全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

数学

复习指南暨习题解析

王来生 ◎ 主编

第 7 版

2014

面向农学门类　名校名师

融通主流教材　精讲重点考点

解析习题试题　轻松复习应考

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

数学

复习指南暨习题解析

王来生 ◎ 主编

2014

第7版

面向农学门类　名校名师编审

融通主流教材　精讲重点考

解析习题试题　轻松复习应考

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南暨习题解析/王来生主编. —7版. —北京:中国农业大学出版社,2013.8
ISBN 978-7-5655-0783-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第176215号

书 名 数学复习指南暨习题解析(第7版)
作 者 王来生 主编

策划编辑 席 清 丛晓红 张 蕊　　责任编辑 洪重光
封面设计 郑 川　　责任校对 王晓凤 陈 莹
出版发行 中国农业大学出版社
社 址 北京市海淀区圆明园西路2号　　邮政编码 100193
电 话 发行部 010-62818525,8625　　读者服务部 010-62732336
编辑部 010-62732617,2618　　出 版 部 010-62733440
网 址 http://www.cau.edu.cn/caup　　e-mail cbsszs@cau.edu.cn
经 销 新华书店
印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司
版 次 2013年8月第7版　2013年8月第1次印刷
规 格 787×1 092　16开本　26.25印张　650千字
定 价 49.00元

主　　编　王来生（中国农业大学）

副 主 编　王云诚（山东农业大学）

张良云（南京农业大学）

崔克俭（山西农业大学）

参编人员　（按姓氏笔画排序）

介跃建（中国农业大学）

陈　静（中国农业大学）

周志坚（中国农业大学）

杨丽明（中国农业大学）

徐义田（中国农业大学）

曾善玉（中国农业大学）

前　言

本书是专门针对农学门类硕士研究生考试而编写的辅导书。为了方便考生的复习和应考，在总结分析历年联考试题及部分院校有关课程教学大纲的基础上，中国农业大学、南京农业大学、山东农业大学和山西农业大学联合编写了这本数学考研复习指导书。参加编写的老师大多是往年在本校负责研究生考试命题工作的。

全书分三篇。第一篇为高等数学，内容分别为函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微积分学和常微分方程。第二篇是线性代数，内容为行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值和特征向量。第三篇是概率论与数理统计，内容为随机事件与概率，随机变量及其分布，二维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律、中心极限定理，数理统计的基本概念。

本书的主要特点是：依据农学门类数学教学基本要求，精选出具有启发性、典型性和针对性的题目，许多典型例题都选自考研真题，通过对这些题目的分析解答，帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

每一章首先给出考研大纲中的考试内容和考试要求以及本章的重点。每一章根据知识点分类总结，给出基本概念、定义、重要定理与常用公式，方便学生的学习。在典型例题的选择上，相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题，先给出解题思路分析，然后给出正式解答，有的题最后还加以评注；目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，开拓思维模式，培养学生综合分析问题和解决问题的能力。每章后面附有练习题，使学生及时了解本章的学习情况。书后附四套模拟试题，还附有最新的考研真题，供同学复习时参考。

根据几年来的考研实际情况，为了更好地帮助考生复习，我们还同时配套编写了《数学历年真题与全真模拟题解析》一书，供广大农学门类考生考研冲刺使用。

本书的编写分工如下：

第一篇，高等数学：王来生（第一章），周志坚（第二章），介跃建（第三章），陈静（第四章），崔克俭（第五章）；

第二篇，线性代数：曾善玉（第六、七、八章），王云诚（第九章），张良云（第十章）；

第三篇，概率论与数理统计：徐义田（第十一、十二、十三章），杨丽明（第十四、十五章），崔克俭（第十六章）。

全书由王来生教授总体设计并统稿。

由于编写人员水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者指正。

编　者

2013 年 8 月

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数函数关系的建立；数列极限与函数极限的定义及其性质；函数的左极限与右极限；无穷小量和无穷大量的概念及其关系；无穷小量的性质及无穷小量的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质。

