

国防科技图书出版基金资助出版

粘性流体力学

VISCOUS FLUID DYNAMICS

邹高万 贺征 顾璇 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

国防科技图书出版基金资助出版

哈尔滨工程大学研究生教材建设专项资金资助出版

粘性流体力学

Viscous Fluid Dynamics

邹高万 贺征 顾璇 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

流体力学是一门基础性很强和应用性很广的学科,是力学的一个重要分支。随着科学技术的发展,流体力学已经深入到各个科技领域与生产部门。对于当代科学家和工程师而言,很好地熟悉流体力学是必不可少的。真实流体都是有粘性的,本书以介绍粘性流体力学的基本理论为主,包括粘性流体运动的基本方程式、不可压粘性层流解析解、不可压层流边界层和湍流边界层、湍流理论,建立粘性流体力学的基本概念体系,阐明粘性流体运动的基本控制方程、基本规律和基本物理现象。

本书主要是为非流体力学专业的工科、能源与动力、航空航天、化工等各领域专业的研究生编写的粘性流体力学教学用书,目的在于为他们从事课题研究时提供必须的、较为坚实的粘性流体力学知识,同时也兼顾到其他相关专业的本科生、教师、科研工作者和工程技术人员作参考。

图书在版编目(CIP)数据

粘性流体力学 / 邹高万, 贺征, 顾璇编著.

—北京: 国防工业出版社, 2013. 6

ISBN 978 - 7 - 118 - 08729 - 1

I. ①粘... II. ①邹... ②贺... ③顾...
III. ①粘性流体 - 流体力学 IV. ①O357

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 101440 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 31 1/2 字数 840 千字

2013 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 65.00 元



(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717

前 言

粘性流体力学是流体力学的一个重要分支,是一门理论性和实用性都很强的学科,其广泛应用于航空、航天、机械、动力、核能利用、化工、水利、气象、海洋、船舶和环境保护等部门,是相关工程学和应用科学研究的核心和基础之一。

作者多年来一直为热能工程、航空宇航推进理论与工程、核能科学与工程学科的硕士研究生开设粘性流体力学课程及相关课程。这些研究生均属非数学、力学专业的工科学生,尚未掌握张量分析和连续介质力学的知识,有些学生甚至连矢量分析和场论的知识都很缺乏。一方面,如何使读者比较容易地跨进流体力学(特别是粘性流体力学)这门学科的门槛,是讲授流体力学课程首先需要解决的问题;另一方面,研究生必须掌握坚实的基础理论和系统的专门知识,因此研究生教材中主要应突出基本原理和基本内容,以保持学位课程的相对稳定性和系统性。系统掌握粘性流体力学基本方程组,深入理解各项的物理含义,对读者将长期起作用。本书并不企图向读者介绍所有流体力学的内容,而是以介绍粘性流体力学的基本理论为主,试图建立起流体力学的基本概念体系,阐明流体力学中的基本规律、基本概念和基本物理现象;并力图在不影响说明流体运动性质和规律的前提下,尽可能采用较简单的数学方法去完整地推导流体力学基本方程,给出了基本方程在直角坐标系和一般正交曲线坐标系下的一般表达式和常用的特殊限定情况下的表达式。为便于读者自学,编写中尽量注意使推导过程平顺连续,避免数学和物理概念的跳跃。

全书共分为9章。第1章是场论和张量初步。流体力学中广泛地采用场论和张量的工具,这里并不对这些知识进行详细阐述,而只给出学习流体力学必须掌握的相关知识。在学习流体力学之前对场论和张量初步进行介绍是必要的,而且能对后面的学习起到事半功倍的效果。第2章介绍了流体力学的研究对象与学科内容、流体力学研究的发展简史和流体的物理性质,即对流体及流体力学的总体认识。第3、4章是粘性流体力学基本方程组的建立。其中第3章是流体运动学,从几何学的观点来研究流体的运动规律,包括质点导数的概念和亥姆霍兹速度分解;第4章是流体动力学,从自然界中关于物质运动的某些普遍规律(质量守恒、动量守恒和能量守恒)出发建立起描述粘性流体运动的基本方程组,包括矢量式、直角坐标系中的表达式、笛卡儿张量的形式和一般正交曲线坐标系中表达式,这些方程组是研究粘性流体运动的基础,极为重要。第5章是粘性流动的相似原理与量纲分析。第6、7章介绍的是层流,包括简单层流的解析解和层流边界层,实际上是描述粘性流体运动的基本方程组在一些特定问题中的求解问题。1904年普朗特提出著名的边界层理论,这在流体力学研究史中具有划时代的意义,边界层理论的提出使粘性流体概念和无粘性流体概念协调起来,使流体力学进入了一个新的历史阶段,主要解决了计算物体在流体中运动时所受到的摩擦阻力和热传递的流率问题。第8、9章介绍湍流,包括湍流现象及其基本特征、湍流向层流的过渡、湍流模型理论和湍流边界层。

