经典教材配套丛书

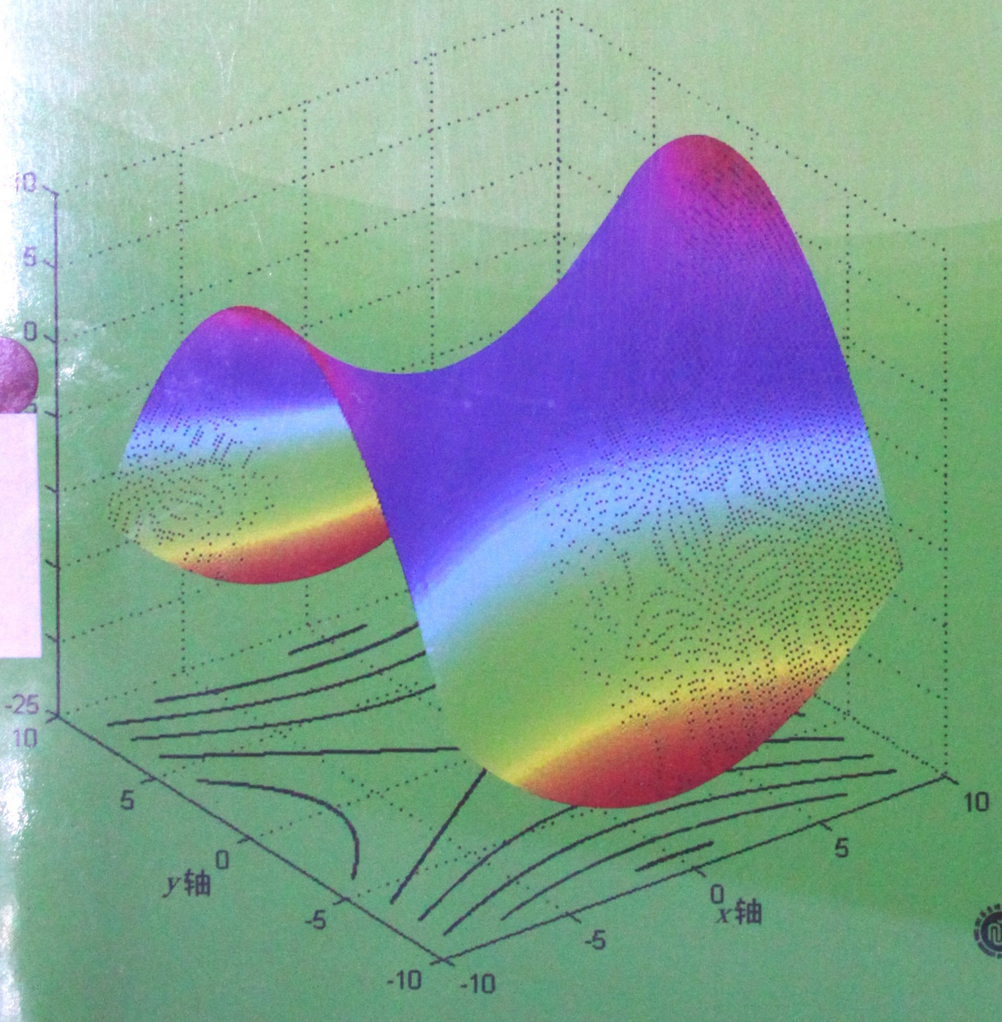
配套·人大社·赵树嫄《经济应用数学基础(一)——微积分(第三版)》

◆知识结构更清晰 ◆重点难点更突出 ◆例题解析更典型 ◆习题全解更全面

微积分
同步辅导与习题全解

（人大社·赵树嫄·第三版）

胡煜寒 严维军 冯卫兵 ◎ 主编



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

014013201

0172
247

经典教材配套丛书

配套·人大社·赵树嫄《经济应用数学基础(一)——微积分(第三版)》

微积分同步辅导与习题全解

(人大社·赵树嫄·第三版)

胡煜寒　严维军　冯卫兵　主编

北京航空航天大学
★ 藏书 ★
图书馆

0172/247

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

北航　C1700467

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与习题全解／胡煜寒，严维军，冯卫兵主编.
—上海：华东理工大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-5628-3750-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①胡…②严…③冯… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 273699 号

经典教材配套丛书

微积分同步辅导与习题全解(人大社·赵树嫄·第三版)

