非线性常微分方程若干边值问题的研究

（第2版）

马德香　公敬　著

北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

非线性常微分方程若干边值问题的研究

（第2版）

马德香　公敬　著

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是作者近年来研究成果的总结。在介绍拓扑度基本理论的基础上，对带 p-Laplace 算子的边值问题在局部或非局部边界条件下，给出了有解性和多解性的判断依据，展示了边值问题的研究技巧和方法。

本书适用于数学专业非线性泛函分析方向或应用微分方程方向研究生及对边值问题研究有兴趣的人员。

图书在版编目（CIP）数据

非线性常微分方程若干边值问题的研究/马德香，公敬著．—2 版．—北京：北京交通大学出版社，2013. 11

ISBN 978 - 7 - 5121 - 1689 - 4

Ⅰ. ① 非…　Ⅱ. ① 马…　② 公…　Ⅲ. ① 非线性方程-常微分方程-边值问题-研究　Ⅳ. ①O175. 14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 251097 号

责任编辑：黎　丹

出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010 - 51686414

北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮编：100044

印 刷 者：北京艺堂印刷有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：170 × 235　　印张：14. 5　　字数：279 千字

版　　次：2013 年 11 月第 2 版　　2013 年 11 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978 - 7 - 5121 - 1689 - 4/O · 126

印　　数：1 ~ 800 册　　定价：48. 00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。

投诉电话：010 - 51686043；传真：010 - 62225406；E-mail：press@ bjtu. edu. cn。

第 2 版序

第 2 版是第 1 版的完善。我们几乎对每章内各节的次序进行了调整，便于由简到繁进行阅读。第 2、3、4 章增添了部分内容，增加了第 6 章，使本书内容更丰富。对书末的参考文献作了一些调整。另外，对第 1 版的书写错误进行了修改、书写格式进行了调整，使其更规范。

作　者

2013 年 9 月

序

微分方程边值问题作为有实际应用背景的数学研究领域，一直处于微分方程理论和非线性泛函分析的交叉和结合点上。近十多年来带 p-Laplace 算子的边值问题得到广泛重视，人们从非牛顿流体力学、多孔介质中的气体湍流、弹性理论、血浆问题和宇宙物理等大量的应用领域及对非线性偏微分方程的径向解的研究中发现，对这些问题的讨论可归结为所谓的带 p-Laplace 算子的微分方程在不同边界条件下的边值问题。另一方面，与经典的常微分方程两点边值问题相比，由于非局部（比如多点）边值问题可以更精确地描述许多重要的物理现象，因此近年来关于常微分方程非局部边值问题的研究亦成为热点。本书内容是作者近年来研究成果的总结。

全书共分 5 章。

第 1 章介绍拓扑度理论，并由拓扑度理论导出边值问题研究中常用的不动点定理和连续性定理。这些定理是以后各章研究具体边值问题所需的理论基础。

第 2 章研究带 p-Laplace 算子的二阶边值问题。本章主要采用单调迭代方法得到了多类带 p-Laplace 算子的多点边值问题解的存在性。

第 3 章研究带 p-Laplace 算子的二阶奇异边值问题。本章中对非线性项的各种奇异情况进行分类，利用不动点定理得到相应问题的正解。

第 4 章研究带 p-Laplace 算子的三阶边值问题。本章中分别利用单调迭代技巧和上下解方法得到两类边值问题正解和解的存在性。

第 5 章讨论带 p-Laplace 算子的四阶边值问题。本章首先对拟周期边值利用 Leggett-Williams 不动点定理得到多解的存在性。然后，分别利用上下解方法和不动点定理讨论了另外两类边值问题。

书中第 2、3、4、5 章全部内容都已发表于国内外学术刊物，尽管如此，错漏不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

在此，感谢教育部中央高校基金的资助，感谢华北电力大学数理系各位领导、同事的支持。

作　者
2012 年 3 月于华北电力大学

目　　录

第 1 章　度理论和不动点定理

度理论和相关的不动点定理是研究非线性常微分方程边值问题的基本工具.

1.1　度理论概要

度理论是非线性泛函分析的核心内容. 1912 年 L. E. J. Brouwer 首先对有限维空间的连续映射建立拓扑度 [1]. 1934 年 J. Leray 和 J. Schauder 将 Brower 的理论推广到无穷维空间, 在 Banach 空间中对一类全连续映射定义了拓扑度 [2][3], 使度理论近乎成熟, 并成为研究非线性微分方程的重要工具. J. T. Sch-wartz [4] 在 1969 年系统地介绍了度理论, 其后 J. Mawhin[5][6] 成功地将 Leray-Schauder 方法用于非线性边值问题的求解, 建立了连续性定理, 成为一系列研究工作的工具.

国内从 20 世纪 80 年代中期开始, 已陆续出现介绍度理论的书籍, 如陈文塬 [8] 、郭大钧 [9]、赵义纯 [10] 、钟承奎 [11]、葛渭高 [12]、郭大均 [13]、马如云 [14] 等编写的教材都可参考.