本书第1~4章由邹高万撰写,第5~7章由顾璇撰写,第8、9章由贺征撰写,全书由邹高万

统稿。

本书编写过程中参照了许多著作,已按被参考的先后顺序在参考文献中详细列出,其中不乏优秀和经典之作,在此对这些著作的作者表示诚挚的谢意。

本书承蒙哈尔滨工程大学刘顺隆教授审阅,他提出了许多宝贵意见,使我们获益匪浅,特致谢意;感谢田瑞峰副教授、党进锋博士、王金玲博士阅读了本书初稿后提出的有益建议;感谢国家自然科学基金资助项目(51206030)、国防科技图书出版基金和哈尔滨工程大学研究生教材建设专项资金在本书出版中所提供的资助,在此一并表示感谢。

由于作者学识有限,书中定有谬误和不妥之处,恳请读者给与批评和指正。

联系方式:zougaowan@hrbeu.edu.cn

作者

2013年5月

主要符号表

a 热扩散率, m^2/s	g 重力加速度矢量, m/s^2
a 加速度矢量, m/s^2	h 单位质量流体的焓(比焓), $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$; 对流换热表面传热系数, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
A 面积, m^2	H 高度距离, m
A 面积矢量, m^2	H_i 一般正交曲线坐标系中 q_i 坐标曲线的拉梅系数
b 翼弦长, m	i_α 直角坐标系下 α 坐标轴正向的单位矢量
c 音速, m/s	I 三阶单位矩阵; 二阶单位张量
c_p 定压比热容, $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	k 导热系数, $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
c_v 定容比热容, $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	k_t 湍流导热系数, $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
C 常数	K 单位质量流体的湍流动能, J/kg
C_D 平均阻力系数	l 湍流大尺度特征长度, m
C_f 局部摩擦阻力系数(范宁摩擦系数)	l_m Prandtl 混合长度, m
C_f 平均摩擦阻力系数	L 特征长度, m
C_p 压差阻力系数	m 质量, kg
C_L 升力系数	$\dot{m}$ 质量流率, kg/s
C_s Smagorinsky 常数	M 分子量, kg/kmol
D 扩散系数, m^2/s	n 法线方向的单位矢量
D 全导数(质点导数)符号	p 压强, Pa
D 速度导数张量, s^{-1}	P 压力函数, Pa
D_{ij} 速度导数张量的分量, s^{-1} , 下标 i 为作用面的法向, 下标 j 为投影方向	P 应力张量, Pa
d 微分符号	p_n 外法线方向为 n 的微元面积上的应力矢量, 即方向为 n 的单位面积所受的面积力, Pa
e 单位质量流体的内能(比内能), $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	q_i 曲线坐标系中坐标分量, m
e_i 一般正交曲线坐标系中 q_i 坐标曲线正向的切向单位矢量	q_w 壁面热流密度, W/m^2
E 总能量, J	q 热流密度矢量, W/m^2
E_v 弹性模量, Pa	Q_v 体积流量, m^3/s
f_i 方向 i 上的质量力矢量的分量, m/s^2	r 矢径, m
f 函数	R 半径, m ; 特定气体常数, $\text{J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
f 单位质量流体的质量力矢量, m/s^2	R_m 通用气体常数, $\text{J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
F 摩擦阻力, N	R_s 单位时间、单位体积组分 s 的质量生成率, $\text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^3)$
F_D 总阻力, N	R 旋转张量, s^{-1}
F_L 升力, N	R_{ij} 旋转张量的元素, s^{-1}
F 力矢量, N	
g 重力加速度, m/s^2	

