北大燕园

2014年 李正元·李永乐

考研数学 ⑦

数学

数学一

全真模拟经典400题

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2014年李正元·李永乐考研数学

数学

数学一

全真模拟经典400题

主　编　北　京　大　学　李正元
　　　　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　范培华

编　者（以姓氏笔画为序）
　　　　北　京　大　学　刘西垣
　　　　北　京　大　学　李正元
　　　　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　范培华

中国政法大学出版社

2013·北京

图书在版编目(CIP)数据

2014年李正元、李永乐考研数学．数学全真模拟经典400题．数学一／李正元，李永乐，范培华主编．—北京：中国政法大学出版社，2013．9
ISBN 978-7-5620-4931-9

Ⅰ．①2… Ⅱ．①李… ②李… ③范… Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第183298号

书　　名	2014年李正元、李永乐考研数学　数学全真模拟经典400题：数学一
作　　者	李正元　李永乐　范培华
责任编辑	魏　星
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路25号) 北京100088信箱8034分箱　邮编100088　fada.sf@sohu.com http://www.cuplpress.com (网络实名：中国政法大学出版社) (010)58908433(编辑部)　58908325(发行部)　58908334(邮购部)
承　　印	北京朝阳印刷厂有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　1/16
印　　张	12
字　　数	322千字
版　　本	2013年9月第1版　2013年9月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5620-4931-9
定　　价	25.00元

前　言

本套书（**李正元、李永乐考研数学系列——《数学复习全书》、《数学历年试题解析》及《数学全真模拟经典400题》**等）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本套书在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性、前瞻性”，较“适合考生备考的需要”，我们深感欣慰。《**2014年考研数学全真模拟经典400题**》根据考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

《经典400题》特点：

1. **每题均全新优化设计，综合性强**

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了10套模拟试题。在内容设计上，每道题均涉及两个或两个以上知识点，这些题涵盖新大纲大部分重要考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. **注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细**

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题思路和方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项、涉及的重要结论。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据考研数学大纲为2014年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练套题，本书中的试题难度略高于2013年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第三阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析与解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。

②为了提高考生数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点，综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要着急，更不能泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》所介绍的解题方法，然后再动手做题。

因此，我们希望考生认真对待本书中每道题，一定要动手做题，不要一看了事，建议考生对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2014年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

编　者

2013年9月

目　　录

模拟试卷　卷(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ln(1+\sin^2 t)}{t}\mathrm{d}t, g(x) = \int_0^{1-\cos x} \tan t^2 \mathrm{d}t$,则 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 高阶无穷小.　　(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶而非等价无穷小.　　(D) 等价无穷小.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且非负但不恒等于零,记 $I_1 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x$,

则它们的大小关系为

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.　　(B) $I_3 < I_1 < I_2$.

(C) $I_2 < I_1 < I_3$.　　(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

(3) 若 $f(-1,0)$ 为函数 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(ax + b - y^2)$ 的极大值,则常数 a,b 应满足的条件是

(A) $a \geqslant 0, b = a + 1$.　　(B) $a \geqslant 0, b = 2a$.

(C) $a < 0, b = a + 1$.　　(D) $a < 0, b = 2a$.

(4) 设积分区域 $D = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$,则二重积分 $I = \iint\limits_D |x + y| \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

(A) $\frac{2}{3}$.　　(B) $\frac{4}{3}$.　　(C) $\frac{8}{3}$.　　(D) $\frac{10}{3}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,且方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解,则

(A) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解时,必有 $m = n$.

(B) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解时,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$.

(C) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,必有 $m < n$.

(D) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < m$.

(6) 下列矩阵中不能相似对角化的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的密度函数关于 $x = \mu$ 对称,$F(x)$ 为其分布函数,则有

(A) $F(\mu + x) = F(\mu - x)$.　　(B) $F(\mu + x) + F(\mu - x) > 1$.

(C) $0 < F(\mu + x) + F(\mu - x) < 1$.　　(D) $F(\mu + x) + F(\mu - x) = 1$.