主　　编／胡煜寒　严维军　冯卫兵
策划编辑／周永斌
责任编辑／刘　婧
责任校对／张　波
出版发行／华东理工大学出版社有限公司
地　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　话：(021)64250306(营销部)
(021)64252005(编辑室)
传　真：(021)64252707
网　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷／常熟华顺印刷有限公司
开　　本／787 mm×1092 mm　1/16
印　　张／20.75
字　　数／553 千字
版　　次／2014 年 1 月第 1 版
印　　次／2014 年 1 月第 1 次
书　　号／ISBN 978-7-5628-3750-3
定　　价／45.00 元

联系我们：电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
淘宝官网 http://shop61951206.taobao.com

前　言

微积分是高等院校理工科和经济管理类学科相关专业的一门重要的基础课，是其他后续专业课程的基础，也是从事自然科学研究的科研人员、从事经济金融行业的定量分析专业人士的必备的数学工具之一. 因此，学好微积分是非常有意义的.

为了帮助广大在校生和自学者学好微积分这门课程，掌握这个有力的数学工具，作者总结了教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本配套赵树嫄主编的《经济应用数学基础（一）——微积分》的同步辅导书.

本书对原教材内容进行了归纳总结并逐章编写，对部分知识点作了有益的扩展延伸，对重点难点进行了剖析，对所有的习题进行了详尽的解答. 每章包括大纲基本要求、本章知识结构图、本章基本内容、重点难点剖析及典型例题解析、习题全解等五个栏目.

大纲基本要求——符合国家教育部制定的经管类《高等数学课程教学基本要求》，同时根据教学实践作了适当修改.

本章知识结构图——将知识有机地联系起来，从整体到细节系统地呈现知识点之间的联系.

本章基本内容——按照既“由浅入深、系统全面、脉络清晰”，又“突出重点、简明扼要、详略得当”的理念，对内容和方法进行归纳总结.

重点难点剖析及典型例题解析——对每章的重点、难点内容进行了具体分析，阐述原理，强化重点，突破难点，并通过有代表性的典型例题的分析、求解，使抽象的知识变得具体.

习题全解——对每一章的习题均给出了详细解答. 解答过程详细而具体，跳跃度很小. 大多数题目在解答之前，给出了“解题指导”. 同时，对部分题目给出了两种或三种不同的解法，从不同的角度对同一个问题进行不同的分析求解，有利于知识的综合与交叉应用. 从而有利于读者开阔视野，真正地锻炼数学思维，提高自己对知识掌握的熟练程度.

作为同步辅导书，本书力求能够给予读者最大的帮助，使得读者从本书获得最好的收益. 不过，由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，还望各位专家、读者不吝赐教，以期本书能及时进行修正并不断完善.

编　者

2013 年 9 月

问渠那得清如许

——写在书前的一点建议

数学与人生

为什么要学习数学？借用2013年热播的电视剧《龙门客栈》里面的一句话，我们可以给出一个娱乐化的理由：不学习数学，会影响我们看电视.

其实，数学早已与我们的生活息息相关，小到超市购物时所谓的打折是否合算，大到买房、购车、投资等如何操作才能尽量获得更大收益，处处都离不开数学. 只不过，令人遗憾的是：大多数人既没有留意到日常生活中的一些涉及数学的事件，也没有深究这些事件背后所隐藏的数学知识.

除了形而下的"利"与数学有关，形而上的"道"也可以用数学语言来进一步理解.

学了（高等）数学，我们就会明白：

人生的痛苦在于追求错误的东西. 所谓追求错误的东西，就是你在无限趋近于它的时候，才猛然发现，你和它是不连续的. 该放手就要放手，学会放弃很重要. 重新去寻找和自己连续的东西吧！

人和命运的关系就像 $F(x)=x$ 与 $G(x)=x^2$ 的关系. 一开始，你以为命运是你的高阶无穷小量. 随着年龄的增长，你才发现你用尽全力也赶不上命运的步伐.

曾有多少的理想和承诺，在经历几次求导的考验之后就面目全非甚至荡然无存？有没有那么一个誓言，叫做 $f(x)=e^x$？

当你处于人生的低潮时，就像函数的极小值点，虽然向哪个方向努力都很困难，但是向哪个方向你都是在上升！

零点存在定理告诉我们，哪怕你和TA站在对立面，只要你们的心是连续的，你们就能找到你们的平衡点.

人生就是一个级数，理想是你渴望收敛到的那个值. 不必太在意，因为我们要认识到有限的人生刻画不出无穷的级数，收敛也只是一个梦想罢了. 脚踏实地，经营好每一天，我们就会离理想越来越近.