S 熵, J ; 体积热源, W/m^3	u', v', w' 直角坐标系中湍流脉动速度分量, m/s
S 变形速率张量, s^{-1}	V_1, V_2, V_3 一般曲线坐标系中坐标曲线上的速度分量, m/s
S_{ij} 变形速率张量的元素(分量), s^{-1} , 下标 i 为作用面的法向, 下标 j 为投影方向	V_r, V_φ, V_z 圆柱坐标系中坐标曲线上的速度分量, m/s
t 时间, s	V_r, V_θ, V_φ 球坐标系中坐标曲线上的速度分量, m/s
T 温度, K	α 角度, Sr
T_0 特征温度, K	β 角度, Sr
u_i 直角坐标系下 i 方向上的速度分量, m/s	θ 角度, Sr
$\bar{u}_i$ 直角坐标系下 i 方向上的平均速度分量, m/s	β_p 可压缩性系数, Pa^{-1}
u_τ 摩擦速度, m/s	β_T 膨胀系数, K^{-1}
$\bar{u}^+ \bar{u}^+ = \bar{u}/u_\tau$ 边界层无量纲时均速度	Γ 速度环量
U 特征速度, m/s	γ 比热容之比 $\gamma = c_p/c_v$
U_∞ 自由来流速度, m/s	∇ 哈密尔顿算子, m^{-1}
U_e 边界层外部势流速度, m/s	Δ 拉普拉斯算子, m^{-2}
U_e^+ 边界层无量纲外部势流速度	Δ 表面粗糙度高度, m ; 滤波宽度, m
V 体积, m^3	δ 速度边界层的厚度, m
V_i 一般正交曲线坐标系中 i 方向上的速度分量, m/s	δ_i 温度边界层的厚度, m
V 速度矢量, m/s	δ_i 湍流边界层粘性底层厚度, m
W 力在单位时间内所作的功, W	δ_1 边界层质量排挤厚度, m
x 直角坐标中位置矢量, m	δ_2 边界层动量损失厚度, m
y 离开壁面的法向距离, m	δ_3 边界层能量损失厚度, m
y^+ 离开壁面的法向无量纲距离	δ_{ij} 克罗尼克尔算子
Y_s 组份 s 的质量分数	σ_{ij} 应力张量的元素(分量), Pa , 下标 i 为作用面的法向, 下标 j 为力的投影方向
x, y, z 直角坐标, m	$\sigma_T, \sigma_K, \sigma_\varepsilon$ 对应于温度 T , 湍流动能 K , 湍流耗散率 ε 的湍流普朗特数
x_1, x_2, x_3 直角坐标, m	ε 单位质量湍流耗散率, W/kg
q_1, q_2, q_3 一般正交曲线坐标, m	ε_{ijk} 置换符号
r, φ, z 圆柱坐标系的径向、周向、轴向坐标, m, Sr, m	η 非牛顿流体的动力粘性系数, $Pa \cdot s$; Kolmogorov 长度尺度, m ; 无量纲长度
r, θ, φ 球坐标系的径向、经度方向、纬度方向坐标, m, Sr, Sr	Θ 无量纲相对温度
i, j, k 直角坐标系中坐标轴正向的单位矢量	κ 卡门常数
e_1, e_2, e_3 一般曲线坐标系中坐标曲线正向的切向单位矢量	μ 分子动力粘性系数, $Pa \cdot s$
e_r, e_φ, e_z 圆柱坐标系中坐标曲线正向的切向单位矢量	μ_1 湍流动力粘性系数, $Pa \cdot s$
e_r, e_θ, e_φ 球坐标系中坐标曲线正向的切向单位矢量	μ' 第二粘性系数, $Pa \cdot s$
u, v, w 直角坐标系中的速度分量, m/s	ν 分子运动粘性系数, m^2/s
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 直角坐标系中时均速度分量, m/s	ν_t 湍流运动粘性系数, m^2/s
	ρ 密度, kg/m^3

