



全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

数 学

复习指南暨习题解析

王来生◎主编

第7版

2014

面向农学门类 名校名师

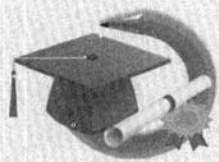
融通主流教材 精讲重点考点

解析习题试题 轻松复习应考



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE



全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

数 学

复习指南暨习题解析

王来生 主编

第7版

2014

面向农学门类 名校名师编审

融通主流教材 精讲重点考

解析习题试题 轻松复习应考



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南暨习题解析/王来生主编. —7 版. —北京:中国农业大学出版社,2013. 8
ISBN 978-7-5655-0783-0

I. ①数… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 176215 号

书 名 数学复习指南暨习题解析(第 7 版)

作 者 王来生 主编

策划编辑 席清 丛晓红 张蕊

责任编辑 洪重光

封面设计 郑川

责任校对 王晓凤 陈莹

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

邮政编码 100193

电 话 发行部 010-62818525,8625

读者服务部 010-62732336

编辑部 010-62732617,2618

出版部 010-62733440

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

e-mail cbsszs@cau.edu.cn

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

版 次 2013 年 8 月第 7 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

规 格 787×1 092 16 开本 26.25 印张 650 千字

定 价 49.00 元

图书如有质量问题本社发行部负责调换

主 编 王来生(中国农业大学)

副 主 编 王云诚(山东农业大学)

张良云(南京农业大学)

崔克俭(山西农业大学)

参编人员 (按姓氏笔画排序)

介跃建(中国农业大学)

陈 静(中国农业大学)

周志坚(中国农业大学)

杨丽明(中国农业大学)

徐义田(中国农业大学)

曾善玉(中国农业大学)

前 言

本书是专门针对农学门类硕士研究生考试而编写的辅导书。为了方便考生的复习和应考,在总结分析历年联考试题及部分院校有关课程教学大纲的基础上,中国农业大学、南京农业大学、山东农业大学和山西农业大学联合编写了这本数学考研复习指导书。参加编写的老师大多是往年在本校负责研究生考试命题工作的。

全书分三篇。第一篇为高等数学,内容分别为函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,多元函数微积分学和常微分方程。第二篇是线性代数,内容为行列式,矩阵,向量,线性方程组,矩阵的特征值和特征向量。第三篇是概率论与数理统计,内容为随机事件与概率,随机变量及其分布,二维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律、中心极限定理,数理统计的基本概念。

本书的主要特点是:依据农学门类数学教学基本要求,精选出具有启发性、典型性和针对性的题目,许多典型例题都选自考研真题,通过对这些题目的分析解答,帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

每一章首先给出考研大纲中的考试内容和考试要求以及本章的重点。每一章根据知识点分类总结,给出基本概念、定义、重要定理与常用公式,方便学生的学习。在典型例题的选择上,相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题,先给出解题思路分析,然后给出正式解答,有的题最后还加以评注;目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法,开拓思维模式,培养学生综合分析问题和解决问题的能力。每章后面附有练习题,使学生及时了解本章的学习情况。书后附四套模拟试题,还附有最新的考研真题,供同学复习时参考。

根据几年来的考研实际情况,为了更好地帮助考生复习,我们还同时配套编写了《数学历年真题与全真模拟题解析》一书,供广大农学门类考生考研冲刺使用。

本书的编写分工如下:

第一篇,高等数学:王来生(第一章),周志坚(第二章),介跃建(第三章),陈静(第四章),崔克俭(第五章);

第二篇,线性代数:曾善玉(第六、七、八章),王云诚(第九章),张良云(第十章);

