大学数学系列教材

高等数学(下册)

张志旭 李晓霞 温绍泉 孙淑兰 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

(下册)

张志旭　李晓霞　温绍泉　孙淑兰　编

陈琳珏　主审

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书分上、下两册出版。上册共五章，内容为函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用；下册共五章，内容为微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，无穷级数。

本书结构严谨合理，条理清晰明了，论证简明透彻，习题难易适中。为增加学生的学习兴趣，本书增设了数学拾零和数学实验两个板块。书中带“*”号部分为选学内容。

本书可作为高等学校经济学、管理学、医学等非数学类专业的教材，也可供其他专业学生选读。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／张志旭等编．—北京：高等教育出版社，2013.12

ISBN 978-7-04-038696-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 271179 号

策划编辑　张晓丽　　责任编辑　张晓丽　　特约编辑　徐　飞　　封面设计　于文燕
版式设计　童　丹　　插图绘制　尹　莉　　责任校对　胡美萍　　责任印制　朱学忠

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
印　　刷　北京玥实印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16
印　　张　17.5
字　　数　320 千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2013 年 12 月第 1 版
印　　次　2013 年 12 月第 1 次印刷
定　　价　25.80 元

物 料 号　38696-00

目录

第六章　微分方程

在生产实践和科学技术中，常常要研究函数，高等数学中所研究的函数是反映客观现实和运动中的量与量之间的关系. 但在大量的实际问题中遇到稍为复杂的运动过程时，要直接写出反映运动规律的量与量之间的关系往往是不可能的，也就是说量与量之间的关系(即函数)不能直接写出来，但有时可建立含有要找的函数及其导数的关系式，这就是通常所说的微分方程. 因此，微分方程也是描述客观事物的数量关系的一种重要的数学模型. 本章主要介绍常微分方程的基本概念和几种常用的常微分方程的解法.

第一节　微分方程的基本概念

下面通过几何、物理学中的具体例子来介绍微分方程的基本概念.

一、微分方程的例子

例 1　已知一条曲线上任意一点处的切线的斜率等于该点的横坐标的 3 倍，且该曲线通过点(2,1)，求该条曲线的方程.

解　设曲线方程为 $y=y(x)$，且曲线上任意一点的坐标为(x,y). 根据题意以及导数的几何意义可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x. \tag{1}$$

此外，$y(x)$还满足下列条件：

$$x=2\text{ 时}，\quad y=1. \tag{2}$$

式(1)两端对 x 积分，得

$$y=\int 3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2+C. \tag{3}$$

把条件(2)代入式(3)，得

$$1=6+C,\quad C=-5.$$

把 $C=-5$ 代入式(3)，即得所求的曲线方程为

$$y=\frac{3}{2}x^2-5. \tag{4}$$

例 2　以初速度 v_0 将质点铅直上抛，不计阻力，求质点的运动规律.

解　如图 6－1 取坐标系. 设运动开始时($t=0$)质点位于 x_0，在时刻 t 质点位于 x. 变量 x 与 t 之间的函数关系 $x=x(t)$就是要找的运动规律.

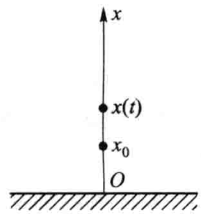

图 6－1

根据导数的物理意义，按题意，未知函数 $x(t)$应满足关系式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g, \tag{5}$$

此外，$x(t)$还满足下列条件：

$$t=0 \text{ 时},\quad x=x_0,\quad \frac{dx}{dt}=v_0. \tag{6}$$

式(5)两端对 t 积分一次，得

$$\frac{dx}{dt}=-gt+C_1. \tag{7}$$

再积分一次，得

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{8}$$

把条件(6)代入式(7)和式(8)，得 $C_1=v_0$，$C_2=x_0$，于是有

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0. \tag{9}$$

以上仅以物理学、几何学中的具体例题引出关于未知函数的导数、未知函数和自变量之间的关系式，其实在化学、生物学、自动控制、电子技术等学科中都提出了许多这类问题. 从而要探讨解决这些问题的方法. 本章我们介绍有关微分方程基本概念、基本理论和几种常用类型微分方程的求解方法.