τ 粘性应力张量, Pa; 曲线的切向单位矢量
 τ_{ij} 粘性应力张量的元素(分量), Pa, 下标 i 为作用面的法向, 下标 j 为力的投影方向
 τ_w 壁面切应力, Pa
 Φ 耗散函数, W/m³
 Ω 涡量矢量, $\Omega = \nabla \times \mathbf{V}$, 亦称为速度旋度, s⁻¹
 Ω_i 涡量矢量在 i 方向上的分量, s⁻¹
 ω 角速度, Sr/s
 $\boldsymbol{\omega}$ 角速度矢量, Sr/s
 ω_i i 方向上角速度矢量的分量, Sr/s
 ψ 流函数, m²/s
 Λ 型参数
 Br 布林克曼(Brinkman) 数, $Br = PrEc$
 Ec 埃克特(Eckert) 数, $Ec = \frac{U^2}{c_p \Delta T}$
 Eu 欧拉(Euler) 数, $Eu = \frac{p}{\rho U^2}$
 Fr 弗罗德(Froude) 数, $Fr = \frac{U}{\sqrt{Lg}}$

Gr 格拉晓夫(Grashof) 数, $Gr = \frac{g\beta_1 \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2}$
 Le 刘易斯(Lewis) 数, $Le = \frac{a}{D}$
 Ma 马赫(Mach) 数, $Ma = \frac{U}{c}$
 Nu 努谢尔特(Nusselt) 数, $Nu = \frac{hL}{k}$
 Pe 贝克利(Peclet) 数, $Pe = PrRe$
 Pr 普朗特(Prandtl) 数, $Pr = \frac{\nu}{a}$
 Re 雷诺(Reynolds) 数, $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$
 Sc 施密特(Schmidt) 数, $Sc = \frac{\nu}{D}$
 Sr 斯特劳哈尔(Strouhal) 数, $Sr = \frac{L}{Ut}$
 St 斯坦顿(Stanton) 数, $St = \frac{Nu}{PrRe}$

目 录

第 1 章 场论与笛卡儿张量的基本知识	1
1.1 矢量与矢性函数	1
1.1.1 矢量	1
1.1.2 矢性函数	2
1.2 场论	4
1.2.1 场	4
1.2.2 数量场的方向导数与梯度	4
1.2.3 矢量场的通量与散度	6
1.2.4 矢量场的环量与旋度	7
1.3 哈密尔顿算子	10
1.4 笛卡儿坐标系中张量的基本知识	11
1.4.1 坐标变换	12
1.4.2 张量	15
1.4.3 张量的代数运算	16
1.4.4 二阶张量	17
1.4.5 并矢与并矢张量	18
1.5 正交曲线坐标系	25
1.5.1 曲线坐标系	26
1.5.2 正交曲线坐标系中的弧微分	26
1.5.3 常见的正交曲线坐标系	27
1.5.4 场论中的量在一般正交曲线坐标系中的表达	29
1.5.5 场论中常用量的表达式汇总	37
第 2 章 流体力学与流体的物理性质	41
2.1 流体力学的任务及研究方法	41
2.1.1 流体力学的研究对象与学科内容	41
2.1.2 研究流体力学的方法	43
2.2 流体力学研究的发展简史	44
2.3 流体与流动	50
2.4 流体的物理性质	53
2.4.1 易变形性	54
2.4.2 粘性	55
2.4.3 可压缩性和膨胀性	62
2.4.4 热传导性	65

2.4.5	液体的表面张力和毛细现象	66
2.4.6	流体的模型化	69
2.5	流体的分子输运现象	71
第3章	流体运动学	76
3.1	描述流体运动的方法	76
3.1.1	概述	76
3.1.2	拉格朗日方法	78
3.1.3	欧拉方法	81
3.1.4	两种方法的相互变换	84
3.1.5	质点的加速度与质点导数	86
3.2	流体微团运动的分析	89
3.2.1	亥姆霍兹速度分解	89
3.2.2	流体运动速度分解后的物理意义	93
第4章	粘性流体动力学基本方程	100
4.1	流体所受的力	100
4.1.1	体积力	100
4.1.2	表面力	101
4.2	粘性流体流动的基本方程	104
4.2.1	概述	104
4.2.2	雷诺输运方程	106
4.2.3	连续性方程	109
4.2.4	动量方程	114
4.2.5	能量方程	117
4.2.6	本构方程	121
4.2.7	热力学关系式	125
4.2.8	其他补充方程	126
4.2.9	用内能、焓或温度表达的能量方程	127
4.3	直角坐标系中基本方程的表达	128
4.3.1	连续性方程的表达	128
4.3.2	动量方程的表达	129
4.3.3	能量方程的表达	134
4.4	正交曲线坐标系中基本方程的表达	140
4.4.1	一般正交曲线坐标系中速度及场量的表达	140
4.4.2	一般正交曲线坐标系中基本方程的表达	142
4.4.3	圆柱坐标系中基本方程的表达	157
4.4.4	球坐标系中基本方程的表达	162
4.5	粘性流动及其基本性质	168
4.5.1	粘性流动的基本方程组及其定解条件	169
4.5.2	粘性流动的基本性质	175