(8) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}_k = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i, 1 \leqslant k \leqslant n$，则 $\operatorname{cov}(\overline{X}_k, \overline{X}_{k+1}) =$

(A) $\dfrac{\sigma^2}{k}$.　　(B) $\dfrac{\sigma^2}{k+1}$.　　(C) $k\sigma^2$.　　(D) σ^2.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设 $f'(1) = a$，则数列极限 $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - f\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} =$ ________．

(10) 设 $u = u(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xu(x,y) = x$，则 $u(x,y) =$ ________．

(11) 设平面上连续曲线 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b, f(x) > 0)$ 和直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的质心是 $(\bar{x},0,0)$，则 $\bar{x}$ 的定积分表达式是________．

(12) 若将柱坐标系中的三重累次积分 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} zr^2 dz$ 化为直角坐标系 $Oxyz$ 中的三重累次积分（先对 z，再对 y 最后对 x 积分），则 $I =$ ________．

(13) 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________．

(14) 设 X, Y 分别服从参数为 $\dfrac{3}{4}$ 与 $\dfrac{1}{2}$ 的 0-1 分布，且它们的相关系数 $\rho_{XY} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 X 与 Y 的联合概率分布为________．

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) **（本题满分 10 分）**

已知曲线在直角坐标系中由参数方程给出：$x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t} (t \geqslant 0)$．

（Ⅰ） 证明该参数方程确定连续函数 $y = y(x), x \in [1, +\infty)$．

（Ⅱ） 证明 $y = y(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调上升且是凸的．

（Ⅲ） 求 $y = y(x)$ 的渐近线．

(16) **(本题满分 11 分)**

(Ⅰ) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 可微, $g(x) \neq 0$, 且 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \equiv 0$, 求证：存在常数 C, 使得

$f(x) = Cg(x)(\forall x \in (a,b))$;

(Ⅱ) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶可导, 且 $f(x) \leqslant 0$, $f''(x) \geqslant 0(x \in (-\infty, +\infty))$. 求证: $f(x)$ 为常数 $(\forall x \in (-\infty, +\infty))$.

(17) **(本题满分 9 分)**

设 $u = f(xy, x^2 - y^2, x)$, 其中函数 f 有二阶连续偏导数, 试求: (Ⅰ) $\mathrm{d}u$; (Ⅱ) u''_{xy}.

(18) **(本题满分 10 分)**

设 $A(2,2)$, $B(1,1)$, Γ 是从点 A 到点 B 的线段$\overline{AB}$下方的一条光滑定向曲线 $y=y(x)$, 且它与$\overline{AB}$围成的面积为 2, 又 $\varphi(y)$ 有连续导数, 求曲线积分

$$I=\int_{\Gamma}[\pi\varphi(y)\cos\pi x-2\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin\pi x-2\pi]\mathrm{d}y.$$

(19) **(本题满分 10 分)**

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2^{n}n^{2}}$ 的收敛域及和函数.

(20) **（本题满分 11 分）**

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,17,-1,7)^{\mathrm{T}}$，

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $a=3$ 时，求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$；

（Ⅲ）当 $a=3$ 时，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可表示任一个 4 维列向量．

(21) **（本题满分 11 分）**

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$．

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

（Ⅲ）求矩阵 $\boldsymbol{A}^*-6\boldsymbol{E}$ 的秩．

(22) **(本题满分 11 分)**

袋中装有5个白球,3个红球,第一次从袋中任取一球,取后不放回,第二次从袋中任取2球,用 X_i 表示第 i 次取到的白球数,$i=1,2$.

(Ⅰ)求 (X_1,X_2) 的联合分布;

(Ⅱ)求 $P\{X_1=0,X_2\neq 0\}$,$P\{X_1X_2=0\}$;

(Ⅲ)判断 X_1,X_2 是否相关,是正相关还是负相关.

(23) **(本题满分 11 分)**

设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布,Y 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布,且 X,Y 相互独立,记随机变量 $Z=X+2Y$.

(Ⅰ)求 Z 的概率密度;

(Ⅱ)求 EZ,DZ.

模拟试卷　卷(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导且 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f'(x_0)g'(x_0) < 0$,则

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点.

(B) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点,但不是 $f(x)g(x)$ 的极值点.

(C) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点,且是 $f(x)g(x)$ 的极小值点.

(D) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点,且是 $f(x)g(x)$ 的极大值点.

(2) 设 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$,则必定存在一个正数 δ,使得

(A) 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 是凹的.

(B) 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 是凸的.

(C) 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 单调减少,而在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 单调增加.