1.1.1　度应具有的性质

设 $(a,\ b) \subset \mathbf{R}$ 为一个开区间, $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数, $p \in \mathbf{R}$ 是一个定值, 则方程 $f(x) = p$ 有解的一个最简单的充分条件是

$$(f(a) - p)(f(b) - p) < 0.$$

现在考虑图 $G = \{(x,\ f(x)) : x \in [a,\ b]\}$ 及直线 $L = \{(x,\ p) : x \in [a,\ b]\}$. 如果 $x = x_0 \in [a,\ b]$ 是 $f(x) = p$ 的解, 则当且仅当 $(x_0,\ p)$ 是 G 和 L 的公共点. 假设 $f(a),\ f(b) \neq p$ 且 G 和 L 仅有有限个公共点

$$(x_1,\ p),\ (x_2,\ p),\ \cdots,\ (x_m,\ p)$$

将每个 x_k 和一个整数对应: 如果 $f(x)$ 在 x_k 单调增大, G 由 L 下方经 $(x_k,\ p)$ 进入 L 的上方, 对 x_k 赋值 1; 反之由 L 上方进入 L 下方, 则赋值 -1; G 在经过 $(x_k,\ p)$ 时不穿越 L, 则赋值 0. 将各公共点处对 x_k 的赋值求代数和, 这个和必定是整数, 由于赋值的代数和与区间 $(a,\ b)$、实数 p 及 $[a,\ b]$ 上端点处不等于 p 的连续函数 f 有关, 所以它可以表示为 $\sigma\{f,\ (a,\ b),\ p\}$, 记 $E = \{(f,\ (a,\ b),\ p) : (a,\ b) \subset \mathbf{R}$为有界开区间, $p \in \mathbf{R},\ f \in C[a,\ b],\ f(a) \neq p,\ f(b) \neq p\}$, 则赋值代数和为算子

$$\sigma : E \to \mathbf{Z}$$

满足

(1) $\sigma\{\mathrm{id},(a,b),p\}=\begin{cases}1, & p\in(a,b),\\ 0, & p\notin[a,b],\end{cases}$ 其中 id 表示 $\mathbf{R}$ 上的恒等算子;

(2) $\sigma\{f,\ (a,\ b),\ p\}\neq 0$ 时, $f(x)=p$ 在 $(a,\ b)$ 上有解.

这样对 $f(x)=p$ 有解性的讨论就转为对赋值和 $\sigma\{f,\ (a,\ b),\ p\}$ 取值的讨论.

由此, 希望将赋值代数和 σ 的概念推广到一般的线性赋范空间 $X=\mathbf{R}^n$ 上, 用于讨论 $f(x)=p$ 在 D 上是否有解的问题, 其中,

$$f:\overline{D}\subset X\to X\quad (D\subset X\text{为有界开集})$$

$p\in X$. 这时赋值代数和 σ 用相应的算子符号 deg (度) 表示. 记 $E=\{(f,\ D,\ p):D\subset X\text{有界开},\ p\in X,\ f\in C(\mathbf{R}^n),\ \ \text{对}\ \forall\ x\in\partial D,\ f(x)\neq p\}$, 则

$$\deg:E\to\mathbf{Z}$$

表示一个算子. 为了使算子 deg 的值(就是度)与 $f(x)=p$ 的有解性联系起来, 并且对复杂的映射 f 能在一定条件下计算出度的值, 要求它具有如下性质.

(1) 正规性.

$$\deg\{\mathrm{id},\ D,\ p\}=\begin{cases}1, & p\in D,\\ 0, & p\notin\overline{D},\end{cases}$$

其中 $\mathrm{id}:X\to X$ 为恒等映射.

(2) 可解性.

$$\deg\{f,\ D,\ p\}\neq 0\Rightarrow f(x)=p\ \ \text{在}D\text{中有解}.$$

(3) 区域可加性. 设 $D_1,\ D_2\subset X$ 为有界开集, $D_1\cap D_2=\varnothing$, 有

$$D=D_1\cup D_2\Rightarrow\deg\{f,\ D,\ p\}=\deg\{f,\ D_1,\ p\}+\deg\{f,\ D_2,\ p\}.$$

(4) 切除性. 设 $K\subset\overline{D}$ 为闭集,

$$p\notin f(K)\Rightarrow\deg\{f,\ D,\ p\}=\deg\{f,\ D\setminus K,\ p\}.$$

(5) 同伦不变性. 设 $H:\overline{D}\times[0,\ 1]\to X$ 连续, $p:[0,\ 1]\to X$ 连续, 且 $\forall\lambda\in[0,\ 1]$,

$$p(\lambda)\notin H(\partial D,\ \lambda)\Rightarrow\deg\{H(\cdot,\ \lambda),\ D,\ p(\lambda)\}\ \text{与}\lambda\ \text{无关}.$$

1.1.2 Brouwer 度的建立

设 $X=\mathbf{R}^n$, 对 X 中开集 D, 首先考虑 $f\in C^1(\overline{D})$ 且要求 $p\in X\backslash(f(\partial D)\cup Z_f)$, 其中

$$Z_f=\{f(x):\exists\ x\in\overline{D}\text{使得}\det f'(x)=0\}.$$

这时可以证明 $f^{-1}(p)=\{x\in D: f(x)=p\}$ 是一个有限集, 因而可定义

$$\deg\{f,\ D,\ p\}=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sgn}(\det f'(x)). \tag{1.1.1}$$

不难验证, 这样定义的度具有性质 (1)~(5).

