

曹德智

高中数学解题
思想·方法·技巧

江苏科学技术出版社

高中数学
解题思想 方法 技巧

曹德智

江苏科学技术出版社

高中数学解题思想方法技巧

编 著 曹德智
责任编辑 马桂琴

出版发行 江苏科学技术出版社
(南京市中央路 165 号, 邮编: 210009)

照 排 南京展望照排印刷有限公司
印 刷 丹阳教育印刷厂

开 本 787×1092 毫米 1/32
印 张 20
字 数 440 000
版 次 1998 年 6 月第 1 版
印 次 1998 年 6 月第 1 次印刷
印 数 1—3 000 册

标准书号 ISBN 7—5345—2563—2/G·448
定 价 20.70 元

图书如有印装质量问题,可随时向我社出版科调换。

前 言

数学思想、方法、技巧,对提高数学能力的作用已越来越受到广泛的重视.近几年高考也日益重视对数学思想方法、数学素质的考核,因而在高中毕业前夕的总复习阶段,进行一次系统的数学思想方法教育已显得越来越重要.为了提供一份教育素材,特据本人三十多年的教学实践,按照数学思想方法技巧的体系,分别进行分析介绍,借以提高学生掌握数学思想方法技巧的水平,如能有助于摆脱题海的束缚,作者将感到莫大的欣慰.

曹德智

引 言

解数学题,要根据题目所提供的信息,进行“加工”、“化简”和“变换”,从而探索和发现“已知”与“所求”、“条件”与“结论”之间的逻辑关系.即使解综合题,虽然比较复杂,涉及的知识点、理论及其方法较多,但将它分解开来,总可归结为若干个有联系的、较简单的基本问题.因此,我们应竭力找出在解题中起关键作用的内容.由于知识和方法的运用常基于科学思想观念的具体指导,所以在分析数学题时,要贯穿抽象、概括、数学化的思想,系统化归思想,形数结合思想等.通过解题实践中的自觉运用,要努力做到:会拆题(将较复杂的问题拆成若干个基本问题),会化简(在合乎逻辑的前提下把原题化简成较简单的题目),会思考(运用正确的思想方法),逐步积累解题经验,提高解题能力.

在解数学题时要注意以下几点:

首先要认清每道题的逻辑基础.每道数学题都可看作一定数学系统的子系统.题设与所在系统的公理应具有充分性(完备性)——足以推导出题目的结论;相容性——不导致矛盾;独立性——每个条件都不是多余的.

其次要注意解题的合理性和协调性.数学题解法各个步骤和各种活动的展开和连接,线索要清楚,舒展要自然,解法的各项内容的分工、配备要适当.

再次,为了培养发散性思维能力,在解题时应尽可能地从各种不同的角度去寻求多种解法.一题多解不但有助于思维

发散性和广阔性的训练,还有助于对各种解法进行比较,选择优化等能力的培养.

目 录

前言

引言

1. 关键——双基	1
一、重视双基,减少解题失误	1
(一) 不善于归纳,解题方向不明确	1
(二) 不合条件,随意使用法则、公式	3
(三) 不会转化,解题方法繁杂	6
(四) 不深入分析,解题思路狭窄	7
(五) 不合逻辑,造成循环论证	7
(六) 不问根据,解答似是而非	9
二、正确运用概念,提高解题能力	10
三、灵活运用有关定理、性质、法则、公式解题	17
2. 隐 \Rightarrow 显	23
一、隐含条件的类型	24
(一) 制约型隐含条件	24
(二) 补充型隐含条件	26
(三) 导向型隐含条件	28
(四) 综合型隐含条件	31
二、隐含条件的隐蔽方式	34
(一) 蕴涵式隐含条件	34
(二) 待选式隐含条件	35
三、隐含条件对解题的干扰	37