第 5 章	粘性流动的相似原理与量纲分析	180
5.1	粘性流动的相似原理	180
5.1.1	物理现象相似及相似原理的基本内容	181
5.1.2	基本方程的无量纲化	182
5.2	量纲分析法	192
5.2.1	量纲的基本概念	192
5.2.2	物理方程量纲一致性原则	194
5.2.3	瑞利法	194
5.2.4	π 定理	196
第 6 章	层流流动的解析解	199
6.1	概述	199
6.2	平行定常层流	201
6.2.1	平行平板间的定常层流	201
6.2.2	等截面直管内充分发展的定常层流	209
6.2.3	同轴旋转圆筒间的定常层流	215
6.3	平行非定常层流	219
6.3.1	平板突然启动	219
6.3.2	平板在自身平面内周期振动	223
6.3.3	圆管内非定常层流	225
6.4	缓慢流动	228
6.4.1	斯托克斯方程	228
6.4.2	粘性流体绕球的缓慢运动	230
第 7 章	不可压缩流体层流边界层	237
7.1	边界层的基本概念	237
7.1.1	边界层理论的创立和发展	237
7.1.2	边界层现象	238
7.1.3	边界层内的旋涡运动	239
7.1.4	边界层的厚度	241
7.1.5	层流边界层与湍流边界层	243
7.2	边界层的特征厚度	246
7.2.1	边界层的排挤厚度	246
7.2.2	边界层动量损失厚度	247
7.2.3	边界层动能损失厚度	247
7.3	不可压缩流二维边界层的微分方程	248
7.3.1	二维平板边界层微分方程	248
7.3.2	温度边界层及有关方程	253
7.3.3	沿二维弯曲壁面及轴对称曲面上的边界层微分方程	257
7.4	边界层流动的分离现象	264

7.5	不可压缩流层流边界层的相似精确解	270
7.5.1	边界层相似的概念	270
7.5.2	平板边界层的布劳修斯解	275
7.6	不可压缩流层流边界层的积分近似解	281
7.6.1	边界层积分方程	281
7.6.2	边界层积分方程的近似解	285
7.7	不可压缩流温度边界层的求解	299
7.7.1	传热的相似性理论	299
7.7.2	不可压强制对流等温平板温度边界层	307
第8章	湍流理论	314
8.1	概述	314
8.1.1	湍流研究的重要作用	314
8.1.2	湍流现象及其基本特征	315
8.1.3	湍流研究的历史	320
8.1.4	湍流研究的方法	322
8.2	层流向湍流的过渡	323
8.3	流动稳定性理论简介	328
8.3.1	概述	328
8.3.2	小扰动线性化理论	331
8.3.3	有限扰动非线性理论	346
8.4	湍流的拟序结构和猝发现象	347
8.5	湍流的统计理论基础	352
8.5.1	湍流的统计理论概述	352
8.5.2	湍流的统计平均方法	355
8.5.3	湍流的统计特性	357
8.5.4	湍流的尺度	361
8.6	湍流运动的基本方程	363
8.6.1	不可压缩流的雷诺时均方程	363
8.6.2	可压缩流的雷诺时均方程	369
8.6.3	不可压缩流基本方程的导出方程	376
8.6.4	可压缩流基本方程的导出方程	382
8.7	雷诺平均模式理论的涡粘性模型	385
8.7.1	湍流模型概述	385
8.7.2	Boussinesq 涡粘性假设	388
8.7.3	不可压缩流的零方程模型	391
8.7.4	不可压缩流的一方程模型	399
8.7.5	不可压缩流的两方程模型	402
8.7.6	可压缩性的影响	409
8.7.7	标准 $K-\varepsilon$ 模型的发展	412
8.8	雷诺平均模式理论的应力模型	417