利用 Sard 引理, 当 $p\in f(D)\cap Z_f$ 时, 存在 q 充分靠近 p, $q\notin Z_f$, 再由 Heinz 的工作可定义

$$\deg\{f,\ D,\ p\}:=\deg\{f,\ D,\ q\}, \tag{1.1.2}$$

从而去掉了 $p\notin Z_f$ 的限制.

最后, $f\in C(\overline{D})$ 时, 可用 $g\in C^1(\overline{D})$ 逼近, 当

$$\|g-f\|<\rho(p,\ f(\partial D))$$

时, 定义

$$\deg\{f,\ D,\ p\}:=\deg\{g,\ D,\ p\}. \tag{1.1.3}$$

可以证明, 由此定义的度 $\deg\{f,\ D,\ p\}$ 与具体的 g 无关. 这样就建立了 E 上的整值连续函数. 对 $p\notin f(\partial D)$ 时 f 在 D 上关于 p 的度, 称为 Brouwer 度.

注1.1.1　当 n 维空间 X 不是 $\mathbf{R}^n$ 时, 可以通过 X 和 $\mathbf{R}^n$ 之间的同胚而建立度的概念.

设 n 维空间 X 到 $\mathbf{R}^n$ 有同胚映射

$$h: X\to\mathbf{R}^n,$$

$D\subset X$ 是有界开集, $F:\overline{D}\to X$ 为连续映射, 且 $p\notin F(\partial D)$. 这时 $f=h\circ F\circ h^{-1}: h(\overline{D})\to\mathbf{R}^n$ 为连续映射, 且 $h(\overline{D})=\overline{h(D)}$, $h(D)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集. 显然, 由 $p\notin F(\partial D)$ 可得

$$h(p)\notin h\circ F(\partial D)=h\circ F\circ h^{-1}(h(\partial D))=f(h(\partial D))=f(\partial h(D)).$$

因而可以定义

$$\deg\{F,\ D,\ p\}:=\deg\{f,\ h(D),\ h(p)\}. \tag{1.1.4}$$

由此建立的度, 具有性质 (1)~(5).

注1.1.2　(简化定理) 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, $F:\overline{D}\to\mathbf{R}^m(m<n)$ 连续 (其中, $\mathbf{R}^m$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间). 令 $f=I-F$, 显然, $f=I-F:\overline{D}\to\mathbf{R}^m$ 连续. 设 $p\in\mathbf{R}^m\setminus f(\partial D)$, 用 g 表示 f 在 $\mathbf{R}^m\cap\overline{D}$ 上的限制. 于是, 有化 $\mathbf{R}^n$ 中的 Brouwer 度为 $\mathbf{R}^m$ 中的 Brouwer 度的公式

$$\deg\{I-F,\ D,\ p\}:=\deg\{(I-F)|_{\mathbf{R}^m},\ D\cap\mathbf{R}^m,\ p\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $I:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为恒等算子, $I|_{\mathbf{R}^m}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 上的恒等算子.

1.1.3 Leray-Schauder 度

在有限维空间上对连续算子建立的 Brouwer 度, 不能简单地推广到无穷维空间. 在一般实 Banach 空间中, 不可能对所有的连续映射都定义度, 使其具有度的基本性质 (1)~(5), 见 [9]. 因此, 对于一般实 Banach 空间, 不可能考虑所有的连续映射, 而必须从连续映射中分出一类性质较好的映射来, 而全连续映射可以用有限维映射来逼近, 这就启发我们可以用有限维空间中的度来定义全连续映射的度. 给定无穷维空间 X 中的有界开子集 D 及 $F:\overline{D}\to X$ 的全连续算子, J. Leray 和 J. Schauder 成功地将 Brouwer 度推广到 $\overline{D}$ 上的无穷维算子 $(I-F):\overline{D}\to X$.