四、隐含条件对解题的暗示	39
五、化“隐”为“显”	41
(一)抓基础,突出前提	42
(二)抓存在,挖“条件”	43
(三)抓图形,挖“特征”,强调特例	46
(四)抓变换,挖“转义”	48
(五)抓结构,挖“模型”	50
六、综合举例	54
七、解析式没有给定的一类函数问题解法	64
(一)求出 $f(x)$ 解析式,变隐含为明显	64
(二)挖掘 $f(x)$ 的特殊性质,开通解题途径	66
3. 观察、联想、发散	68
一、观察	68
(一)观察题目特点,利用特点解题	68
(二)观察数字,寻找突破	70
(三)通过观察弥补知识不足,化难为易	70
(四)通过观察寻找解题途径,确定解题方法	72
(五)通过观察校核答案	73
(六)纵观整体,细察局部	75
(七)观察结论,联系条件	76
(八)观察全题,挖掘隐含	77
(九)观察图形,寻找思路	78
二、联想	79
(一)特殊性联想	79
(二)一般性联想	83
(三)定向联想	84
(四)双向联想	90
(五)类似联想	92

(六)对比性联想	93
(七)关系联想	95
(八)辩证联想	98
三、发散	121
(一)发散思维的训练	121
(二)综合举例	145
4. 分析\Leftrightarrow综合	198
5. 类比思想	214
一、类比的概念	214
(一)什么是类比	214
(二)类比中有比较,但比较不是类比	215
(三)两个要点	215
(四)类比推理的步骤	215
二、类比的作用	216
(一)将知识进行理线串点	216
(二)导向作用	216
(三)方法移植作用	219
(四)立体几何与平面几何的类比	220
(五)类比形同质异问题,澄清易混的概念	225
6. 分解\Leftrightarrow合成	227
一、一般问题中的运用	228
二、代数和三角问题中的运用	234
三、在立体几何中的运用	240
(一)将三棱柱补形为平行六面体	241
(二)棱锥补形为棱柱	242

(三)棱台补形为棱锥	244
(四)将不规则几何体补形为简单几何体	246
7. 参数讨论	249
一、参数讨论的必要性和时机	249
(一)必要性	249
(二)参数讨论的时机	252
二、字母参数的讨论方法	254
(一)从题涉的数学概念、性质等进行分类讨论	254
(二)从定理、公式、法则的适用范围进行分类讨论	256
(三)从平面上点的位置或图形变化进行分类讨论	258
(四)从参数的不同取值进行分类讨论	261
(五)从解题过程中出现的不同情况进行分类讨论	264
(六)结论是选言判断的命题,按可能出现的情况分类讨论 ..	266
三、分类讨论的原则、步骤和技巧	269
(一)分类的原则	269
(二)分类讨论的步骤	270
(三)简化讨论的方法与技巧	272
四、确定参数取值范围的方法	275
(一)判别式法	275
(二)函数最值法	275
(三)曲线参数方程法	277
(四)视参数为函数的方法	279
(五)图像法	280
(六)利用二次方程的根在给定区间内的充要条件	281
五、综合举例	283
8. 基本量法	295
一、基本量的概念	295

(一)基本量和基本量法	295
(二)有关“数”的问题	296
(三)有关“形”的问题	296
二、基本量的应用	297
(一)求轨迹方程	297
(二)条件式的证明与求解	299
(三)解不等式和方程	301
(四)平面几何的证明题	302
9. 转换	313
一、转换思想的表现	313
(一)已知条件的转换	313
(二)问题结论的转换	317
(三)命题形式的转换	321
(四)数与形的转换	342
(五)由复杂向简单转换	346
(六)增量代换法	352
(七)辅助式代换法	354
(八)空间图形转换成平面图形	364
(九)各学科知识间的转换	374
(十)化归法解三角问题	378
二、实现转化的途径	383
(一)“退中求进”	383
(二)“以进求退”	390
10. 特殊\Leftrightarrow一般	397
一、归纳思想	397
二、在“变”中求“不变”	405
(一)特殊位置法	405

(二)特殊值法	408
三、求解定值问题的方法	416
(一)“投靠法”	416
(二)化简求值法	418
(三)消去变量法	419
(四)巧赋特殊值法	421
四、数学归纳法	427
(一)几点注意	427
(二)几点说明	430
11. 换元法	435
一、换元法	435
二、常见几种类型的换元法	436
(一)有理式代换法	436
(二)根式代换法	437
(三)指数、对数式代换法	438
(四)三角代换法	439
(五)变量代换法	440
三、换元法的应用	442
(一)换元法证不等式	442
(二)用换元法求数列通项	443
四、以任意实数为条件问题的解法	445
(一)参变量分离法	445
(二)判别式法	446
(三)特殊值法	447
12. 数\Leftrightarrow形	449
一、以数辅形	449