第三篇,概率论与数理统计:徐义田(第十一、十二、十三章),杨丽明(第十四、十五章),崔克俭(第十六章)。

全书由王来生教授总体设计并统稿。

由于编写人员水平所限,书中缺点和错误在所难免,敬请读者指正。

编 者

2013年8月

目 录

第一篇 高等数学

第一章	函数、极限、连续	3
	一、函数的定义与性质	3
	二、数列与函数的极限	6
	三、极限运算法则、无穷小与无穷大	8
	四、极限存在法则、未定式的极限	12
	五、函数的连续性	18
	六、极限计算中的其他典型例题	24
	练习题	28
	练习题答案	30
第二章	一元函数微分学	35
	一、导数的概念与性质	35
	二、导数的计算	41
	三、高阶导数	48
	四、微分	50
	五、综合例题	50
	六、微分中值定理	55
	七、洛必达法则	60
	八、函数的单调性与曲线的凹凸性	60
	九、利用导数研究函数的极值与最值	67
	练习题	72
	练习题答案	75
第三章	一元函数积分学	78
	一、原函数的概念,不定积分的定义和性质	78
	二、不定积分的计算	79
	三、定积分概念、几何意义、性质,变上限定积分	91
	四、定积分的计算	92
	五、证明题	96
	六、定积分的应用	102
	练习题	105
	练习题答案	107
第四章	多元函数微积分学	110
	一、多元函数的概念、极限、连续	110

	二、多元函数的偏导数及全微分	112
	三、多元复合函数的求导法则	116
	四、多元函数的极值及应用	124
	练习题	129
	练习题答案	131
	五、二重积分	136
	练习题	152
	练习题答案	154
第五章	常微分方程	158
	一、微分方程的基本概念与可解类型	158
	二、一阶微分方程的应用	165
	练习题	169
	练习题答案	171
第二篇 线性代数		
第六章	行列式	179
	一、行列式的定义	179
	二、行列式的性质	180
	三、行列式的计算	182
	练习题	189
	练习题答案	191
第七章	矩阵	197
	一、矩阵及其运算	197
	二、可逆矩阵	203
	三、矩阵的初等变换	207
	四、矩阵的秩	208
	练习题	210
	练习题答案	212
第八章	向量	216
	一、向量及其运算	216
	二、向量组的线性相关性	217
	三、向量组的极大线性无关组与向量组的秩	223
	练习题	225
	练习题答案	227
第九章	线性方程组	232
	一、线性方程组	232
	二、典型题型	234
	练习题	239
	练习题答案	241

第十章	矩阵的特征值和特征向量	246
	一、特征值和特征向量	246
	二、实对称矩阵的对角化	250
	练习题	255
	练习题答案	258

第三篇 概率论与数理统计

第十一章	随机事件与概率	265
	一、随机事件的描述及其关系运算	265
	二、事件的频率与概率	267
	三、条件概率、乘法公式、事件的独立性	269
	四、全概率公式与贝叶斯公式	271
	五、本章应注意的几个问题	273
	练习题	273
	练习题答案	276
第十二章	随机变量及其分布	280
	一、随机变量及其概率分布	280
	二、常见随机变量的分布	285
	三、随机变量函数的分布	289
	四、本章应注意的几个问题	292
	练习题	292
	练习题答案	296
第十三章	二维随机变量及其分布	299
	一、二维随机变量的联合分布	299
	二、二维随机变量的边缘分布及独立性	301
	三、二维随机变量函数的分布	304
	四、常见二维随机变量的分布	308
	五、本章应注意的几个问题	311
	练习题	312
	练习题答案	314
第十四章	随机变量的数字特征	319
	一、随机变量的数学期望	319
	二、随机变量的方差、协方差和相关系数	331
	练习题	349
	练习题答案	351
第十五章	大数定律、中心极限定理	356
	一、切比雪夫不等式	356
	二、几个常用的大数定律	356
	三、几个常用的中心极限定理	357

	练习题·····	362
	练习题答案·····	364
第十六章	数理统计的基本概念 ·····	367
	一、样本及其数字特征·····	367
	二、常用统计量的分布·····	368
	三、正态总体的抽样分布·····	370
	练习题·····	375
	练习题答案·····	377
附录一	模拟试题 ·····	380
	模拟试题一·····	380
	模拟试题一答案·····	381
	模拟试题二·····	384
	模拟试题二答案·····	386
	模拟试题三·····	389
	模拟试题三答案·····	392
	模拟试题四·····	396
	模拟试题四答案·····	398
附录二	2013年全国统一考试试题与答案 ·····	400
	2013年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题·····	400
	2013年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案·····	403