幸福是可积的，有限的间断点并不影响它的积累. 所以，无论怎样，都请乐观地面对人生吧！

所谓方法

"工欲善其事，必先利其器."想学好数学，自然也需要掌握一些方法技巧等. 结合十多年的教学经验，我们认为应该注意并做到以下几点.

（1）理解. 理解能力的好坏，对数学学习至关重要. 经常听到有学生说："老师，我听不懂."除了基础薄弱、兴趣不高的原因外，大多数都是由于理解能力略差. 同样一个概念，有人一遍就听懂了，有人三遍也未必真正听懂. 因此，对于理解能力不强的学生，课堂上没有真正理解的概念应该课后及时找老师或同学帮忙弄清楚，课后复习时多想一想，多问自己几个为什么. 然后，可以看看不同版本的教材. 对于同样的概念、定理或同类的问题，有的书讲得深，有的讲得浅. 还可以看一些辅导书，有的辅导书对重点难点内容、容易混淆的概念等给出了更加详细的解释说明，有助于学生理解.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

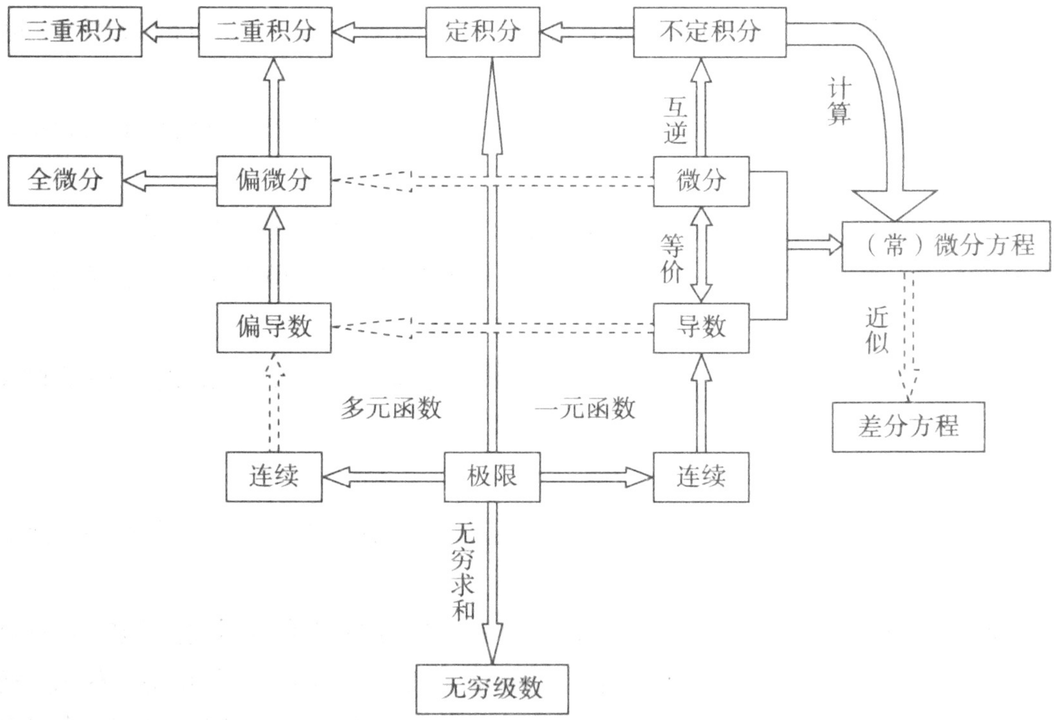
(2) 记忆. 这一点,或者应该说是打牢基础. 对于重要的概念、公式、定理、定律、结论、性质等基础知识必须记得一清二楚. 有的人说"文科的知识才要死记硬背,理科的理解就行,不用死记硬背."这句话是片面的. 很多东西都必须记得滚瓜烂熟,才能很好地运用. 比如,小时候背九九乘法表,不会有哪个人说"我理解了,我不用背". 再比如,微积分中,求导运算,涉及 16 个基本初等函数的求导公式,很难想象一个连求导公式都没背会的人,能够顺利地求出一个函数的导数.

(3) 归纳总结. 华罗庚先生说过,读书要"从厚到薄,从薄到厚". "从厚到薄",就是对自己学的知识加以归纳总结,找出它们之间的内在联系和共同本质,然后使之系统化、条理化,从而记住最具代表性的知识点,而其余部分只要在此基础上经过推理便可以了解. 在每章结束后,应该进行总结,把其中的基本概念、定理、基本公式及计算方法加以归纳,然后有条理地记忆起来,这样所学知识就完全属于你了. 本书已经给大家提供了每章的知识结构图,方便同学们学习新课、期末复习时使用. 不过,我们仍然强烈建议同学们自己做一遍归纳总结知识内容的工作. 这个很有必要,也很有好处.