二、微分方程的基本概念

在以上两个例子中，关系式(1)和式(5)都含有未知函数的导数，它们都称为微分方程，即微分方程(1)和微分方程(5). 一般地，凡表示未知函数、未知函数的

导数及自变量之间的关系的方程，称为**微分方程**．未知函数是一元函数的，叫做常微分方程；未知函数是多元函数的，叫做**偏微分方程**．这里必须指出，在微分方程中，自变量及未知函数可以不出现，但未知函数的导数则必须出现．本章只讨论常微分方程．

微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数，称为微分方程的**阶**．例如，方程(1)是一阶微分方程；方程(5)是二阶微分方程．又如，方程

$$xy'''+x^3y''-5y'=\sin x$$

是三阶微分方程；而方程

$$y^{(4)}-xy=x^2$$

是四阶微分方程．

求函数 $f(x)$ 的原函数的问题，就是求解一阶微分方程 $y'=f(x)$．这是最简单的一阶微分方程，方程(1)就是这种方程．一般地，一阶微分方程的形式为

$$y'=f(x,y)\quad 或\quad F(x,y,y')=0;$$

而二阶微分方程的一般形式为

$$y''=f(x,y,y')\quad 或\quad F(x,y,y',y'')=0.$$

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后解微分方程，即求出满足微分方程的函数．也就是求出这样的函数，把它及它的导数代入微分方程时，能使该方程成为恒等式．这样的函数称为该微分方程的**解**．就二阶微分方程 $F(x,y,y',y'')=0$ 而言，如果有在某个区间 I 上的二阶可微函数 $\varphi(x)$，使当 $x\in I$ 时，有

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)]\equiv 0,$$

那么 $y=\varphi(x)$ 就称为微分方程 $F(x,y,y',y'')=0$ 在区间 I 上的解．

例如，式(3)和式(4)都是微分方程(1)的解；式(8)和式(9)都是微分方程(5)的解．

如果微分方程的解中含有彼此独立的任意常数，且这些任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的**通解**．例如，函数(3)是方程(1)的解，它含有一个任意常数，而方程(1)是一阶的，所以式(3)是方程(1)的通解．又如，函数(8)是方程(5)的解，它含两个任意常数，且彼此独立，而方程(5)是二阶的，所以式(8)是方程(5)的通解．

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性．要完全确定地反映事物的规律性，必须确定这些常数的值．为此，提出问题的同时，还要根据问题的实际情况提出确定这些常数的条件．例如，例 1 中的条件(2)、例 2 中的条件(6)便是这样的条件．

设微分方程中未知函数为 $y=y(x)$，如果微分方程是一阶的，那么通常用来确定任意常数的条件是

$$x=x_0 \text{ 时}, \quad y=y_0,$$

或写成

$$y|_{x=x_0}=y_0,$$

其中 x_0,y_0 都是给定的值；如果微分方程是二阶的，那么通常用来确定常数的条件是

$$x=x_0 \text{ 时}, \quad y=y_0, \quad y'=y_1,$$

或写成

$$y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y_1,$$

其中 x_0,y_0,y_1 都是给定的值. 上述这种条件称为**初始条件**.

确定了通解中的任意常数以后，就得到微分方程的**特解**. 例如，式(4)是微分方程(1)满足初始条件(2)的特解；式(9)是微分方程(5)满足初始条件(6)的特解.

求一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解这样一个问题，称为一阶微分方程的**初值问题**，记作

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ y|_{x=x_0}=y_0. \end{cases} \tag{10}$$

微分方程的特解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**. 初值问题(10)的几何意义，就是求微分方程的通过点(x_0,y_0)的那条积分曲线. 二阶微分方程满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y_1$ 的特解的几何意义，是通过点(x_0,y_0)且在该点处的切线斜率为 y_1 的那条积分曲线. 而微分方程的通解中含有任意常数，其解的图形构成一族积分曲线.

例 3　验证函数 $y=Ce^{-5x}+e^{-2x}$（C 为任意常数）是方程

$$\frac{dy}{dx}+5y=3e^{-2x}$$

的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=5$ 的特解.

解　将函数 $y=Ce^{-5x}+e^{-2x}$ 代入所给方程的左边，得

$$\frac{dy}{dx}+5y=-5Ce^{-5x}-2e^{-2x}+5(Ce^{-5x}+e^{-2x})=3e^{-2x}.$$

可见函数 y 满足方程，且 y 中含有一个任意常数，故 y 是此一阶微分方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=5$ 代入通解，得 $C=4$. 于是所求的特解为

$$y=4e^{-5x}+e^{-2x}.$$

习题 6.1

1. 指出下列方程哪些是微分方程，若是微分方程指出它的阶数：

(1) $5x^3+xe^x=0$；　　(2) $x^2y'''+2xy'+y=0$；

(3) $(4x-y)dx+(x+2y)dy=0$；　　(4) $y'^2+y'+y=\cos 3x$.

2. 指出下列函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y, y=5x^2$；

(2) $xy''-2y'+y=0, y=x^2e^x$.

3. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 一曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为该点横坐标的 2 倍；

(2) 曲线上点 $M(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 N，而线段 MN 被 y 轴平分.

第二节　一阶微分方程

微分方程形式是多种多样的，它们的解法也各不相同. 本节将介绍几种常用的一阶微分方程及其解法.

一、可分离变量的微分方程

在上节例 1 中，我们遇到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=3x,$$

或写成

$$dy=3xdx.$$

把上式两端积分，就得到这个方程的通解

$$y=\frac{3}{2}x^2+C.$$

但并不是所有的一阶微分方程都能这样求解. 例如，对于一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2, \tag{1}$$

就不能像上面那样用对两端直接积分的方法求出它的通解. 这是因为微分方程(1)右端含有未知函数 y,积分

$$\int 2xy^2\mathrm{d}x$$

求不出来,这是困难所在. 为了解决这个困难,当 $y\neq 0$ 时,在微分方程(1)的两端同时乘以 $\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$,使方程(1)变为

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x,$$

这样,变量 x 与 y 分离在等式的两端. 然后两端积分,得

$$-\frac{1}{y}=x^2+C,$$

或

$$y=-\frac{1}{x^2+C},\tag{2}$$

其中 C 是任意常数.

可以验证式(2)确实是微分方程(1)的解. 又因式(2)含有一个任意常数,所以它是一阶微分方程(1)的通解.

通过这个例子可以看到,在一个一阶微分方程中,若两个变量同时出现在方程的某一端,就不能直接用积分的方法求解. 但如果能把两个变量分离开,使方程的一端只含变量 y 及 $\mathrm{d}y$,另一端只含变量 x 及 $\mathrm{d}x$,那么就可以通过两端积分的方法求出它的通解.

另外,$y=0$ 也是方程的解,但无论 C 怎样取值,$y=0$ 也不能由通解(2)表示,即直线 $y=0$ 虽然是原方程的一条积分曲线,但它并不属于这方程通解所确定的积分曲线族 $y=-\frac{1}{x^2+C}$,我们称这样的解为方程的**奇解**. 也就是说,微分方程的通解未必包含其全部的解.

一般地,如果一个一阶微分方程能化成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x\tag{3}$$

的形式,那么原方程就称为**可分离变量的微分方程**.

把一个可分离变量微分方程化为形如式(3)的方程,这一步骤称为**分离变量**. 然后即可对式(3)的两端积分,有

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数依次为 $G(y)$ 及 $F(x)$,即得

$$G(y)=F(x)+C. \tag{4}$$

可以证明，由二元方程(4)所确定的隐函数 $y=y(x)$ 确是微分方程(3)的解. 二元方程(4)就称为微分方程(3)的**隐式解**. 又因式(4)含一个任意常数，所以式(4)是微分方程(3)的**隐式通解**.

例 1　求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\cos x \tag{5}$$

的通解.

解　微分方程(5)是可分离变量的，当 $y\neq 0$ 时，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\cos x\mathrm{d}x.$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\cos x\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=\sin x+C_1,$$

即

$$|y|=\mathrm{e}^{\sin x+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\sin x},$$

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\sin x}.$$

因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 是任意非零常数，又知 $y=0$ 也是方程的解，所以得方程(5)的通解可以写成

$$y=C\mathrm{e}^{\sin x}.$$

例 2　放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解　铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. 由于铀的衰变速度与其含量成正比，故得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M, \tag{6}$$

其中 $\lambda(\lambda>0)$ 是常数，叫做**衰变系数**，λ 前置负号是由于当 t 增加时 M 单调减少，即 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$ 的缘故.

方程(6)是可分离变量的.分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\lambda\mathrm{d}t.$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}M}{M}=\int(-\lambda)\mathrm{d}t,$$

以 $\ln|C|$ 表示任意常数,考虑到 $M>0$,得

$$\ln M=-\lambda t+\ln|C|,$$

即

$$M=|C|\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

这就是方程(6)的通解.

按题意,初始条件为

$$M|_{t=0}=M_0,$$

代入上式,得

$$M_0=|C|\mathrm{e}^0=|C|,$$

所以

$$M=M_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

这就是所求铀的衰变规律.由此可见,铀的含量随时间增加而按指数规律衰减.

关于放射性元素衰变规律的数学模型及其解,在考古学、计算地质构造的年龄等方面都有着重要的应用.

*二、齐次方程

可化成形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\tag{7}$$

的一阶微分方程,就称它为**齐次微分方程**,简称**齐次方程**.例如

$$xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$$

是齐次方程,因它可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$