设 X 为实 Banach 空间, $D\subset X$ 为非空有界开集, $F:\overline{D}\to X$ 全连续. 令 $f(x)=x-F(x),\forall x\in\overline{D}$, 即 $f=I-F$. 设 $p\in X\backslash f(\partial D)$. 又 f 是闭映射, 故 $f(\partial D)$ 是 X 中闭集, 从而 $\tau=d(p,f(\partial D))=\inf\limits_{x\in\partial D}\|f(x)-p\|>0$. 由全连续映射的逼近定理知, 存在 X 的有限维子空间 $X^{(n)},p\in X^{(n)}$ 及有界连续映射 $F_n:\overline{D}\to X^{(n)}$ 使

$$\|F(x)-F_n(x)\|<\tau,\ \forall x\in\overline{D}. \tag{1.1.6}$$

考察 $X^{(n)}$ 的有界开集 $D_n=X^{(n)}\cap D$ 和映射 $f_n(x)=x-F_n(x)$. 显然, $f_n:\overline{D_n}\to X^{(n)}$ 连续. 今证 $p\notin f_n(\partial D_n)$. 事实上, 当 $x\in\partial D_n\subset\partial D$ 时, 由 (1.1.6) 知

$$\|f_n(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|F(x)-F_n(x)\|>0.$$

由此可知, $X^{(n)}$ 中的度 $\deg_n\{f_n,D_n,p\}$ 有意义. 定义全连续映射 f 的 Leray-Schauder 度 $\deg\{f,D,p\}$ 为 $\deg_n\{f_n,D_n,p\}$, 即

$$\deg\ \{f,D,p\}:=\deg_n\{f_n,D_n,p\}. \tag{1.1.7}$$

这样就得到了 Leray-Schauder 度. 容易证明 (1.1.7) 所定义的度具有性质 (1)~(5).

1.2 不动点定理

根据度理论, 可以建成各种各样的不动点定理. 一般原则是: 若全连续映射 $f=I-F:\overline{D}\to X$ 满足 $\deg\{f,D,\theta\}\neq 0$, 则由可解性知存在 $x^*\in D$, 使 $f(x^*)=\theta$, 即 $x^*=F(x^*)$, 也即 x^* 是 F 的不动点. 本小节定理证明可参看相应文献, 此处略.

1.2.1 Schauder 不动点定理

定理1.2.1 (E.Rothe) 设 X 是实 Banach 空间. $D\subset X$ 为非空有界凸开集, $F:\overline{D}\to X$ 为全连续算子, 且 $F(\partial D)\subset\overline{D}$, 则 F 在 $\overline{D}$ 中有不动点.

定理1.2.2 (Schauder) 设 X 是实 Banach 空间. $\overline{D}\subset X$ 为非空有界凸闭子集, 设 $F:\overline{D}\to\overline{D}$ 为全连续算子, 则 F 在 $\overline{D}$ 中有不动点.

定理1.2.3　(Leray-Schauder) 设 X 是实 Banach 空间. $F: X \to X$ 为全连续算子. 如果集合 $\{x|x \in X, x = \lambda Fx, 0 < \lambda < 1\}$ 是有界的, 则 F 在 X 中的闭球 T 中必有不动点, 这里

$$T = \{x:\ x \in X, \|x\| \leqslant R\},$$
$$R = \sup\{\|x\|:\ x = \lambda Fx, 0 < \lambda < 1\}.$$

定理1.2.4　(Altman) 设 X 是实 Banach 空间. D 是 X 中有界开集, $\theta \in D$. 设 $F: \overline{D} \to X$ 为全连续算子且满足

$$\|Fx - x\|^2 \geqslant \|Fx\|^2 - \|x\|^2,\ x \in \partial D,$$

则 F 在 $\overline{D}$ 中有不动点.

下面是非线性备择性定理.

定理1.2.5　设 X 为线性赋范空间, $K \subset X$ 为有界凸子集, $D \subset K$ 为相对开集, $T: \overline{D} \to K$ 为全连续算子, 点 $p \in D$, 则下列结论至少有一个成立,

(1) T 在 $\overline{D}$ 中有不动点.

(2) $\exists x \in \partial D$, $\lambda \in (0,\ 1)$, 使 $x = \lambda Tx + (1-\lambda)p$ 有解.

特别地有以下定理.

定理1.2.6　假设 D 是线性赋范空间 E 中一个凸子集 K 中的相对开子集, $0 \in D$. $A: \overline{D} \to K$ 是紧映射. 那么下列二者至少其一成立,

(1) A 在 $\overline{D}$ 中存在不动点,

(2) 存在 $x \in \partial D$ 和 $0 < \lambda < 1$ 使得 $x = \lambda Ax$.

1.2.2　锥上不动点定理

设 X 是赋范实线性空间, $K \subset X$ 为闭凸集, 满足:

(1) $\forall x \in K$, $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in K$;

(2) x, $-x \in K \Rightarrow x = 0$,

则 K 称为 X 中的一个闭锥, 简称锥.

把 Banach 空间 X 中有界开集上的全连续映射的 Leray-Schauder 度的概念, 推广到锥 K 中有界开集上的全连续映射的情形, 从而可以得到锥上各不动点定理. 推广过程及各不动点定理的详细证明可参见 [9], 以及相应其他文献, 此处略.