(D) 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 单调增加,而在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 单调减少.

(3) 设 $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}((x,y) \neq (0,0))$, $f(0,0) = 0$,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处

(A) 不连续.

(B) 连续,但 $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 不∃.

(C) 连续且 $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ ∃ 但不可微.

(D) 可微.

(4) 设 $y = f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调,导函数连续,反函数为 $x = g(y)$,且 $f(1) = 1$, $f(3) = 2$, $\int_1^3 f(x)\,dx = \dfrac{5}{2}$,则 $\int_1^2 g(y)\,dy =$ ________.

(A) $\dfrac{1}{3}$.　　(B) $\dfrac{5}{3}$.　　(C) $\dfrac{5}{2}$.　　(D) $\dfrac{1}{2}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵,并满足 $\boldsymbol{ABAC} = \boldsymbol{E}$,则下列结论中不正确的是

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$.　　(B) $\boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{CAB}$.

(C) $\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$.　　(D) $\boldsymbol{ACAB} = \boldsymbol{CABA}$.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则下列矩阵中与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价、合同但不相似的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$.　　　　(D) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

(7) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X},S^2$ 是样本均值与样本方差，则下列不服从 $\chi^2(n-1)$ 分布的随机变量是

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.　(B) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$.　(C) $(n-1)S^2$.　(D) $\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i^2$.

(8) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则随机变量 $|X|$ 的概率密度 $f_1(x)$ 为

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.　　(B) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

(C) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$.　　(D) $f_1(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 质量为 M，长为 l 的均匀杆 AB 吸引着质量为 m 的质点 C，C 位于 AB 的延长线上并与近端距离为 a，已求得杆对质点 C 的引力 $F=\dfrac{kMm}{a(l+a)}$，其中 k 为引力常数．现将质点 C 在杆的延长线上从距离近端 r_0 处移至无穷远时，则引力作的功为________．

(10) 微分方程 $y'=\dfrac{y\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}-x^2}$ 的通解为________．

(11) 设 $u(x,y)=u(r)\,(r=\sqrt{x^2+y^2})$，当 $r\neq 0$ 时有连续的二阶偏导数且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

则 $u=u(r)$ 满足的常微分方程是________．

(12) 设有曲面 $S:x^2+y^2=a^2\,(0\leqslant z\leqslant a)$，则 $I=\iint\limits_S\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=$________．

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&a\\1&a&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}=$________．

(14) 在以原点为圆心的单位圆内画平行弦，如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的，则任意画的弦其长度大于 1 的概率为________．

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) **（本题满分 10 分）**

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有连续的导数，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x tf(tx)\,\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

（Ⅰ） 求常数 A 使得 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续．

（Ⅱ） 确定 A 后，求 $F'(x)$ 并证明 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续．

(16) **（本题满分 10 分）**

求 $f(x,y,z)=2x+2y-z^2+5$ 在区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2$ 上的最大值与最小值．

(17) **（本题满分 10 分）**

设 $1\leqslant a<b$，函数 $f(x)=x\ln^2 x$，求证 $f(x)$ 满足不等式

（Ⅰ） $0<f''(x)<2\ (x>1)$．

（Ⅱ） $f(a)+f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<\dfrac{1}{2}(b-a)^2$．

(18) **(本题满分 10 分)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 是它的部分和.

(Ⅰ) 证明 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ 收敛并求和;

(Ⅱ) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{S_n^2}$ 绝对收敛.

(19) **(本题满分 10 分)**

设 $P(x,y) = \frac{x+1-y}{(x+1)^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x+1+y}{(x+1)^2+y^2}$,

(Ⅰ) 求 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(Ⅱ) 求 $J = \int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$,其中 C 是圆周 $x^2+y^2=3^2$,取逆时针方向.

(20) **（本题满分 11 分）**

设 A 是 n 阶反对称矩阵，

（Ⅰ）证明：A 可逆的必要条件是 n 为偶数；当 n 为奇数时，A^* 是对称矩阵；

（Ⅱ）举一个 4 阶不可逆的反对称矩阵的例子；

（Ⅲ）证明：如果 λ 是 A 的特征值，那么 $-\lambda$ 也必是 A 的特征值.

(21) **（本题满分 11 分）**

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & a & -2\\ -a & -1 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量，并指出 A 可以相似对角化的条件.