曹德智

高中数学解题
思想·方法·技巧

江苏科学技术出版社

高中数学

解题思想 方法 技巧

曹德智

江苏科学技术出版社

高中数学解题思想方法技巧

编　　著　曹德智
责任编辑　马桂琴

出版发行　江苏科学技术出版社
　　　　　(南京市中央路165号,邮编:210009)
照　　排　南京展望照排印刷有限公司
印　　刷　丹阳教育印刷厂

开　　本　787×1092毫米　1/32
印　　张　20
字　　数　440 000
版　　次　1998年6月第1版
印　　次　1998年6月第1次印刷
印　　数　1—3 000册

标准书号　ISBN 7—5345—2563—2/G・448
定　　价　20.70元

前　　言

数学思想、方法、技巧，对提高数学能力的作用已越来越受到广泛的重视．近几年高考也日益重视对数学思想方法、数学素质的考核，因而在高中毕业前夕的总复习阶段，进行一次系统的数学思想方法教育已显得越来越重要．为了提供一份教育素材，特据本人三十多年的教学实践，按照数学思想方法技巧的体系，分别进行分析介绍，借以提高学生掌握数学思想方法技巧的水平，如能有助于摆脱题海的束缚，作者将感到莫大的欣慰．

曹德智

引　言

解数学题，要根据题目所提供的信息，进行"加工"、"化简"和"变换"，从而探索和发现"已知"与"所求"、"条件"与"结论"之间的逻辑关系．即使解综合题，虽然比较复杂，涉及的知识点、理论及其方法较多，但将它分解开来，总可归结为若干个有联系的、较简单的基本问题．因此，我们应竭力找出在解题中起关键作用的内容．由于知识和方法的运用常基于科学思想观念的具体指导，所以在分析数学题时，要贯穿抽象、概括、数学化的思想，系统化归思想，形数结合思想等．通过解题实践中的自觉运用，要努力做到：会拆题（将较复杂的问题拆成若干个基本问题），会化简（在合乎逻辑的前提下把原题化简成较简单的题目），会思考（运用正确的思想方法），逐步积累解题经验，提高解题能力．

在解数学题时要注意以下几点：

首先要认清每道题的逻辑基础．每道数学题都可看作一定数学系统的子系统．题设与所在系统的公理应具有充分性（完备性）—— 足以推导出题目的结论；相容性 —— 不导致矛盾；独立性 —— 每个条件都不是多余的．

其次要注意解题的合理性和协调性．数学题解法各个步骤和各种活动的展开和连接，线索要清楚，舒展要自然，解法的各项内容的分工、配备要适当．

再次，为了培养发散性思维能力，在解题时应尽可能地从各种不同的角度去寻求多种解法．一题多解不但有助于思维

发散性和广阔性的训练,还有助于对各种解法进行比较,选择优化等能力的培养.

目　录

1. 关键 —— 双基

基础知识

基本方法.

一、重视双基，减少解题失误

解题能力的高低、证题方法的好坏，决定于分析问题和解决问题的能力．但这种能力在很大程度上取决于对基础知识的理解程度和对基本方法的灵活运用．我们从下面一些学生解题失误的表现，就可以探求出基础知识与解题能力之间的关系，借此引起读者对“双基”的重视．

学生在解题时经常出现以下六个方面的失误．

（一）不善于归纳，解题方向不明确

对某个公式（法则）要善于总结、归纳它的特征和使用方法，这对熟练掌握这一知识和提高使用这一知识的能力将起到重要作用．

有的学生解题时解答方向不明确，感到无从下手，原因就是对基础知识的理解不深．

例 1 已知 $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=a, & ① \\ \cos\alpha+\cos\beta=b, & ②\end{cases}$

求 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

分析　要求一个三角函数值，除直接利用三角函数的定义外，还可用同角三角函数关系，或先求出该角（本题即为

$\frac{\alpha-\beta}{2}$）的倍角的余弦，或先求出该角的半角的正切．根据已知便能迅速排除利用定义或先求它半角$\frac{\alpha-\beta}{2}$的正切两种情况，从而确定两种解法．

解法一 （先求它倍角的余弦）

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,

由 ① 的平方加 ② 的平方，得

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{a^2+b^2-2}{2}$，再由半角公式

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos(\alpha-\beta)}}=\pm\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

解法二 （由已知条件可先求出它同角的某三角函数的值）

将 ①、② 和差化积，得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=a, \qquad ③$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=b. \qquad ④$$

根据所求式 $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$，不应消去$\frac{\alpha-\beta}{2}$，而应消去$\frac{\alpha+\beta}{2}$，故不应两式相除．

由 ③ 平方加 ④ 的平方，得

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a^2+b^2}{4},$$

$$\therefore \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\sqrt{\sec^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}-1}=\pm\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$