定理1.2.7　(锥拉伸与锥压缩定理) 设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是锥, D_1, $D_2 \subset X$ 为非空有界开集, 且 $\theta \in D_1, \overline{D}_1 \subset D_2$, 设 $F: (\overline{D}_2 \backslash D_1) \cap K \to K$ 为全连续算子, 满足

(1) $Fx \ngeq x$, $\forall x \in K \cap \partial D_1$;　$Fx \nleq x$, $\forall x \in K \cap \partial D_2$(即锥拉伸) 或

(2) $Fx \ngeq x,$, $\forall x \in K \cap \partial D_2$;　$Fx \nleq x,$, $\forall x \in K \cap \partial D_1$(即锥压缩),

则 F 在 $K \cap (D_2 \setminus \overline{D}_1)$ 上有不动点.

定理1.2.8 (范数形式锥拉伸与锥压缩定理) 设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是锥, D_1, $D_2 \subset X$ 为非空有界开集, 且 $\theta \in D_1, \overline{D}_1 \subset D_2$, 设 $F : (\overline{D}_2 \backslash D_1) \cap K \to K$ 为全连续算子, 满足

(1) $\|F(x)\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial D_1$; $\|F(x)\| \geqslant \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial D_2$(即范数锥拉伸) 或

(2) $\|F(x)\| \geqslant \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial D_1$; $\|F(x)\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial D_2$ (即范数锥压缩),

则 F 在 $\overline{D}_2 \setminus D_1$ 上有不动点.

推论1.2.1 设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 为锥, 记

$$K_i = \{x \in K : \|x\| < r_i\}, \quad i = 1,\ 2, \quad 0 < r_1 < r_2,$$

如果 $F : \overline{K}_2 \to K$ 为全连续算子, 且

(1) $\|F(x)\| \leqslant r_1,\ x \in \partial K_1$; $\|F(x)\| \geqslant r_2,\ x \in \partial K_2$ 或

(2) $\|F(x)\| \geqslant r_1,\ x \in \partial K_1$; $\|F(x)\| \leqslant r_2,\ x \in \partial K_2$,

则 F 在 $\overline{K}_2 \setminus K_1$ 上有不动点 $x : r_1 \leqslant \|x\| \leqslant r_2$.

下面给出其他形式的锥拉伸锥压缩定理.

定理1.2.9 设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是锥, D_1, $D_2 \subset X$ 为非空有界开集, 且 $\theta \in D_1, \overline{D}_1 \subset D_2$, 设 $F : (\overline{D}_2 \backslash D_1) \cap K \to K$ 为全连续算子. 设 $u_0 \in K \backslash \{\theta\}$, 令

$$K_{u_0} = \{x | \text{存在} \lambda > 0, \text{使 } x \geqslant \lambda u_0\}.$$

如果满足

(1) $Fx \ngeqslant (1+\varepsilon)x,\ \forall x \in K \cap \partial D_1, \varepsilon > 0$; $Fx \nleqslant x,\ \forall x \in K_{u_0} \cap \partial D_2$(即锥拉伸) 或

(2) $Fx \ngeqslant (1+\varepsilon)x,\ \forall x \in K \cap \partial D_2, \varepsilon > 0$; $Fx \nleqslant x,\ \forall x \in K_{u_0} \cap \partial D_1$(即锥压缩),

则 F 在 $K \cap (\overline{D}_2 \setminus D_1)$ 上有不动点,

定理1.2.10 设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是一个闭锥, D_1, D_2 为 X 中非空有界开集, 且 $\overline{D}_1 \subset D_2$, 设 $F : (\overline{D}_2 \backslash D_1) \cap K \to K$ 为全连续算子, 满足

(1) $F(x) \neq \lambda x,\ \forall \lambda \in [0,\ 1),\ x \in \partial D_1$; $F(x) \neq \lambda x,\ \forall \lambda \in (1,\ \infty),\ x \in \partial D_2$ 或

(2) $F(x) \neq \lambda x,\ \forall \lambda \in (1,\ \infty),\ x \in \partial D_1$; $F(x) \neq \lambda x,\ \forall \lambda \in [0,\ 1),\ x \in \partial D_2$,

则 F 在 $\overline{D}_2 \setminus D_1$ 上有不动点.

将算子关于范数的压缩或拉伸换成关于某个泛函的压缩或拉伸, 得到如下不动点定理.

设 K 是 Banach 空间 X 中的一个锥, $\psi : K \to \mathbf{R}^+$ 为连续泛函, 对 $\forall x,\ y \in K,\ \forall \lambda \in [0,\ 1]$, 满足

$$\psi(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda\psi(x) - (1-\lambda)\psi(y) \geqslant 0 (\leqslant 0),$$

则 ψ 称为 K 上的一个凹 (凸) 泛函.