(4) 应用. 学以致用,学了的东西,如果不使用,基本上很难算是真正掌握了. 因此,我们建议同学们应该养成处处留心的好习惯,将生活中遇到的问题用数学知识弄明白. 比如进超市了,算一算哪种打折更合算? 看新闻了,听到 GDP、CPI 等增加了百分之几,自己算一算相关的数据……当然,如果积极主动地参加数学建模、数学竞赛、挑战杯等竞赛活动,或者参与老师的科研项目课题等,更有利于提高应用数学的能力.

关于微积分

本书在每章都给出了知识结构图,在这里,我们给出一个微积分整体的知识体系图[①],以方便同学们从宏观上把握微积分的整体框架,理解知识点之间的关系等,从而加深理解,更好地掌握微积分知识内容.



① 注:曲线积分、曲面积分,本书未涉及,故省略.

关于做题

解题实际上是一种实践性技能，就像唱歌、打球、游泳一样，只能通过模仿和实践来学习和掌握. 虽然本书不能给同学们提供一把能打开所有的“门”或者解决所有问题的“万能钥匙”，但是却为同学们提供了许多值得效仿的范例. 当然，仅仅“坐而论道”是远远不够的. 想学会游泳，就必须下水；想成为解题高手，就必须去解题. 希望同学们能够在学习了本书提供的解题方法后，自己主动地寻找实践的机会——做一些题.

为了从自己的努力中取得最大的收获，我们建议：同学们每做一道题，都从中尝试着寻找出那些对处理将来的问题可能有用的特点、思路、方法等. 一种解题方法是你通过自己努力掌握的，或者是从别处(比如本书)学来或听来并真正理解了的，那么这种解题方法就会成为你自己的一种模式. 这样，以后再碰到类似的问题，求解时就可以模仿. 也就是举一反三、触类旁通.

模仿某个问题的解法去求解相似的问题并不难，但如果问题不那么相似，这样的模仿就不太合适了. 那么，有没有一种方法，它能解决所有的问题？很遗憾，这只能是一个美妙的梦想. 尽管如此，这个梦想却可以影响我们每一个人：虽然谁也不能到达北极星，但是通过观察它可以帮助我们找到正确的方向和道路. 本书虽然没有也不可能给你提供一个通用的完善的解题方法，但是，“虽不能至，心向往之”，我们仍然试图向那个遥不可及的梦想跨出小小的一步，以帮助大家打开思路提高解题能力.

我们建议同学们在阅读本书以及求解问题时，做完每一道题后，趁着头脑中的体验还比较新鲜，去深入思考以下这些问题：这道题的关键在哪里？主要的困难是什么？我以前有没有遇到类似的问题？(如果)有的话，以前的问题是怎么求解的？(如果)没有的话，通过这道题的求解，我获得了哪些解题诀窍可供下次遇到类似问题时使用？这道题有没有其他方法？(与参考答案相比较)我什么地方可以完成得更好一些？我为什么没有觉察到这一点？要看出这一点需要掌握哪些知识？是否可以从别的角度去思考这个问题？

当然，你要是能够提出更多更好的问题，并认真地思考总结，那么，距离那个梦想也就更近了一些.

不信的话，不妨一试？

最终目的

王国维先生讲人生境界，从“独上高楼，望断天涯路”，经过“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”，最终到“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”. 用数学眼光来看，就是遇到一个涉及无穷的计算或者证明的问题，经过思考，最终将其化成一个有限情况下的问题.

学数学的最终目的，不是会求导数、会计算积分等具体的知识、技巧、技能等，这些都是“术”而非“道”.

数学作为一门思维科学，它真正的重要性在于给我们提供了思考问题的一种普适方法. 换句话说，在于它掩藏于各种抽象概念与定理、公式中的思想. 学习数学的最终目的就在于要透过数学概念、定理与公式挖掘出数学思想，这些思想才是数学的魅力与趣味之所在.

“世事洞明皆代数，人情练达即分析”，数学即人生，学数学是为了使我们更透彻地看清人生，更敏锐地认识事物，从而最终使我们的人生更圆满.

