二次分配问题及其线性化技术

张惠珍　马良　César Beltrán-Royo　著

上海人民出版社

二次分配问题及其线性化技术

张惠珍 马良 César Beltrán-Royo 著

上海人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

二次分配问题及其线性化技术/张惠珍，马良，（西）罗佑著．—上海：上海人民出版社，2013
ISBN 978－7－208－11053－3

Ⅰ．①二…　Ⅱ．①张…②马…③罗…　Ⅲ．①统筹法－研究　Ⅳ．①O223

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 244545 号

责任编辑　曹怡波
封面设计　夏　芳

二次分配问题及其线性化技术
张惠珍　马　良　César Beltrán-Royo 著
世纪出版集团
上海人民出版社出版
（200001　上海福建中路 193 号　www.ewen.cc）
世纪出版集团发行中心发行
上海商务联西印刷有限公司印刷
开本 720×1000　1/16　印张 11.25　插页 2　字数 170,000
2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－208－11053－3/C·427
定价 38.00 元

前　　言

伽达默尔曾经说过:“一切实践的最终含义就是超越实践本身”，超越实践本身形成一个系统的理论体系,从而更好地指导实践,缩短并且减轻实践过程中的阵痛。为此,我们长期以来便有了对二次分配问题及其他组合优化难题进行系统性理论研究的念头与准备。虽然从表面看二次分配问题易于描述,但真正进入该领域之后,方能领略其艰巨性。

由于随着二次分配问题实例规模的增长,其解空间呈现组合爆炸特征,因而通常在多项式时间内无法求得其最优解。过去几十年,由于二次分配问题求解的高度复杂性,已激发了人们对优化技术的研究。因此,研究二次分配问题的求解方法对优化技术和二次分配问题自身的发展有着重要意义。

本书以二次分配问题的线性化技术为基础,对所提出的二次分配问题求解方法不仅给出了相关数学证明,从理论的角度说明了各种方法的正确性,而且选用了二次分配基准问题库(QAPLIB)中的部分实例进行了解算,将计算结果与原有方法进行了比较,从实验的角度说明了本书提出的方法对二次分配问题的求解具有较好的性能。

本书的出版,将填补国内在该专题上缺乏专门著作的空白,不仅可推进运筹学、最优化等学科的理论研究和发展,也为计算机学科和管理学科在应用上提供理论支撑。

本书部分工作受国家自然科学基金项目(70871081)和上海市重点学科建设项目(S30504)的资助,在此谨致谢意。

同时,特别感谢葡萄牙里斯本大学的 Miguel Fragoso Constantino 教授、美国宾夕法尼亚大学的 Peter M. Hahn 教授和 Monique Guignard-Spielberg 教授所提供的有关材料。

作　者

2011 年 12 月

The Quadratic Assignment Problem & Its Linearization Techniques

The Quadratic assignment problem(QAP) is one of the classical NP-hard combinatorial optimization problems, which is simple to be described but difficult to be solved optimally. The QAP, an optimization problem with a diversity of applications and quite relevant in theoretical studies, has not only been applied in various fields, including factory layout, job shop scheduling, backboard wiring, etc., but also synthesizes a large group of typical characteristics of the problems in combinatorial optimization.

When solving the QAP, its computational complexity stems from the quadratic terms in the objective function. One of the first ideas to eliminate these quadratic terms is the so-called linearization of the QAP, which transforms the quadratic terms into equivalent linear ones. Of course, the resulting equivalent linear formulations of the QAP are possible because of all the original QAP variables are binary (zero or one) and it is accomplished by introducing new variables and new linear constraints. In this way, the computational complexity is decreased to a certain extent, and existing methods for (mixed) linear integer programming(MLIP) can be applied. Moreover, linear programming relaxations of the MLIP formulations can be used to compute lower bounds for the difficult large-scale QAP instances.

This book mainly focuses on the solution methods for the QAP based on the linearization techniques. Some recent solution methods proposed by the authors are discussed in detail from both theoretical and experimental points of view, respectively. The research results we present show that these solution methods provide new effective approaches to solve the QAP.

