), (−2,1), (−2,−1), (−1,−2), (1, −2), (2, −1).

2. 作二正交軸;以任意長度爲單位,描下諸點:

(1, 3), (3, 2), (3, −2), (4, −6), (6, 0), (0, −5)

3. 作下之諸點;并求其每雙點間之距離:

a. (0, 2), (0, 5).　　*b*. (4, 0), (4, 6).

c. (3, 8), (3, −2).　　*d*. (5, 0), (−5, 0).

e. (−3, 2), (7, 2).　　*f*. (11, 0), (−1, 0).

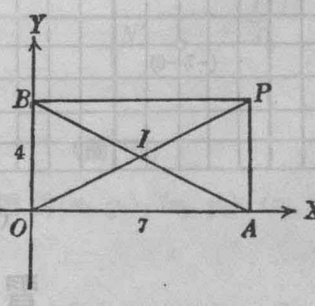
4. 描以下諸點,并求其與原點之距離:

(3, 4), (−3, 4), (−4, −3), (2, −5).

5. 自 $P_1(-8, -8)$ 及 $P_2(2, 4)$ 至橫軸作二垂線,其垂足爲 A_1, A_2; 求 P_1A_1 及 P_2A_2 中點之坐標.

6. 自 $P_1(5, 6)$ 及 $P_2(11, 8)$ 至二軸作垂線,求 P_1P_2 中點之坐標.

7. 如圖 $OA=7$, $OB=4$; 求各頂點及對角線交點之坐標.



8. 過 $A(6, 0)$, $B(0, 8)$, $O(0, 0)$ 三點作一圓, 求圓心坐標,并圓半徑.

9. 一點 $P(x, y)$ 移動時其橫坐標恆等於縱坐標,即 x 恆等於 y; 求 P 點移動之途徑,并證明所得之結果

正確.

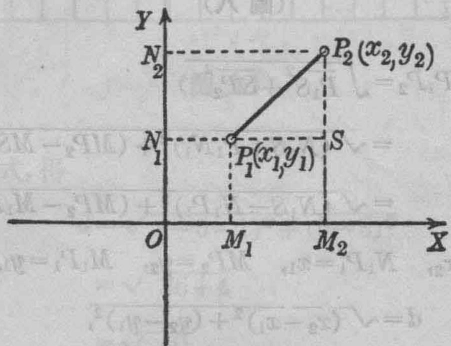
10. 作動點 P 之途徑,設其縱坐標恆較橫坐標大一.

§3. 點與點間之距離

a. 基本公式　於正坐標制,任意二點 $P_1(x_1, y_1)$, 及 $P_2(x_2, y_2)$ 之距離爲

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (I)$$

證　如圖七,過 P_1, P_2 作平行於二軸之直線,得 P_1SP_2 直角三角形;於是有:



(圖七)

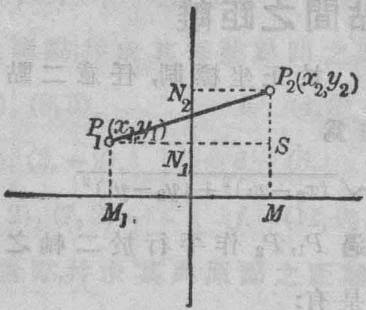
$$P_1S=M_1M_2=x_2-x_1$$

$$SP_2=N_1N_2=y_2-y_1$$

$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_1S}^2+\overline{SP_2}^2}$$

故　$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

b. 上式之討論　設 P_1P_2 不同在第一象限內，或皆在第一象限外，上之公式亦合理，因如圖八：



(圖八)

$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_1S}^2+\overline{SP_2}^2}$$
$$=\sqrt{(N_1S+P_1N_1)^2+(MP_2-MS)^2}$$
$$=\sqrt{(N_1S-N_1P_1)^2+(MP_2-M_1P_1)^2}$$

但　$N_1S=x_2$，　$N_1P_1=x_1$，　$MP_2=y_2$，　$M_1P_1=y_1$.

故　　$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，

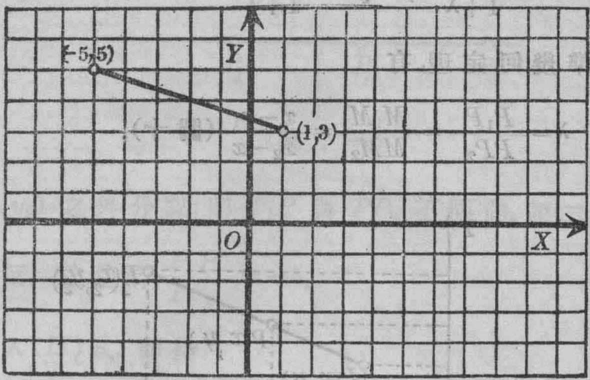
結果得式與上同；由此類推，可知上之公式於各種情形皆合.

c. 任意一點與原點之距離　按上(*I*)式，可令 P_1 爲原點，有 $x_1=y_1=0$；於是得所求之距離爲

$$d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

d. 例題　求(1,3)點與(−5,5)點間之距離.

解　如圖九令(1, 3)爲 P_1,(−5, 5)爲 P_2, 於是得 $x_1=1$, $y_1=3$, $x_2=-5$, $y_2=5$;



(圖九)

代入 (I) 式,得

$$d=\sqrt{(-5-1)^2+(5-3)^2}$$
$$=\sqrt{36+4}$$
$$=\sqrt{40}$$
$$=2\sqrt{10}.$$

於此直可視作所求爲一直角三角形之斜邊,此直角三角形之二邊爲 6 與 2 也.

§4. 二點聯線間分點之坐標

a. 內分點之坐標　設 $P(x, y)$ 爲 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 之