内容提要

本书是与赵树嫄主编的《经济应用数学基础(一)——微积分》(第三版)(由中国人民大学出版社出版)配套使用的学习辅导书。为了与教材保持同步,本书按原教材的顺序逐章编写。经过对教材内容的提炼和升华,每章设有大纲基本要求、本章知识结构图、本章基本内容、重点难点剖析及典型例题解析、习题全解等五个栏目,使读者能全面地掌握知识点和解题技巧。

本书相对于教材具有一定的独立性,既可供使用其他版本经管类《微积分》的教师和学生参考使用,又可供报考硕士研究生的学生作为参考书。

目　录

第1章 函 数

一、大纲基本要求

1. 了解集合论的一些基本概念，正确使用集合运算的符号
2. 熟悉各类区间的意义，能正确地将满足一定条件的实数集表示成区间
3. 理解函数概念，掌握函数的表示法
4. 理解并掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性
5. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念
6. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念
7. 会建立简单应用问题中的函数关系式

二、本章知识结构图

- 函数
  - 集合
    - 集合概念
    - 集合的表示法：列举法、描述法
    - 全集与空集
    - 集合的运算：交、并、差、补等
    - 集合的运算律：交换律、结合律、分配律、摩根律
    - 集合的笛卡儿乘积
  - 实数集：数轴、绝对值、区间、邻域
  - 函数概念
    - 函数的定义域
    - 函数的对应法则
    - 函数的值域
  - 函数性质
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
    - 有界性
  - 函数类型
    - 基本初等函数（常、幂、指、对、三角、反三角函数）
    - 初等函数（基本初等函数 $\xrightarrow{\text{经过有限次的四则运算或函数复合}}$ 初等函数）
    - 非初等函数
  - 函数形式
    - 显函数
    - 隐函数
    - 单值函数、多值函数（不加声明的条件下，函数指的都是单值函数）
    - 分段函数（例如：符号函数、取整函数、绝对值函数等）
    - 反函数
    - 复合函数
  - 简单函数关系的建立

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

三、本章基本内容

(一) 集合

1. 集合的概念

集合指的是具有某种属性的事物的全体,构成集合的事物或对象称为该集合的元素.通常用大写英文字母 A,B,X,Y 等表示集合,用小写英文字母 a,b,x,y 等表示集合的元素.

对于集合 A,如果对象 a 是集合 A 的元素,则说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果对象 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

一个集合若其元素的个数是有限的,则称作有限集,否则称作无限集.

集合的表示通常有两种方法,一种是列举法,另一种是描述法.

常用的数集可用列举法或描述法表示如下:

自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

整数集 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$

有理数集 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{q}{p}\,\middle|\,\text{其中 } p\in\mathbf{N}^+ \text{ 并且 } q\in\mathbf{Z},p,q \text{ 互质}\right\}$

实数集 $\mathbf{R}=\{x\mid x \text{ 是有理数或无理数}\}$

设 A,B 是两个集合,如果 A 的所有元素都属于 B,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$. 例如 $\mathbf{N}^+\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$. 显然对任何集合 A,都有 $A\subset A$.规定空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subset A$.

2. 集合运算

集合的基本运算有并、交、差、补四种.

设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{或} x\in B\}$;

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{且} x\in B\}$;

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记作 $A\setminus B$,即 $A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{且} x\notin B\}$.

有时在研究某个问题时,问题中所涉及的集合总是某个最大集合 X 的子集,此时称 X 是全集;当 $A\subset X$ 时,称由 X 中不属于 A 的元素的全体组成的集合为 A 的补集或余集,并记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\{x\mid x\in X \text{且} x\notin A\}$.

3. 区间与邻域

设 $a,b(a<b)$ 是两个实数,则

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的开区间,记为 (a,b),如图 1-1 所示,即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

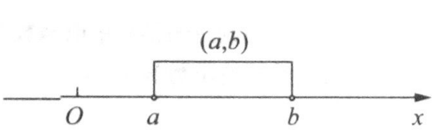


图 1-1

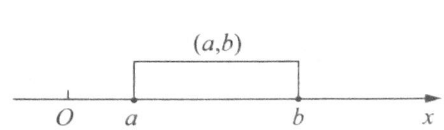


图 1-2

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的闭区间,记为 $[a,b]$,如图1-2所示,即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 称为以 a,b 为端点的半开半闭区间,分别记为 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 或 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

上述区间的长度是有限的,称为有限区间.除此以外,还有下述几类无限区间(或无穷区间):

(4) $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

(5) $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$;

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x\mid x$ 为任意实数$\}$(即实数集 $\mathbf{R}$).

4. 集合运算律

集合的并、交、补运算满足下列法则:

交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

摩根律(对偶律):$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$,$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

5. 集合的笛卡儿积

集合的笛卡儿乘积(也称为集合的直积):设 A、B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

6. 邻域

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

其中,点 a 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此 $U(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}$,所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,0<|x-a|<\delta\right\}$.