二、以形助数	456
(一)构造“两点间的距离”解题	457
(二)构造“线段的中点”解题	461
(三)构造“点到直线的距离”解题	462
(四)构造“直线的斜率”解题	464
(五)构造“直线的方程”解题	467
(六)构造“单位圆”解题	470
(七)构造“直线与圆的位置关系”解题	471
(八)构造“圆锥曲线”用其定义和方程解题	474
(九)构造“参数方程”解题	480
(十)构造“极坐标方程”解题	481
(十一)借助图形证三角不等式	481
三、数形结合	486
13. 辩证思想	494
一、“熟悉”与“陌生”	494
二、“合”与“分”	495
三、“正”与“逆”	498
四、“动”与“静”	500
五、“进”与“退”	504
六、“强化”与“弱化”	507
七、“特殊化”与“一般化”	509
(一)特殊化	509
(二)一般化	511
八、“曲”与“直”	512
九、“主”与“次”	517
(一)变换主元、次元的位置	517
(二)引入参数代替题中的主元	518

(三) 消去主元,使次元升为主元	518
十、“举一反三”与“反三为一”	519
(一) 举一反三	519
(二) 反三为一	528
14. 构造与配凑	532
一、构造法	532
(一)构造命题法	532
(二)构造数学模型	534
(三)构造表达式	542
(四)构造函数法	542
(五)构造图形法	559
二、配凑法	565
(一)应用	565
(二)配凑的方法	570
(三)变更原题的形式	581
(四)配偶	582
15. 对称	587
16. 解后思	597
一、检查习题解答的若干方法	597
(一)量纲检验	597
(二)数形结合法	598
(三)特殊化与一般化检查法	600
(四)简单化与具体化检查法	601
(五)完备性检查法	602
(六)汇聚性检查法	605
(七)逻辑性检查法	606

(八)针对性检查法	607
二、“解后思”，思什么	609
(一)从解题步骤上进行简缩，避免繁琐运算	609
(二)从解题途径上进行联想，从优选择解法	610
(三)从解题方法上进行类比，一法多用	612
(四)从命题形式上进行变换、引伸，将命题拓广	613
(五)习题网的形成	614

1. 关键——双基

基础知识
基本方法

一、重视双基,减少解题失误

解题能力的高低、证题方法的好坏,决定于分析问题和解决问题的能力.但这种能力在很大程度上取决于对基础知识的理解程度和对基本方法的灵活运用.我们从下面一些学生解题失误的表现,就可以探求出基础知识与解题能力之间的关系,借此引起读者对“双基”的重视.

学生在解题时经常出现以下六个方面的失误.

(一) 不善于归纳,解题方向不明确

对某个公式(法则)要善于总结、归纳它的特征和使用方法,这对熟练掌握这一知识和提高使用这一知识的能力将起到重要作用.

有的学生解题时解答方向不明确,感到无从下手,原因就是对基础知识的理解不深.

例 1 已知
$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = a, & \textcircled{1} \\ \cos\alpha + \cos\beta = b, & \textcircled{2} \end{cases}$$

求 $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$.

分析 要求一个三角函数值,除直接利用三角函数的定义外,还可用同角三角函数关系,或先求出该角(本题即为

$$\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$\frac{\alpha - \beta}{2}$ 的倍角的余弦, 或先求出该角的半角的正切. 根据已知便能迅速排除利用定义或先求它半角 $\frac{\alpha - \beta}{2}$ 的正切两种情况, 从而确定两种解法.

解法一 (先求它倍角的余弦)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

由 ① 的平方加 ② 的平方, 得

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}, \text{ 再由半角公式}$$

$$\leq \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{1 + \cos(\alpha - \beta)}} = \pm \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}.$$

解法二 (由已知条件可先求出它同角的某三角函数的值)

将 ①、② 和差化积, 得

$$2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = a, \quad \text{③}$$

$$2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = b. \quad \text{④}$$

根据所求式 $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$, 不应消去 $\frac{\alpha - \beta}{2}$, 而应消去 $\frac{\alpha + \beta}{2}$, 故不应两式相除.

由 ③ 平方加 ④ 的平方, 得

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

$$\begin{aligned} \therefore \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} &= \pm \sqrt{\sec^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} - 1} = \pm \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$