定理1.2.11　设 K 是 Banach 空间中的一个闭锥, $\alpha,\ \beta: K \to \mathbf{R}^+$ 为连续凸泛函满足 $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x),\ \lambda \geqslant 0; \beta(\mu x) = |\mu|\beta(x),\ \mu \in \mathbf{R}$. 又设存在 $c > a > 0,\ b,\ M > 0$, 使

$$\|x\| \leqslant M\max\{\alpha(x),\ \beta(x),\ \text{当}\ x \in \overline{D}\},$$

其中 $D = \{x \in K : 0 < \alpha(x) < c,\ \beta(x) < b\}$ 为 K 中开集, 且 $\exists p \in K \setminus \{0\}$ 使

$$\alpha(x+p) = \alpha(x) + \alpha(p), \quad \beta(x+p) = \beta(x), \quad x \in K.$$

设 $T : \overline{D} \to K$ 为全连续算子. 如果

(1) 当 $\beta(x) = b$ 时, $\beta(Tx) \leqslant b$;

(2) 当 $\alpha(x) = c$ 时, $\alpha(Tx) \leqslant c$, 当 $\alpha(x) = a$ 时, $\alpha(Tx) \geqslant a$, 或
当 $\alpha(x) = c$ 时, $\alpha(Tx) \geqslant c$, 当 $\alpha(x) = a$ 时, $\alpha(Tx) \leqslant a$,

则 T 在 $\overline{D}$ 中至少有一个不动点.

设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是锥, $\alpha,\ \beta : X \to \mathbf{R}^+$ 为两个连续泛函, 满足

$$\alpha(x),\ \beta(x) \leqslant \|x\| \leqslant M\max\{\alpha(x),\ \beta(x)\}, \tag{1.2.1}$$

$$\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x), \quad \beta(\lambda x) = \lambda\beta(x),\ x \in K, \quad \lambda \in [0,\ 1]. \tag{1.2.2}$$

定理1.2.12　设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是锥, 设常数 $r_2 > r_1 > 0$, $L_2 > L_1 > 0$, 记

$$D_i = \{x \in K : \alpha(x) < r_i,\ \beta(x) < L_i\}, \quad i = 1,\ 2.$$

则 $\theta \in D_1 \subset \overline{D}_1 \subset D_2$, 又记

$$C_i = \{x \in K : \alpha(x) = r_i,\ \beta(x) \leqslant L_i\},\ i = 1,\ 2,$$
$$D_i = \{x \in K : \alpha(x) \leqslant r_i,\ \beta(x) = L_i\},\ i = 1,\ 2.$$

设 $T : K \to K$ 是全连续算子, 满足

(1) $\alpha(Tx) \leqslant r_1,\ x \in C_1,\ \beta(Tx) \leqslant L_1,\ x \in D_1$,
$\alpha(Tx) \geqslant r_2,\ x \in C_2,\ \beta(Tx) \geqslant L_2,\ x \in D_2$;

或

(2) $\alpha(Tx) \geqslant r_1,\ x \in C_1,\ \beta(Tx) \geqslant L_1,\ x \in D_1$,
$\alpha(Tx) \leqslant r_2,\ x \in C_2,\ \beta(Tx) \leqslant L_2,\ x \in D_2$,

则 T 在 $\overline{D}_2 \setminus D_1$ 中至少有一个不动点.

定理1.2.13　设 X 是 Banach 空间, $K \subset X$ 为一个闭锥. 又设 $\alpha : K \to \mathbf{R}^+$ 是一个连续泛函, 对 $\forall x \in K$ 及 $\lambda \geqslant 0$ 满足

$$\alpha(x) \leqslant \|x\|, \quad \alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x),$$

且存在 $\eta\in K\backslash\{0\}$，使

$$\alpha(\eta)=1,\quad \alpha(x+\eta)=1+\alpha(x).$$

设 $T:K\to K$ 为全连续算子，满足

(1) 存在非减函数 $m:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使 $\forall x\in K$，$d\geqslant 0$ 及 $\mu\in[0,\ 1]$，当 $x=\mu Tx+(1-\mu)d\eta$ 时有

$$\|x\|<m(\alpha(x+d\eta));$$

(2) 存在 a，$b>0$，使 $u\in K$ 时有

$$当\|u\|=a时,\|Tu\|\leqslant a,且当\alpha(u)=b时,\alpha(Tu)\geqslant b, \tag{1.2.3}$$

或

$$当\|u\|=a时,\|Tu\|\geqslant a,且当\alpha(u)=b时,\alpha(Tu)\leqslant b, \tag{1.2.4}$$

则 T 至少有一个不动点 u 满足

$$\min\{a,\ b\}\leqslant\|u\|,\quad \alpha(u)\leqslant\max\{a,\ b\}.$$

1.2.3 锥上多不动点定理

由定理 1.2.7 和 1.2.8 立即得到下面两个多不动点定理.