为方便起见,把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

(二) 函数

1. 函数概念

定义 设 D 是一个非空实数集合,对每个 $x\in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.

因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系,通常称为函数关系,函数值 $f(x)$ 的全体所构成的

集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域和对应法则.由于值域是由定义域 D_f 和对应法则 f 决定的.如果两个函数的定义域和对应法则完全一致，就称两个函数相同，否则就是不同的.

2. 函数的表示方法

1) 显函数：$y=f(x)$.

2) 隐函数：由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$.

例 $y+xe^y=1$ 确定了 $y=y(x)\Rightarrow y\Big|_{x=0}=1$.

3) 参数方程表示的函数：由方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$.

例 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=\arctan t\end{cases}$ 确定了 $y=f(x)$.

4) 分段函数：自变量不同范围内用不同式子表示的一个函数.

几个常见的分段函数：

(1) 绝对值表示的函数 $y=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1\\1-x, & x<1\end{cases}$;

(2) 极限表示的函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=\begin{cases}x, & |x|<1\\0, & |x|=1\\-x, & |x|>1\end{cases}$;

(3) 其他形式 $f(x)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2}\{1,x^2\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\x^2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$.

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}\text{……符号函数}$$

$y=[x]$——取整函数.

3. 函数的性质

1) 有界性：$f(x)$在某区间 I 内有定义，若存在 $M>0$，对任意 $x\in I$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在某区间 I 内有界.否则称 $f(x)$在某区间 I 内无界.

2) 单调性：$f(x)$在某区间 I 内有定义，若 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，就称 $f(x)$单调上升；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，就称 $f(x)$单调下降. 不含等号时则称严格单增(或单减).

3) 奇偶性：若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数，偶函数的图像关于 y 轴对称；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数，奇函数的图像关于原点对称.

4) 周期性：$f(x+T)=f(x)\quad(T\neq 0)$(主要是三角函数).

4. 反函数与复合函数

1) 反函数：$y=y(x)$的反函数为 $x=f^{-1}(y)$或 $y=f^{-1}(x)$.

由于习惯上 x 表示自变量，y 表示因变量，于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$也是直接函数 $y=f(x)$的反函数.

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，这两种形式都要用到.应当说明的是，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图像.而直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

注：并非任意一个函数都有反函数，当且仅当 $y=f(x)$ 一一对应时才有反函数.

2) 复合函数：若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 的定义域内时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由中间变量 u 复合成的复合函数.

（三）初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常函数这 6 类函数叫做基本初等函数.

1. 幂函数　$y=x^a$（a 为有理数）

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同，但是无论 a 取何值，幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义.当 $a\in\mathbf{N}$ 或 $a=\dfrac{1}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$. 常见的幂函数的图像如图 1-3 所示.

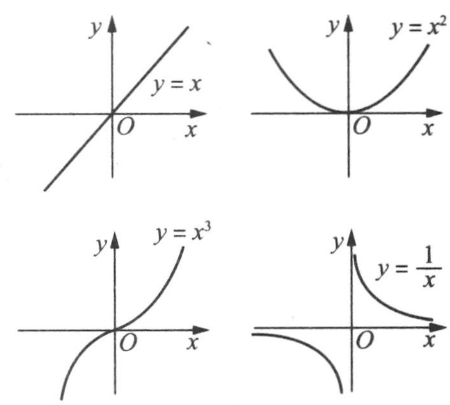


图 1-3

2. 指数函数　$y=a^x$（$a>0, a\neq 1$）

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 指数函数的图像如图 1-4 所示.

3. 对数函数　$y=\log_a x$　（$a>0, a\neq 1$）

定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 其图像如图 1-5 所示.

在工程中，常以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底，并且记 $e^x=\exp x$，$\log_e x=\ln x$，而后者称为自然对数函数.