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题中的函数关系。

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。

5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限和右极限）的概念。

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法，了解无穷大量和无穷小量的概念及其关系。

8. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

本章重点

求极限或给定极限值确定式中的常数；利用洛必达法则求七种未定式的极限；讨论函数的连续性；判断间断点的类型；无穷小的比较；利用极限存在准则和两个重要极限求极限；方程在给定区间内有无实根；分段函数在分界点处的极限与连续；闭区间上连续函数的性质。

一、函数的定义与性质

1. 函数概念

如果变量 x 在数集 D 中任取一个值，变量 y 按某个对应法则 f 总有唯一确定的值与它对

应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x), x\in D$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，集合 $W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

2. 函数的特性

(1)函数的有界性　若存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对于任一 $x\in D$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，亦称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，否则称为无界。

(2)函数的单调性　设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，x_1, x_2 为 (a,b) 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增加的函数；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调减少的函数。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

(3)函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称。

(4)函数的周期性　若存在一个非零常数 T，使得函数 $y=f(x)$ 在其定义域内有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期。

3. 复合函数与初等函数

(1)反函数　设函数 $y=f(x), x\in D$ 的值域为 W，且 x 与 y 是一一对应的，对任何 $y\in W$，按照对应法则 f^{-1} 总有唯一确定的 x 与之对应，称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，$y=f(x)$ 又称为直接函数。习惯上用 y 表示函数，所以反函数可写成 $y=f^{-1}(x), x\in W$。它们的图形关于 $y=x$ 对称。

(2)基本初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

(3)复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\Phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

(4)隐函数　设二元方程为 $F(x,y)=0$，如果对任意的 $x\in D$，总有满足上述方程的 y 与之对应，则称 y 是 x(由方程 $F(x,y)=0$ 确定)的隐函数。

(5)初等函数　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数称为初等函数。

例 1　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域。

解　$4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$

$$-2\leqslant x\leqslant 2 \text{ 且 } x<-1 \text{ 或 } x>1$$

所以所求定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$。

例 2　设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\neq 0, x\neq 1$，求 $f(x)$。

解　由已知

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x \tag{1}$$

令 $t=\dfrac{x-1}{x}$，即 $x=\dfrac{1}{1-t}$，代入原方程得 $f\left(\dfrac{1}{1-t}\right)+f(t)=\dfrac{2}{1-t}$

故有
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x} \tag{2}$$

令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$，$x=\frac{1}{1-u}$，代入式(2)得
$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2(u-1)}{u}$$

即 $f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}$。 (3)

式(1)、式(2)、式(3)联立，得 $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$。

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$。

解　由于 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$，所以　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$

(1)$\varphi(x)<1$

当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=x+2<1\Rightarrow x<-1$，$f[\varphi(x)]=e^{x+2}$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)=x^2-1<1\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$，$f[\varphi(x)]=e^{x^2-1}$。

(2)$\varphi(x)\geqslant 1$

当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x<0$，$f[\varphi(x)]=x+2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$，$f[\varphi(x)]=x^2-1$。

综上所述，
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, x<-1\\ x+2, -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

例 4　设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为奇函数，已知 $f(1)=a$，对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$。

(1)求 $f(5)$；

(2)若 $y=f(x)$ 以 $T=2$ 为周期，求常数 a。

分析　已知条件表达了函数 $f(x)$ 的线性运算关系，为求 $f(5)$，则应利用已知条件凑出 $f(5)$。

解　(1)令 $x=-1$，由题设则有
$$f(1)=f(-1)+f(2)$$

又因为 $y=f(x)$ 为奇函数，因此
$$f(2)=2f(1)=2a$$

再令 $x=3$，则有 $f(5)=f(3)+f(2)$。

由已知等式令，$x=1$，得 $f(3)=f(1)+f(2)=3a$，则得 $f(5)=5a$。

(2)若 $y=f(x)$ 以 $T=2$ 为周期，则有
$$f(x+2)=f(x)+f(2)=f(x)$$

可得$f(2)=0$,即解出$a=0$。

例5 设$f(x)$满足$af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x$,其中$|a|\neq|b|$,求$f(x)$。