定理1.2.14 设 X 为 Banach 空间，$K\subset X$ 是锥，D_1，D_2，$D_3\subset X$ 为非空有界开集，且 $\theta\in D_1,\overline{D}_1\subset D_2,\overline{D}_2\subset D_3$，设 $F:(\overline{D}_3\backslash D_1)\cap K\to K$ 为全连续算子，满足

$$Fx\nleqslant x,\ \forall x\in K\cap\partial D_1;$$
$$Fx\ngeqslant x,\ \forall x\in K\cap\partial D_2;$$
$$Fx\nleqslant x,\ \forall x\in K\cap\partial D_3,$$

则 F 在 $K\cap(D_3\setminus\overline{D}_1)$ 上至少有两个不动点.

定理1.2.15 设 X 为 Banach 空间，$K\subset X$ 是锥，D_1，D_2，$D_3\subset X$ 为非空有界开集，且 $\theta\in D_1,\overline{D}_1\subset D_2,\overline{D}_2\subset D_3$，设 $F:(\overline{D}_3\backslash D_1)\cap K\to K$ 为全连续算子，满足

$$\|F(x)\|\geqslant\|x\|,\ \forall x\in K\cap\partial D_1;$$
$$\|F(x)\|\leqslant\|x\|,\ Fx\neq x,\ \forall x\in K\cap\partial D_2;$$
$$\|F(x)\|\geqslant\|x\|,\ \forall x\in K\cap\partial D_3,$$

则 F 在 $K\cap(\overline{D_3}\setminus D_1)$ 上至少有两个不动点.

由推论 1.2.1 很容易得出下面多个不动点的存在定理.

定理1.2.16 设 X 为 Banach 空间, $K\subset X$ 为锥，记 $K_i=\{x\in K:\|x\|<r_i\}$，其中 $i=1,\ 2,\ 3$，$r_3>r_2>r_1>0$，设 $F:\overline{K}_3\to K$ 为全连续算子, 如果

(1) $\|F(x)\| < r_1$, $x \in \partial K_1$; $\|F(x)\| > r_2$, $x \in \partial K_2$; $\|F(x)| \leqslant r_3$, $x \in \partial K_3$, 则 F 在 $\overline{K}_3$ 中至少有三个不动点 x_1, x_2, x_3,

$$\|x_1\| < r_1 < \|x_2\| < r_2 < \|x_3\| \leqslant r_3.$$

(2) $\|F(x)\| \geqslant r_1$, $x \in \partial K_1$; $\|F(x)\| < r_2$, $x \in \partial K_2$; $\|F(x)| \geqslant r_3$, $x \in \partial K_3$, 则 F 在 $\overline{K}_3$ 中至少有两个不动点 x_2, x_3,

$$r_1 \leqslant \|x_2\| < r_2 < \|x_3\| \leqslant r_3.$$

在定理 1.2.16 中, 将算子关于范数的压缩或拉伸换成某个泛函的压缩或拉伸, 可以得到类似的三个不动点的存在定理.

记

$$K_r = \{x \in K : \|x\| < r\},$$
$$\overline{K_r} = \{x \in K : \|x\| \leqslant r\},$$
$$K(\psi,\ a,\ b) = \{x \in K : a \leqslant \psi(x),\ \|x\| \leqslant b\}.$$

则有下述结论.

定理1.2.17　(leggett-williams) 设有常数 $0 < a < b < d \leqslant c$. 算子 $T : \overline{K}_c \to \overline{K}_c$ 为全连续, $\alpha : K \to r^+$ 为连续凹泛函, $\alpha(x) \leqslant \|x\|$ 对 $\forall x \in \overline{K}_c$ 成立, 又设

(1) $\{x \in K(\alpha,\ b,\ d) : \alpha(x) > b\} \neq \varnothing$, $\alpha(Tx) > b$, 当 $x \in K(\alpha,\ b,\ d)$,

(2) $\|Tx\| < a$, 当 $\|x\| < a$,

(3) $\alpha(Tx) > b$, 当 $x \in K(\alpha,\ b,\ c)$ 且 $\|Tx\| > d$,

则 T 至少有三个不动点 x_1, x_2, x_3, $\|x_1\| < a < \|x_3\|$, $\alpha(x_3) < b < \alpha(x_2)$.

对定理 1.2.16 中的情况 (2), 也可以用泛函条件代替范数条件, 给出全连续算子存在两个不动点的条件, 为此先给出一些相关的定义.