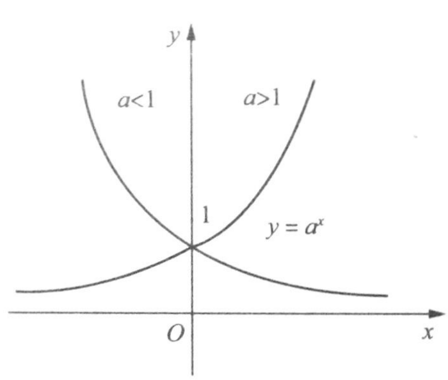


图 1-4

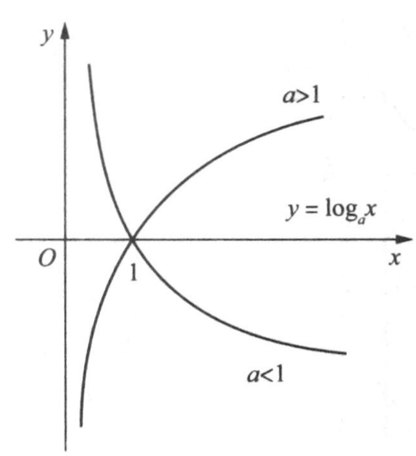


图 1-5

4. 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切函数的图像如图 1-6 所示.

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 等. 它们的图像如图 1-7 所示.