8.8.1	雷诺应力微分方程模型(DSM)	417
8.8.2	雷诺应力代数方程模型(ASM)	425
8.9	大涡模拟方法	427
8.9.1	大涡模拟概述	427
8.9.2	滤波技术	429
8.9.3	不可压缩流的大涡模拟	430
8.9.4	可压缩流的大涡模拟	433
第9章	湍流边界层理论	440
9.1	湍流边界层的特征	440
9.2	二维湍流边界层运动方程	443
9.2.1	速度边界层方程	443
9.2.2	温度边界层方程	446
9.2.3	湍流边界层积分关系式	446
9.3	湍流边界层内的时均速度分布	448
9.3.1	速度分布的普遍定律	448
9.3.2	内层的时均速度分布	452
9.3.3	外层的时均速度分布	456
9.3.4	边界层的通用时均速度分布式	457
9.3.5	粗糙壁面上的时均速度分布式	459
9.4	湍流边界层动量积分关系式近似解法	460
9.4.1	零压力梯度的平板湍流边界层	460
9.4.2	有压力梯度的平板湍流边界层	466
9.5	湍流速度边界层微分方程解法	469
9.5.1	内层变量解法	469
9.5.2	数值解法	474
9.6	绕流物体的阻力	475
9.6.1	绕流阻力概述	475
9.6.2	圆柱绕流	481
9.6.3	圆球绕流	483
9.7	边界层的控制	485
参考文献		487

第1章 场论与笛卡儿张量的基本知识

流体力学方程最普适而又最简明的表达方法是使用矢量和张量的符号来表达。本章主要介绍后面各章节将要用到的场论和笛卡儿坐标系中二阶张量运算的相关基本知识。

1.1 矢量与矢性函数

1.1.1 矢量

1. 矢量及其表示

既有大小,又有方向,并且遵守一定运算法则的量(如力、速度、加速度、电场强度等),称为矢量或向量。更为严格的数学定义表述为:在三维欧几里德(Euclid, BC330—BC275)空间中,矢量是具有大小与方向且满足一定规则的实体。在几何中的有向线段就是一个直观的矢量,如 $\overrightarrow{AB}$,其中 A 称为起点, B 称为终点。箭头的指向表示矢量的方向;线段 AB 的长度,即矢量的大小,称为所给矢量的模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$,矢量的模恒取正值。

如果两矢量的长度相等,处在同一直线或两平行直线上,且指向相同,则称这两矢量是相等的。也就是说,数学中考虑的矢量,可以在空间任意平移,具有这种性质的矢量,常称为自由矢量。习惯上用黑体符号或在符号上加单向箭头表示自由矢量,如 $\mathbf{a}$ 或 $\vec{a}$,本书中采用黑斜体表示。矢量 $\mathbf{a}$ 的模记为 $|\mathbf{a}|$,对于矢量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$,矢量 $\overrightarrow{BA}$ 称为 $\mathbf{a}$ 的负矢量,记作 $-\mathbf{a}$ 。

矢量可以取空间任意一点作为它的起点,可以从空间的一个位置平行移动到另一个位置,而其运算性质不变,因此对于矢量来说,位置不再有任何意义,矢量与起点无关。

模和方向都保持不变的矢量称为常矢;模和方向同时或其中之一会改变的矢量称为变矢;模为1的矢量称为单位矢量;模等于零的矢量,即终点与起点重合的矢量,称为零矢量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,零矢量的方向是不定的,或者说方向是任意的,一切零矢量都相等。

直角坐标系 $Oxyz$ 中,以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别表示三个坐标轴 Ox, Oy, Oz 正向的单位矢量,它们被称为基本单位矢量。给定坐标系 $Oxyz$,总能把 $\mathbf{a}$ 唯一地写为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1.1.1a)$$

也常记作

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (1.1.1b)$$

式中: a_x, a_y, a_z 称为矢量 $\mathbf{a}$ 的坐标,即矢量 $\mathbf{a}$ 在三个坐标轴上的投影的长度。矢量 $\mathbf{a}$ 的模为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.1.2)$$

直角坐标系中的单位矢量

$$\mathbf{n} = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \mathbf{i} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \mathbf{j} + \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \mathbf{k} = \cos\alpha \mathbf{i} + \cos\beta \mathbf{j} + \cos\gamma \mathbf{k} \quad (1.1.3)$$

