GaoDengShuXue

史悦◎编

高等数学

（下册）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等数学（下册）

史　悦　编

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 提 要

本书内容是根据高等院校经管类专业高等数学课程的教学大纲及"工科类本科数学基础课程教学基本要求",结合我校对经管类专业,特别是国际贸易专业的教学要求编写而成的。全书注重从学生的数学基础出发,通过实际问题引入数学概念并利用已知数学工具解决新问题,并将数学方法应用于实际问题,特别是结合学生的专业特点,精选了许多高等数学方法在经济理论上的应用实例。在这个过程中培养学生的数学素养、建模能力、严谨的思维能力、创新意识及应用能力。本书力求数学体系完整,深入浅出。

全书分为上、下两册,本书为下册。下册包括:无穷级数、多元函数微分学(及其应用)、重积分、曲线曲面积分。书末根据学生的基础,附有便于学生查阅的常用面积体积公式、常见曲面方程及图形、习题参考答案与提示。

本书适合作为各类普通高等院校经济管理类各专业高等数学课程的教材及参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 史悦编. --北京:北京邮电大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5635-3793-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①史… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 296109 号

书　　名:高等数学(下册)

作　　者:史　悦

责任编辑:赵玉山

出版发行:北京邮电大学出版社

社　　址:北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发 行 部:电话:010-62282185　**传真**:010-62283578

E-mail:publish@bupt.edu.cn

经　　销:各地新华书店

印　　刷:北京联兴华印刷厂

开　　本:787 mm×960 mm　1/16

印　　张:13.5

字　　数:216 千字

印　　数:1—3 000 册

版　　次:2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3793-8　　定　价:28.00 元

前　　言

数学不仅是一门科学，一种计算工具，更是一种严谨的思维模式。高等数学作为各级高等院校的重要基础课，随着课程改革的深入，更加注意培养学生的创新能力和数学建模的应用能力，因此全书注重从学生的数学基础出发，首先突出数学建模的思想，通过实际问题引入数学概念（即建立数学模型），体现数学概念的来源，避免生硬地直接引入数学概念；其次在建立模型之后，注意引导解决模型所提出问题的思维方法，在此过程中特别强调发散性思维对解决问题的思路和创新方法的影响，开阔学生思路，引导学生对解决问题的各种想法进行实践，体现研究问题的一般过程。最后利用已知数学概念和方法应用于实际问题，结合学生的专业特点，精选了许多高等数学方法在经济理论上的应用实例，并为提高学生的学习兴趣引入了实际生活中许多应用实例。

书中对例题的选择注重典型多样、富有启发性，着重基本概念和基本方法的理解，不片面追求技巧性与难度。在每节的习题选择上也体现了这一基本原则，但在每章的总习题中注重知识的综合应用与常用技巧的训练。本书在编写过程中，融入了编者多年的教学经验，在整体内容上力求数学体系完整、深入浅出，适于经管类学生的学习难度与后续经济、管理类课程的应用衔接，对于 * 号部分可根据专业及学生基础进行教学并可指导学生作为课下阅读。

全书分为上、下两册，本书为下册。下册内容包括：无穷级数、多元函数微分学（及其应用）、重积分、曲线曲面积分。书末根据学生的基础，附有便于学生查阅的常用面积体积公式，常见曲面方程及图形，习题参考答案与提示。

本书的完成要感谢北京邮电大学理学院及数学系的支持和各位数学系同仁的帮助，同时要感谢北京邮电大学教务处、北京邮电大学出版社的大力支持。数学系的同仁对本书的内容提出了许多宝贵的意见，出版社从编审到出版付出了很大的精力，实则本书是大家共同努力的结晶，在此表示感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，有错误及不当之处在所难免，敬请各位专家、同行、读者指出，以便今后改进、完善、提高。

编　者

目　　录

第八章　无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的有力工具。本章先讨论常数项级数，介绍无穷级数的一些基本概念、性质和判敛方法，然后讨论函数项级数特别是幂级数的收敛特点及性质，并讨论如何将函数展开成幂级数的问题。

第一节　常数项级数的概念与性质

17 世纪西方航海技术迅速进步，人类活动范围的扩大使得全球性贸易获得了空前的发展。航海与贸易的技术需求导致了人们开始研究级数。

从事贸易的商人需要借贷。如果年利率为 r，按复利计算，n 年后偿还贷款时，1 元本金连本带利应还 $(1+r)^n$ 元。当 n 是正整数时，$(1+r)^n$ 的值容易求得。更一般地，在同样的年利率下，如果 k 个月后还款，1 元本金连本带利应该还 $(1+r)^{\frac{k}{12}}$ 元。当 $\frac{k}{12}$ 不是整数时，计算起来比较困难。