解 令$t=-\dfrac{1}{x}$,$x=-\dfrac{1}{t}$,于是原式可改写为$af\left(-\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=-\sin\dfrac{1}{t}$,也就是

$$af(-\frac{1}{x})+bf(x)=-\sin\frac{1}{x}$$

与原式联立解得
$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\sin x+b\sin\frac{1}{x}\right)$$

例6 设$f(x)$为连续函数,且满足$\exp\left\{\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)\mathrm{d}t\right\}=f(x)$,求$f(x)$的表达式。

解 对题中所给的关系式取自然对数,得

$$\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t=\ln f(x)$$

上式两边同时对x求导,有

$$3f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},\text{即 }f'(x)=3f^2(x)$$

解之,可得
$$f(x)=-\frac{1}{3x+C}$$

易知$f(0)=1$,因此得$C=-1$,所以$f(x)=\dfrac{1}{1-3x}$。

二、数列与函数的极限

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$任意$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,称常数$a$是数列$x_n$的极限,又称数列$x_n$收敛于$a$。

2. 数列极限的性质

有界性 收敛的数列必定有界。

唯一性 每个收敛的数列只有一个极限。

3. 函数极限的定义

定义1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$任意$\varepsilon>0$,存在正数$X$,当$|x|>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

在上述定义中,将$|x|>X$改写成$x>X$(或$x<-X$),便得到$x\to+\infty$(或$x\to-\infty$)时函数的极限。

定义2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$任意$\varepsilon>0$,存在正数$\delta$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

在上述定义中,将$0<|x-x_0|<\delta$改写成$0<x_0-x<\delta$(或$0<x-x_0<\delta$),便得到$x\to x_0$时的左(右)极限的定义。

左极限记为　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$

右极限记为　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$

4. 函数极限的性质

函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左、右极限均存在并且相等。

若函数 $f(x)$ 极限存在，则极限值是唯一的。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）。

例 7　若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$，并举例说明反之未必成立。

证明　任意 $\varepsilon > 0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，故存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|u_n - a| < \varepsilon$，此时，有

$$||u_n| - |a|| \leqslant |u_n - a| < \varepsilon$$

因此，若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$。反之，令 $u_n = (-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不存在，故反过来结论未必成立。但若 $a = 0$，则易知逆命题成立，这是我们经常用到的结论，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$。

例 8　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}$，当 $x \to 0, x \to -\infty, x \to +\infty$ 时的极限。

分析　$f(x)$ 为分段函数，在分界点处应考虑函数的左极限和右极限。

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} (e^{\frac{1}{x}} + 1) = 1$，$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} (1 + x^2) = 1$

所以

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (e^{\frac{1}{x}} + 1) = 2,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (1 + x^2) = +\infty$$

例 9　设 $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

分析　利用 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$。

解　因为　$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 1$，$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$

所以，$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

例 10　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$。

解　当 n 为偶数时，$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$

当 n 为奇数时，　$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} = 1$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = 1$$

评注 此题不是利用重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$。

例 11 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，求常数 a,b。

解法 1 由已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(b-a)x+1+b}{x+1}=3$，故有

$$\begin{cases}1-a=0\\b-a=3\end{cases}\quad \text{解得} \qquad a=1,b=4$$

解法 2 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=0$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}-a+\frac{b}{x}\right)=1-a=0$，则 $a=1$。故由已知有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x+b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-1)x+1+b}{x+1}=3$$

则 $b-1=3,b=4$，即得 $a=1,b=4$。

三、极限运算法则、无穷小与无穷大

1. 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；

(3)$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$，其中 $B\neq 0$。

2. 无穷小与无穷大

无穷小定义 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$)，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷小。

无穷大定义 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$)，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大。

3. 无穷小与函数极限的关系

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$。

4. 无穷小与无穷大的关系

在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大。