式中: α, β, γ 分别表示矢量与三个坐标轴线之间的夹角。其中,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \cos(\mathbf{n}, x) \quad (1.1.4a)$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \cos(\mathbf{n}, y) \quad (1.1.4b)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \cos(\mathbf{n}, z) \quad (1.1.4c)$$

2. 矢量的运算

按平行四边形法则可以定义两矢量的加(或减),如图 1.1.1 所示,同一空间中两个矢量的加(或减)仍是该空间的矢量。设有两矢量 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$,其加、减运算为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} \quad (1.1.5a)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k} \quad (1.1.5b)$$

两矢量的乘法分为点积(或称为点乘、标量积)和叉积(或称为叉乘、矢量积):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.1.5c)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (1.1.5d)$$

通常情况下,矢量的叉积不满足结合率,即 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 。

1.1.2 矢性函数

1. 矢性函数

有数性变量 t 和变矢 $\mathbf{a}$,如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值, $\mathbf{a}$ 都以一个确定的矢量和它对应,则称 $\mathbf{a}$ 为数性变量 t 的矢性函数,记作

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) \quad (1.1.6)$$

$\mathbf{a}(t)$ 在直角坐标系中的坐标表达式为

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} \quad (1.1.7)$$

可见,一个矢性函数和三个数性函数构成一一对应关系。

如图 1.1.2 所示,从坐标原点出发,向空间点 $M(x, y, z)$ 引出的有向线段称为该点的位置矢量或矢径,用 $\mathbf{r}$ 表示。

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.1.8)$$

把矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 的起点取在坐标原点,其终点 $M(x, y, z)$ 描绘出一条曲线 l (见图 1.1.2),该曲线叫矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 的矢端曲线。曲线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a_x(t) \\ y = a_y(t) \\ z = a_z(t) \end{cases}$$

曲线 l 的矢量方程为

$$\mathbf{r}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}$$

矢性函数的极限与数性函数的极限定义完全类似:

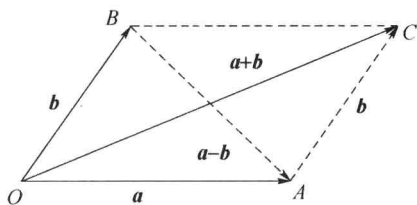


图 1.1.1 矢量和的平行四边形法则

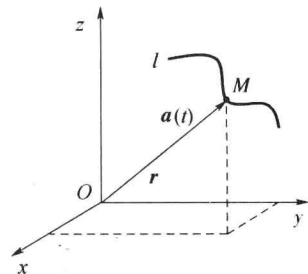


图 1.1.2 矢径与矢端曲线

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$$

求矢性函数的极限只需求三个数性函数的极限即可

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t) \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t) \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) \mathbf{k} \quad (1.1.9)$$

2. 矢性函数的导数与微分

有一个矢性函数 $\mathbf{a}(t)$, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{a} / \Delta t$ 存在, 称此极限为矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 在点 t 处的导数, 记作 $d\mathbf{a}/dt$ 或 $\mathbf{a}'(t)$ 。

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}$$

在直角坐标系中求矢性函数的导数只需求三个数性函数的导数即可:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_z}{\Delta t} \mathbf{k} \\ &= \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.1.10a)$$

或

$$\mathbf{a}'(t) = a'_x(t) \mathbf{i} + a'_y(t) \mathbf{j} + a'_z(t) \mathbf{k} \quad (1.1.10b)$$

导矢的几何意义如图 1.1.3 所示, l 为 $\mathbf{a}(t)$ 的矢端曲线, $\Delta \mathbf{a} / \Delta t$ 是在 l 的割线 MN 上的一个矢量。当 $\Delta t > 0$ 时, 其指向与 $\Delta \mathbf{a}$ 一致, 系指向 t 增大的一方; 当 $\Delta t < 0$ 时, 其指向与 $\Delta \mathbf{a}$ 相反, 但此时 $\Delta \mathbf{a}$ 指向 t 减小的一方, 从而 $\Delta \mathbf{a} / \Delta t$ 仍指向 t 增大的一方。在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 割线 MN 绕点 M 转动, 且以点 M 处的切线为其极限位置, 则导矢 $\Delta \mathbf{a} / \Delta t$ 自然就在此切线上。因此, 导矢在几何上为一矢端曲线的切向矢量, 方向指向 t 增大的一方。