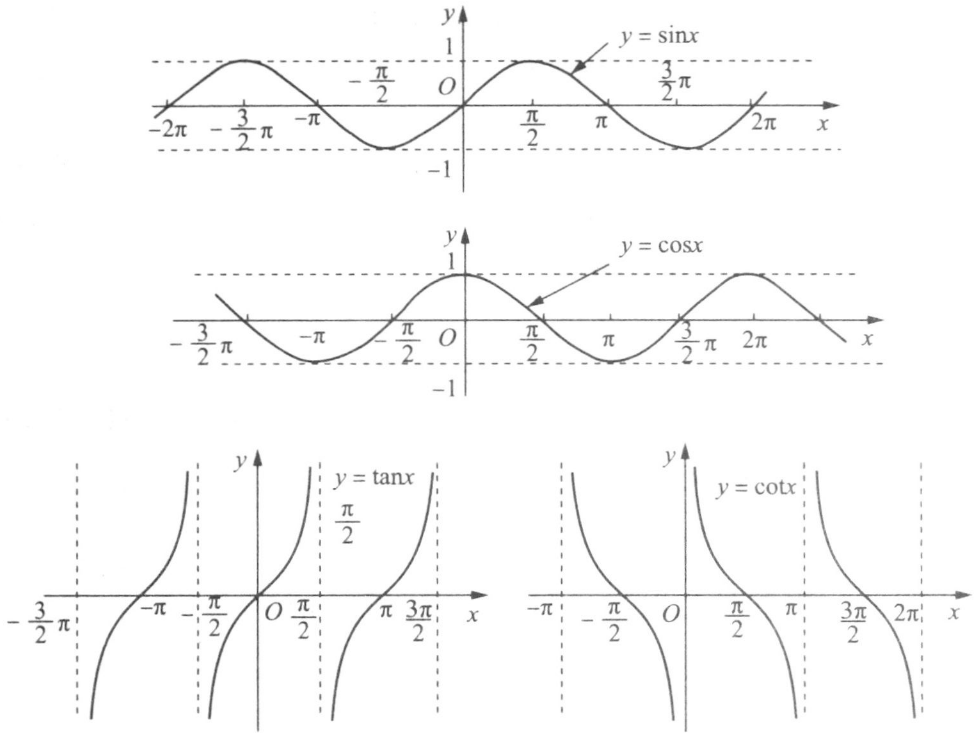

y = sinx
y = cosx
y = tanx
y = cotx

图 1 - 6

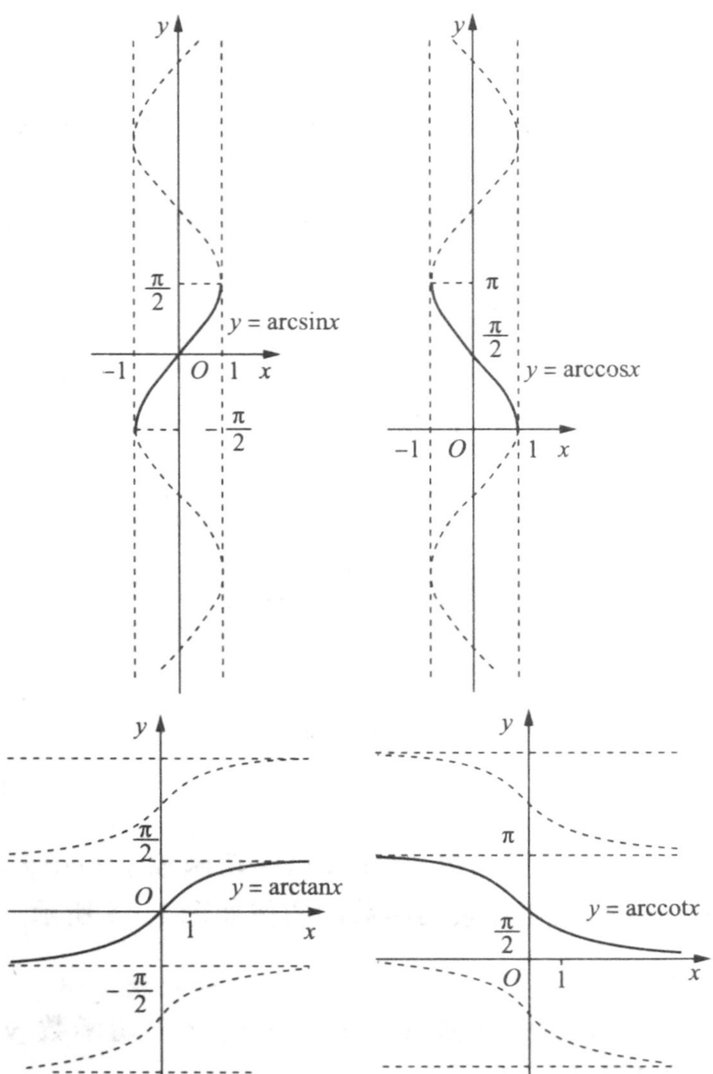

y = arcsinx
y = arccosx
y = arctanx
y = arccotx

图 1 - 7

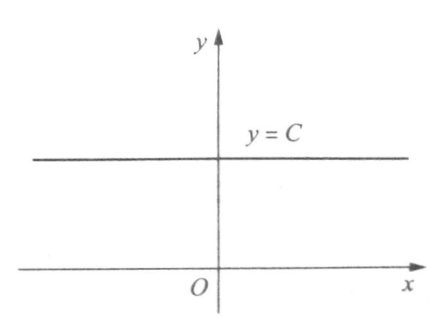

y = C

图 1 - 8

6. 常函数：$y=C$（C 为常数）

定义域为$(-\infty,+\infty)$，函数的图形是一条水平的直线，如图1-8所示.

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数，称为初等函数.例如，$y=\ln(\sin x+4)$，$y=e^{2x}\sin(3x+1)\cdots$都是初等函数.

值得强调的是，形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数（其中 $f(x)>0$），称之为幂指函数.由于有恒等式 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，因此幂指函数是初等函数.

例如，幂指函数 $x^x=e^{x\ln x}\ (x>0)$，$x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}\ (x>0)$，$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\ (1+x>0)$均为初等函数.

在微积分运算中，常把一个初等函数分解为基本初等函数来研究，学会分析初等函数的结构是十分重要的.初等函数虽然是常见的重要函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到.例如符号函数、取整函数 $y=[x]$等分段函数就是非初等函数.

四、重点难点剖析及典型例题解析

（一）函数概念

1. 组成函数的要素

（1）定义域：自变量的取值范围 D；

（2）对应关系：因变量与自变量之间的对应关系 f.

函数的定义域确定了函数的存在范围，对应关系确定了自变量如何对应到因变量.因此，这两个要素一旦确定，函数也就随之确定.所以说，两个函数相等（即 $f(x)=g(x)$）的充分必要条件是两个函数的定义域和对应关系都相等.若两者之一不同，就是两个不同的函数.

2. 函数定义域的确定

对于初等函数，一般要求它的（自然）定义域，具体说来通过下面的途径确定：

（1）函数式里如果有分式，则分母的表达式不为零；

（2）函数式里如果有偶次根式，则根式里的表达式非负；

（3）函数式里如果有对数式，则对数式中真数的表达式大于零；

（4）如果函数表达式是若干表达式的代数和的形式，则其定义域为各部分定义域的公共部分；

（5）对于分段函数，其定义域为函数自变量在各段取值的并集.

（6）对于实际的应用问题，应根据问题的实际意义来确定函数的定义域.

3. 函数的对应关系

函数的对应关系 f 或$f(\quad)$表示对自变量 x 的一个运算，通过 f 或 $f(\quad)$把 x 变成了 y，例如 $y=f(x)=2x^3-5x+1$，则 f 代表算式 $f(\quad)=2(\quad)^3-5(\quad)+1$，括号内是自变量的位置，运算的结果得到因变量的值.

例1　求函数 $y=\sqrt{3x-x^3}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，则 $3x-x^3\geqslant 0$. 化简有 $x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\leqslant 0$，

即$(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})\leqslant 0$.解之得，定义域为 $x\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[0,\sqrt{3}]$.

例2　设 $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$，求 $f(x)$的定义域.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com