另一方面，当时航海依靠星辰确定船只的位置。这件工作既需要有精度较高的时钟，又需要掌握星辰的准确轨道。后者要进行大量的计算。在没有电子计算机的时代，为了提高计算速度采用了对数，要编制高精度的对数表。这项工作也要求类似计算利息那样的指数是分数的指数函数的值。

当时的数学家发现可以将牛顿二项式公式推广，将 $(1+r)^{\frac{k}{12}}$ 这样的表达式表示成无穷多项的和，用其中前若干项的和作为 $(1+r)^{\frac{k}{12}}$ 的近似值，从而解决 $(1+r)^{\frac{k}{12}}$ 的求值问题。在使用这种方法时，又发现了对某些 r 这种方法是有问题的。因此进一步提出了无穷和收敛与发散的概念，初步建立了无穷级数的基础。可以说，无穷级数的系统研究是在航海与贸易的促进下从 $(1+x)^a$ 的展开式开始的。

本节内容是学习级数特别是数项级数判敛法的基础，而数项级数判敛法又是数项级数的重点；从数学思想角度来看，本节进一步体现了从初等数学到高等数学的本质变化，即由有限到无限，由静止到运动的转变；也进一步体现了极限在高等数学中的基础作用。

一、数项级数的概念

1. 实例

人们认识事物在数量方面的特性,往往有一个由近似到精确的过程。在这种认识过程中,会遇到由有限个数相加到无穷多个数相加的问题。

例 1 求半径为 R 的圆面积 A 的精确值。

分析 在上册中我们利用数列极限求过圆的面积。按照正多边形面积的极限是圆面积的思想。现我们可具体按如下方法计算:首先作圆的内接正六边形,算出其面积 a_1,它与圆面积 A 的误差较大。为了更准确地计算出 A 的值,我们再以这个正六边形的每一边为底分别作一个等腰三角形(见图 8-1),算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2。则 a_1+a_2(即内接正十二边形的面积)就是 A 的一个比 a_1 近似程度更好的近似值。同样地,在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形,算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3。则 $a_1+a_2+a_3$(即内接正二十四边形的面积)是 A 的比 a_1+a_2 近似程度更好的近似值。如此继续下去,内接 3×2^n 边形的面积 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 就逐步逼近圆面积 A。

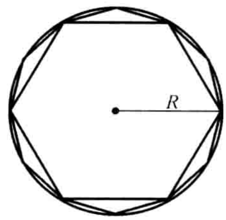

图 8-1

如果内接正多边形的边数无限增多,即 n 无限增大,则和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所求的圆面积 A 的精确值。这时就出现了无穷多个数依次相加(无穷和)的运算问题。

例 2 无限循环小数实际上也是一个无穷和的问题,例如

$$0.\dot{3}=0.333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots,$$

在初等数学中,已经知道这个循环小数等于$\frac{1}{3}$。

注意到,如果我们将这个无穷和的前 n 项和记为 s_n,即 $s_n=\sum_{k=1}^{n}3\times 10^{-k}$。则容易得到下面的极限

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}。$$

由此启发我们,无穷多个数$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$之和可以作为有限个数之和 s_n 的极限而确定。

2. 数项级数的概念

定义 1 设$\{u_n\}$是一个无穷数列,将$\{u_n\}$中各项依次相加构成的表达式:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

称为(常数项)无穷级数,简称**级数**,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**(或**通项**)。

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 前 n 项 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为该级数的**部分和**。当 $n=1,2,3,\cdots$ 时,$s_1, s_2, s_3, \cdots$ 构成一数列 $\{s_n\}$,称为该级数的**部分和数列**。

例 3　写出下列级数

$$2\sqrt{x} - \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{5}{4}x^2 + \cdots$$

的一般项 u_n,并将级数以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的形式表示。

解　先将上述级数写成更有规律的形式

$$\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4}x^{\frac{4}{2}} + \cdots,$$

于是有

$$u_1 = \frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}, u_2 = (-1)^{2-1}\frac{2+1}{2}x^{\frac{2}{2}}, \cdots, u_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}x^{\frac{n}{2}}, \cdots。$$

故所给级数一般项为 $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}x^{\frac{n}{2}}$,级数可写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}x^{\frac{n}{2}}$。