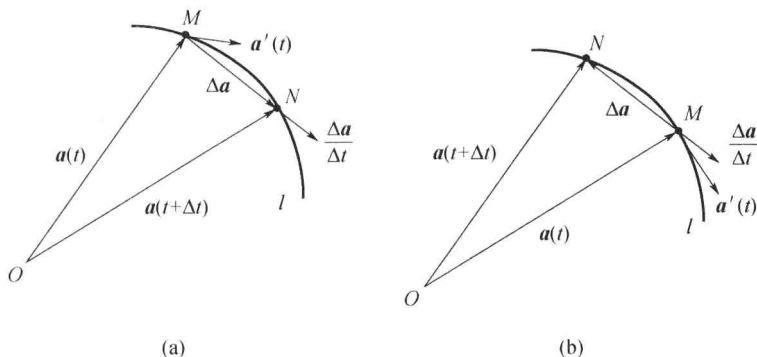


图 1.1.3 导矢的几何意义

(a) $\Delta t > 0$; (b) $\Delta t < 0$ 。

矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 在 t 处的微分可表示为

$$d\mathbf{a} = \mathbf{a}'(t) dt \quad (1.1.11)$$

在直角坐标系中为

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= i da_x + j da_y + k da_z \\ &= i a'_x(t) dt + j a'_y(t) dt + k a'_z(t) dt \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

于是有

$$|d\mathbf{a}| = \sqrt{(da_x)^2 + (da_y)^2 + (da_z)^2} \quad (1.1.13)$$

3. 矢性函数的积分

若 $\mathbf{b}(t)$ 是 $\mathbf{a}(t)$ 的一个原函数, 则矢量微分方程

$$\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) \quad (1.1.14)$$

的解

$$\int \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{b}(t) + \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} \text{ 为任意常矢量}) \quad (1.1.15)$$

称为矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 的不定积分。

若 $\mathbf{b}(t)$ 是连续矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 的在区间 $[t_1, t_2]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{b}(t_2) - \mathbf{b}(t_1) \quad (1.1.16)$$

称为矢性函数 $\mathbf{a}(t)$ 的定积分。

1.2 场 论

1.2.1 场

如果空间区域的每一点都对应物理量的一个确定值, 就说在这空间里构成了该物理量的场。场是物理现象中物理量与空间关系的一种表现形式, 即物理量在空间的分布情况。若空间(或空间的某一子区域)每一点对应着某一数量, 则称给定了该种数量的场, 这时的场称为数量场或标量场, 如温度场、密度场; 空间每一点对应着某一矢量时, 这时的场称为矢量场或向量场, 如速度场、加速度场、力场。如果场中物理量在各点处的值不随时间变化, 即所述物理量只依赖于点的位置(或坐标), 则称所给的场为定常场或稳态场, 否则称为非定常场或非稳态场。

数量场中, 函数 T 取相同值的点所组成的曲面称为等值面或等位面, 如温度等值面。在二维情况下, 等值面为等值线或等位线。矢量场中, 曲线上每一点处的切线方向与该点的矢量方向相同, 这样的曲线称为矢量线, 如流场中的流线、磁场中的磁力线。

矢量线上任意一点 $M(x, y, z)$ 的矢径为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

其微分为

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

按其几何意义, $d\mathbf{r}$ 在点 M 处与矢量线相切。点 $M(x, y, z)$ 处的场矢量为

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

按矢量线的定义知, $d\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{a}$ 共线, 因此有

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \quad (1.2.1)$$

从式(1.2.1)中适当选取两个方程, 分别求得它们的通解为

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, c_1) = 0 \\ f_2(x, y, z, c_2) = 0 \end{cases}$$

式中: c_1, c_2 为任意常数。这就是所求的矢量线簇方程。

1.2.2 数量场的方向导数与梯度

1. 方向导数

为考察数性函数 T 在给定点 M 处沿某个方向的变化率, 为此引进方向导数的概念。如图 1.2.1 所示, M_0 为数量场 $T = T(M)$ 中的一点, 从点 M_0 出发引一条射线 l , 在 l 上点 M_0 的邻近取一动点 M ,