第一篇 高等数学

- ◆ 第一章 函数、极限、连续
- ◆ 第二章 一元函数微分学
- ◆ 第三章 一元函数积分学
- ◆ 第四章 多元函数微积分学
- ◆ 第五章 常微分方程

第一章 函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数函数关系的建立;数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限与右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则;单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质。

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题中的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念。
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念。
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量和无穷小量的概念及其关系。
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质。

本章重点

求极限或给定极限值确定式中的常数;利用洛必达法则求七种未定式的极限;讨论函数的连续性;判断间断点的类型;无穷小的比较;利用极限存在准则和两个重要极限求极限;方程在给定的区间内有无实根;分段函数在分界点处的极限与连续;闭区间上连续函数的性质。

一、函数的定义与性质

1. 函数概念

如果变量 x 在数集 D 中任取一个值,变量 y 按某个对应法则 f 总有唯一确定的值与它对

应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$, $x \in D$ 。其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域,集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域。

2. 函数的特性

(1)函数的有界性 若存在 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leq M$ 对于任一 $x \in D$ 都成立,则称 $f(x)$ 在 D 上有界,亦称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数,否则称为无界。

(2)函数的单调性 设 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, x_1, x_2 为 (a, b) 内任意两点,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内为单调增加的函数;当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内为单调减少的函数。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

(3)函数的奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数;若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称。

(4)函数的周期性 若存在一个非零常数 T ,使得函数 $y = f(x)$ 在其定义域内有 $f(x+T) = f(x)$ 成立,则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期。

3. 复合函数与初等函数

(1)反函数 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的值域为 W ,且 x 与 y 是一一对应的,对任何 $y \in W$,按照对应法则 f^{-1} 总有唯一确定的 x 与之对应,称函数 $x = f^{-1}(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数, $y = f(x)$ 又称为直接函数。习惯上用 y 表示函数,所以反函数可写成 $y = f^{-1}(x)$, $x \in W$ 。它们的图形关于 $y = x$ 对称。

(2)基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

(3)复合函数 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f ,而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ ,若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \Phi$,则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

(4)隐函数 设二元方程为 $F(x, y) = 0$,如果对任意的 $x \in D$,总有满足上述方程的 y 与之对应,则称 y 是 x (由方程 $F(x, y) = 0$ 确定) 的隐函数。

(5)初等函数 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数称为初等函数。

例 1 求函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \ln(x^2-1)$ 的定义域。

解 $4-x^2 \geq 0$ 且 $x^2-1 > 0$

$$-2 \leq x \leq 2 \text{ 且 } x < -1 \text{ 或 } x > 1$$

所以所求定义域为 $[-2, -1) \cup (1, 2]$ 。

例 2 设 $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x$, 其中 $x \neq 0, x \neq 1$, 求 $f(x)$ 。

解 由已知
$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x \quad (1)$$

令 $t = \frac{x-1}{x}$, 即 $x = \frac{1}{1-t}$, 代入原方程得 $f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f(t) = \frac{2}{1-t}$

故有
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = \frac{2}{1-x} \quad (2)$$

令 $\frac{1}{1-x} = \frac{u-1}{u}, x = \frac{1}{1-u}$, 代入式(2) 得

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right) + f\left(\frac{u-1}{u}\right) = \frac{2(u-1)}{u}$$

即
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2(x-1)}{x}. \quad (3)$$

式(1)、式(2)、式(3) 联立, 得 $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1$ 。

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$ 。

解 由于 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, 所以 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

(1) $\varphi(x) < 1$

当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x+2 < 1 \Rightarrow x < -1, f[\varphi(x)] = e^{x+2}$;

当 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2-1 < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}, f[\varphi(x)] = e^{x^2-1}$ 。

(2) $\varphi(x) \geq 1$

当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x+2 \geq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0, f[\varphi(x)] = x+2$;

当 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}, f[\varphi(x)] = x^2-1$ 。

综上所述,

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

例 4 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数, 已知 $f(1) = a$, 对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$ 。

(1) 求 $f(5)$;