上述级数的定义只是一个形式上的定义,怎样理解无穷级数中无穷多个数相加,这些数是如何相加的?最后的结果又会怎样?可见,无穷多个数的“求和”是一个新的问题,由例 2 方法的启发,我们可以从有限项的和出发,观察它们的变化趋势,即通过观察部分和数列 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 的极限,来把握无穷多个数相加的含义,并理解得到的结果。由此,我们引进无穷级数收敛与发散的概念。

定义 2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 s_n 收敛于 s,即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**,并称 s 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$;若 s_n 的极限不存在,则称级数**发散**。

由定义 2,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性(收敛或发散)及求和问题,就转化为部分和数列 s_n 的敛散性问题,因此我们说级数是数列极限的另一种表现形式。

例 4　写出级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 的部分和 s_n,并说明其敛散性,若收敛指出其和。

解 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$，所以部分和为

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2(1-\frac{1}{2^n})$$

(等比求和公式：$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$，此处 $q=\frac{1}{2}$)，由于

$$\lim_{n\to\infty}s_n=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛且和为 2。

一般地，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$ $(a\neq0,q\in\mathbf{R})$称为几何级数(或等比级数)，当 $|q|<1$ 时，级数收敛且和为$\frac{a}{1-q}$，当 $|q|\geqslant1$ 时，级数发散。例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ 收敛。

例 5 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性。

解 因为

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

从而该级数的部分和为

$$s_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}。$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2},$$

所以该级数收敛，且其和为$\frac{1}{2}$。

例 6 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散。

证 此级数的部分和为

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}。$$

因为当 $n\to\infty$时，$s_n\to+\infty$，于是所给级数发散。

二、收敛级数的性质

性质 1(收敛级数的线性性质)

(1) 设 k 为任意常数,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ks。$$

一般地,有结论:级数的每一项同乘一个不为零的常数后,它的敛散性不变。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s、σ,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma。$$

即两个收敛级数逐项相加或逐项相减后的级数仍收敛。

证　(1)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 s_n 及 σ_n,则

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k = k\sum_{k=1}^{n} u_k = ks_n。$$

等式两端取极限,得到

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = ks。$$

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛,且和为 ks。

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 s_n,σ_n 及 τ_n,则有

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k \pm \sum_{k=1}^{n} v_k = s_n \pm \sigma_n,$$

于是,

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s \pm \sigma。$$

这表明 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛,且和为 $s \pm \sigma$。

对于性质 1,我们还需注意:两个发散级数逐项相加或相减所得的级数并不一定发散,例如,$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 都发散,但 $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} + (-1)^n) = 0+0+\cdots+0+\cdots$ 是收敛的。但是,一个收敛级数与一个发散级数逐项相加或相减所得的级数必是发散的(证明留给读者)。

例 7　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \cos n\pi\right)$的敛散性。

解　显然等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ 收敛,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散,因此由上面结论知所给级数发散。

例 8　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{3}{(n+1)(n+2)}\right]$的和。

解 由于等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$,又由本节例5知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}$,根据性质1,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}\right]$收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}。$$

性质 2 在级数中去掉、增加或改变有限项,不改变级数的敛散性(当然,在收敛时,其和一般是不同的)。

证 我们只证明"在级数中去掉有限项,不改变级数的敛散性"。

设 $u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$ 的部分和 s_n,并将级数的前 k 项去掉,得级数

$$u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots,$$

于是新级数的部分和为

$$\sigma_n=u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}=s_{k+n}-s_k,$$

其中 s_{k+n}是原来级数的前 $k+n$ 项的和。因为 s_k 是常数,所以当 $n\to\infty$时,σ_n 与 s_{k+n}同时有极限,或者没有极限,即去掉有限项后,新级数与原级数敛散性相同。证毕。

由此可见,级数是否收敛,取决于 n 充分大以后一般项 u_n 的状况,而与级数前有限项的状况无关。例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ 收敛,因为此级数可视为例 5 中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ 增加了一项$\dfrac{1}{2}$而得到。

性质 3 收敛的级数在求和过程中满足结合律。即:将收敛级数的项任意加括号所得的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

仍收敛,并且其和不变。

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 s_n,加括号后所成的上述新级数的前 k 项部分和为 A_k,则

$$A_1=u_1+\cdots+u_{n_1}=s_{n_1},$$
$$A_2=u_1+\cdots+u_{n_1}+u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2}=s_{n_2},$$
$$\vdots,$$
$$A_k=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=s_{n_k},$$
$$\vdots。$$

可见,数列$\{A_k\}$是数列$\{s_n\}$的一个子数列。由数列$\{s_n\}$的收敛性以及收敛数列与其

子数列的关系可知，数列$\{A_k\}$收敛，且有

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\lim_{n\to\infty}s_n,$$

即加括号后所成的级数收敛，且其和不变。

由此性质可知，若加括号后所成的级数发散，则原来的级数也发散。我们也常用这个结论证明级数发散。但要注意，若加括号后的级数收敛，不能推出原级数一定收敛，例如$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$是收敛的，但不加括号的原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$是发散的，即收敛级数不能任意去括号。