设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 为给定的锥, $\alpha : K \to r^+$ 为非负连续实泛函. 如果

$$当\ x,\ y \in K 且\ x \preceq y\ 时有\ \alpha(x) \leqslant \alpha(y),$$

则称 α 是 K 上的一个增泛函. 对 $\forall r > 0$, 记

$$K(\alpha,\ r) = \{x \in K : \alpha(x) < r\}.$$

定理1.2.18　[19] 设 K 是 Banach 空间 X 中的一个锥, α, $\gamma : K \to r^+$ 为非负连续增泛函, $\theta : K \to r^+$ 为非负连续泛函, 存在 m, $c > 0$, 使

(1) $\theta(0) = 0$. 当 $x \in \overline{K}(\gamma,\ c)$ 时, 有 $\gamma(x) \leqslant \theta(x) \leqslant \alpha(x)$, $\|x\| \leqslant m\gamma(x)$,

(2) 存在 $0 < a < b < c$, 对 $\forall \lambda \in [0,\ 1]$, $x \in \partial K(\theta,\ b)$, 有

$$\theta(\lambda x) \leqslant \lambda\theta(x),$$

(3) 算子 $T : \overline{K}(\gamma,\ c) \to K$ 为全连续,

(4) 当 $x\in\partial K(\gamma,\ c)$ 时，有 $\gamma(Tx)>c$; 当 $x\in\partial K(\theta,\ b)$ 时，有 $\theta(Tx)<b$; $K(\alpha,\ a)\neq\varnothing$ 且当 $x\in\partial K(\alpha,\ a)$ 时，有 $\alpha(Tx)>a$,
则 T 在 $K(\gamma,\ c)$ 中有两个不动点 x_1, x_2 满足

$$a<\alpha(x_1),\quad \theta(x_1)<b<\theta(x_2),\ \gamma(x_2)<c$$

或

$$\alpha(x_1),\ \alpha(x_2)<a,\ \theta(x_1)<b<\theta(x_2).$$

对定理 1.2.18 的条件还可稍加改变得到三个不动点的存在性.

定理1.2.19 设 X 是 Banach 空间, $K\subset X$ 是一个闭锥, $\alpha,\ \beta,\ \gamma: K\to\mathbf{R}^+$ 为三个连续增泛函，且 $\exists c,\ M>0$，当 $x\in\overline{K(\gamma,\ c)}$ 时有

$$\gamma(x)\leqslant\beta(x)\leqslant\alpha(x),\quad \|x\|\leqslant M\gamma(x).$$

$T:\overline{K(\gamma,\ c)}\to K$ 为全连续算子，设有常数 $c>b>a>0$，使

(1) 当 $x\in\partial K(\gamma,\ c)$ 时，有 $\gamma(Tx)<c$,

(2) 当 $x\in\partial K(\beta,\ b)$ 时，有 $\beta(Tx)>b$,

(3) $K(\alpha,\ a)\neq\varnothing$ 且当 $x\in\partial K(\alpha,\ a)$ 时，有 $\alpha(Tx)<a$,

则 T 在 $\overline{K(\gamma,\ c)}$ 中至少有三个不动点，满足

$$0\leqslant\alpha(x_1)<a<\alpha(x_2),\quad \beta(x_2)<b<\beta(x_3),\quad \gamma(x_3)<c.$$

I.Avery 用不同的四个泛函来界定锥中的有界非空开集和闭集, 证明了下面的三不动点定理.

记 X 为实 Banach 空间，$P\subset X$ 为其中的锥. 令 $\gamma,\ \varphi$ 为 P 上的连续非负凸泛函. α 为 P 上的连续非负凹泛函. ψ 为 P 上的连续非负泛函. 对正实数 $a,\ b,\ c,\ d$, 定义下列集合

$$P(\gamma,\ d)=\{u\in P\mid\gamma(u)<d\},$$
$$P(\gamma,\ \alpha,\ b,\ d)=\{u\in P\mid b\leqslant\alpha(u),\ \gamma(u)\leqslant d\},$$
$$P(\gamma,\ \varphi,\ \alpha,\ b,\ c,\ d\}=\{u\in P|b\leqslant\alpha(u),\ \varphi(u)\leqslant c,\ \gamma(u)\leqslant d\},$$
$$L(\gamma,\ \psi,\ a,\ d)=\{u\in P\mid a\leqslant\psi(u),\ \gamma(u)\leqslant d\}.$$

定理1.2.20 [20] P 为实 Banach 空间 X 的锥. $\gamma,\ \varphi: P\to\mathbf{R}^+$ 为非负连续凸泛函，$\alpha: P\to\mathbf{R}^+$ 为非负连续凹泛函，$\psi: P\to\mathbf{R}^+$ 为非负连续泛函且满足 $\psi(\lambda u)\leqslant\lambda\psi(u)$, $\forall 0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 存在正数 M 和 d 使得,

$$\alpha(u)\leqslant\psi(u),\ \ \|u\|\leqslant M\gamma(u),\ \forall u\in\overline{P(\gamma,\ d)}.\tag{1.2.5}$$

假设 $A:\overline{P(\gamma,\ d)}\to\overline{P(\gamma,\ d)}$ 全连续. 若存在正数 $a,\ b,\ c$ 且 $a<b$ 满足

(1) $\{u\in P(\gamma,\ \varphi,\ \alpha,\ b,\ c,\ d)\mid\alpha(u)>b\}\neq\varnothing$. 并且对 $\forall u\in P(\gamma,\ \varphi,\ \alpha,\ b,\ c,\ d)$, 有 $\alpha(Au)>b$,