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T = 2$ 为周期, 求常数 a 。

分析 已知条件表达了函数 $f(x)$ 的线性运算关系, 为求 $f(5)$, 则应利用已知条件凑出 $f(5)$ 。

解 (1) 令 $x = -1$, 由题设则有

$$f(1) = f(-1) + f(2)$$

又因为 $y = f(x)$ 为奇函数, 因此

$$f(2) = 2f(1) = 2a$$

再令 $x = 3$, 则有 $f(5) = f(3) + f(2)$ 。

由已知等式令 $x = 1$, 得 $f(3) = f(1) + f(2) = 3a$, 则得 $f(5) = 5a$ 。

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T = 2$ 为周期, 则有

$$f(x+2) = f(x) + f(2) = f(x)$$

可得 $f(2)=0$, 即解出 $a=0$ 。

例 5 设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(-\frac{1}{x}\right) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$ 。

解 令 $t = -\frac{1}{x}$, $x = -\frac{1}{t}$, 于是原式可改写为 $af\left(-\frac{1}{t}\right) + bf(t) = -\sin\frac{1}{t}$, 也就是

$$af\left(-\frac{1}{x}\right) + bf(x) = -\sin\frac{1}{x}$$

与原式联立解得

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(a \sin x + b \sin \frac{1}{x} \right)$$

例 6 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\exp\left\{\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt\right\} = f(x)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

解 对题中所给的关系式取自然对数, 得

$$\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt = \ln f(x)$$

上式两边同时对 x 求导, 有

$$3f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ 即 } f'(x) = 3f^2(x)$$

解之, 可得

$$f(x) = -\frac{1}{3x + C}$$

易知 $f(0) = 1$, 因此得 $C = -1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{1 - 3x}$ 。

二、数列与函数的极限

1. 数列极限的定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 称常数 a 是数列 x_n 的极限, 又称数列 x_n 收敛于 a 。

2. 数列极限的性质

有界性 收敛的数列必定有界。

唯一性 每个收敛的数列只有一个极限。

3. 函数极限的定义

定义 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 任意 $\epsilon > 0$, 存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

在上述定义中, 将 $|x| > X$ 改写成 $x > X$ (或 $x < -X$), 便得到 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时函数的极限。

定义 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 任意 $\epsilon > 0$, 存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

在上述定义中, 将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改写成 $0 < x_0 - x < \delta$ (或 $0 < x - x_0 < \delta$), 便得到 $x \rightarrow x_0$ 时的左(右)极限的定义。

左极限记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$$

右极限记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$$

4. 函数极限的性质

函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左、右极限均存在并且相等。

若函数 $f(x)$ 极限存在, 则极限值是唯一的。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

例 7 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$, 并举例说明反之未必成立。

证明 任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 故存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|u_n - a| < \varepsilon$, 此时, 有

$$||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \varepsilon$$

因此, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$ 。反之, 令 $u_n = (-1)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 不存在, 故反过来结论未必成立。但若 $a = 0$, 则易知逆命题成立, 这是我们经常用到的结论, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ 。

例 8 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$ 时的极限。

分析 $f(x)$ 为分段函数, 在分界点处应考虑函数的左极限和右极限。

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (e^{\frac{1}{x}} + 1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + x^2) = 1$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{1}{x}} + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2) = +\infty$$

例 9 设 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

分析 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在的充要条件: $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ 。

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

例 10 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$ 。

解 当 n 为偶数时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

当 n 为奇数时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = 1$

评注 此题不是利用重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 。

例 11 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = 3$, 求常数 a, b 。

解法 1 由已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 + (b-a)x + 1 + b}{x+1} = 3$, 故有

$$\begin{cases} 1-a=0 \\ b-a=3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad a=1, b=4$$

解法 2 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = 3$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = 0$$

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+x} - a + \frac{b}{x}\right) = 1-a=0$, 则 $a=1$ 。故由已知有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x + b\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-1)x + 1 + b}{x+1} = 3$$

则 $b-1=3, b=4$, 即得 $a=1, b=4$ 。

三、极限运算法则、无穷小与无穷大

1. 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ 其中 } B \neq 0.$$

2. 无穷小与无穷大

无穷小定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$), 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷小。

无穷大定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大。

3. 无穷小与函数极限的关系

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 。

4. 无穷小与无穷大的关系

在同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小; 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大。