性质 4　(级数收敛的必要条件)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$u_n\to 0(n\to\infty)$。

证　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为$s_n$，且$s_n\to s(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0。$$

例 9　证明级数$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$发散。

证　所给级数的一般项为$u_n=\frac{n}{n+1}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$，由性质 4 所给级数发散。

注意，级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件。有些级数虽然一般项趋于零，但仍然是发散的。

例 10　证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散。

显然所给调和级数的一般项$u_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$。

证　用反证法。

若调和级数收敛，设它的部分和为s_n，且$s_n\to s(n\to\infty)$。从而对上级数的部分和s_{2n}，也有$s_{2n}\to s(n\to\infty)$。于是

$$s_{2n}-s_n\to 0(n\to\infty)。$$

但另一方面

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

故$s_{2n}-s_n$不趋于零$(n\to\infty)$，矛盾。于是调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散。

这里值得注意的是，虽然调和级数当n越来越大时，它的项越来越小，但这些项的和

会逐渐缓慢地增大,并可以超过任何有限值。调和级数的这种特性使一代又一代数学家困惑并为之着迷。它的发散性是由法国学者尼古拉·奥雷姆(1323-1382)在极限概念被完全理解之前约400年首次证明的。下面的数字将有助于我们更好地理解此级数。它的前1000项的和约为7.485;前100万项的和约为14.357;前10亿项的和约为21。更有学者估计过,为了使调和级数的和约为100,需相加10^{43}项。这些项有多长呢?试想如果我们将这些项写在一个很长的纸带上,设每一项只占1 mm长的纸带,必须使用10^{43}mm长的纸带,这个长度大约是10^{25}光年,但科学家已知的宇宙的尺寸仅有10^{12}光年。

*三、数项级数的应用举例

1. 关于数 e 的表示

将函数 e^x 在点 $x=0$ 展开为 n 阶泰勒公式:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!},0<\xi<x$$

令 $x=1$,得到

$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!},$$

其中 $\xi\in(0,1)$。当 $n\to\infty$时,$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\to 0$。此时有

$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots,$$

于是无理数 e 被表示为无穷多个数之和。

2. 政府投资能否拉动社会消费的问题

人们在挣到钱之后,一部分用于消费,另一部分用于储蓄。他们所消费的钱被别人挣到,第二轮挣到钱的人同样将其中一部分用于消费,其他用于储蓄。其中的消费部分成为第二轮消费。这样的过程会继续下去,经济学家称之为消费链。

为了简化讨论,假定每一个人的消费都等于收入的 q 倍($0<q<1$)。称 q 为消费边际倾向,$1-q$ 称为储蓄边际倾向。

假定政府财政投入为 D。考虑下列问题:

(1) 经过 n 轮转换之后,社会总消费为多少?

(2) 政府财政投入最终能带动多大消费?

第一轮收入为 D,消费等于 qD;

第二轮收入为 qD,消费等于 q^2D;

⋮

第 n 轮收入为 $q^{n-1}D$,消费等于 q^nD。

因此经过 n 轮转换之后,社会总消费为

$$qD+q^2D+\cdots+q^nD=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}D。$$

这个过程无限进行下去，社会总消费趋向于极限

$$Q=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}D=\frac{D}{1-q}。$$

于是，如果每个人的消费边际倾向等于 q，则政府财政投资 D 最终能拉动社会消费 $\frac{D}{1-q}$。

在这个问题中，政府投资所起到的消费效应是无穷个轮次消费的总和。

习题一

1. 下面关于级数运算的命题是否正确？并请说明理由。

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 必定发散。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 必定发散。

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则加括号后所得新级数亦发散。

(4) 若加括号后的级数发散，则原级数必发散。

2. (1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 s_n，则 $s_{2n+1}=u_1+u_3+\cdots+u_{2n+1}$，是否正确？

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n+1}=u_1+u_3+\cdots+u_{2n+1}+\cdots$，则其部分和 $s_{2n+1}=u_1+u_3+\cdots+u_{2n+1}$，是否正确？

3. 下面的运算是否正确？并说明理由。

$$\begin{aligned}0&=0+0+0+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots\\&=1-1+1-1+\cdots=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\\&=1。\end{aligned}$$

4. 判别下列级数的敛散性，并在收敛时求其和。

(1) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$；