This volume presents a substantial number of QAP linearization techniques, some of them are proposed by the authors in recent years. It can be used as a reference to senior undergraduate students, graduate students, professors and researchers interested in Operations Research, Computational Mathematics, Applied Mathematics, Computer Science, Management Science and Engineering. This volume also has a certain reference value to researchers in Optimization Theory and Methods.

目　　录

第四章　二次分配问题的线性化及其多面体描述

第五章　二次分配问题的下界计算方法

第六章　几种特殊二次分配问题及其求解

Contents

第一章　预 备 知 识

§1.1　最优化问题及其分类

最优化一般是指在给定的约束条件(constraint)下,找出一个或一组决策变量(decision variable)的值,使得被称为目标函数(objective function)的表达愿望尺度的函数达到最大值或最小值[1]。这种问题可采用下述数学模型:

$$\min f(x),\ x \in \Pi \tag{1.1}$$

其中,$x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$ 为 n 维决策向量,可行域 Π 是问题变量 x 的可取值集合,目标函数 $f(x)$ 是定义在包含 Π 的适当集合上的实值函数。一般来说,可行域 Π 用与变量 x 相关的等式及不等式表示,则最优化问题也可表示为:

$$\min f(x) \tag{1.2}$$

$$g_i(x) \leqslant 0 \qquad i=1,\ \cdots,\ l \tag{1.3}$$

$$h_j(x) = 0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m \tag{1.4}$$

其中,$g_i(x)$和 $h_j(x)$为约束函数。

满足约束条件 $x \in \Pi$ 的 x 称为满足优化问题(1.1)的可行解(feasible solution)。满足 $f(x^*) \leqslant f(x)(\forall x \in \Pi)$ 的可行解 $x^* \in \Pi$ 称为优化问题(1.1)的全局最优解(global optimal solution),对应的目标函数值 $f(x^*)$称为最优值。在包含可行解 $x' \in \Pi$ 的适当邻域 $\mathrm{N}(x')$里,当 $f(x') \leqslant f(x)(x \in \Pi \cap \mathrm{N}(x'))$ 成立时,称 x'为问题(1.1)的局部最优解(local optimal solution),对应的目标函数值 $f(x')$称为局部最优值。

根据变量的类型,最优化问题可分为连续变量问题和离散变量问题两大类。前者是变量取一定区间内的连续实数,称为连续最优化问题(continuous optimization problem);后者是变量取一定区间内的整数或离散数,称为离散最优化问题

(discrete optimization problem),因其多用组合性质来表示,也称为组合优化问题(combination optimization problem)。

§1.2 组合优化问题

组合优化是运筹学的一个重要分支,至今尚未有公认的统一定义,下述是两种较常见的定义[2-3]:

定义 1.1 组合最优化是在给定有限集的所有具备某些特性的子集中,将某种目标找出一个最优子集的数学规划。

定义 1.2 一个组合优化问题 π 要么是一个极小化问题,要么是一个极大化问题,它由下述三部分组成:

(1) 实例的一个集合 D_π;

(2) 对每一个实例 $I \in D_\pi$,有一个由 I 的可行解组成的有限集合 $S_\pi(I)$;

(3) 有一个目标函数 f_π,对每一个实例 $I \in D_\pi$ 和每一个可行解 $x \in S_\pi(I)$,赋予一个有理数 $f(I, x)$,称为解 x 的目标值。

如果 π 是极小化问题(或极大化问题),则实例 I 的最优解为这样一个可行解:$x^* \in S_\pi(I)$,使得对所有 $x \in S_\pi(I)$,都有 $f_\pi(I, x^*) \leqslant f_\pi(I, x)$ (或 $f_\pi(I, x^*) \geqslant f_\pi(I, x)$)。

在组合优化问题里,需要从一个有限集或可数无限集里寻找一个对象——典型地说是一个整数、一个集合、一个排列或一个图。组合优化问题往往涉及排序、分类、筛选等问题。典型的组合优化问题有二次分配问题(QAP)、旅行商问题(TSP)、加工调度问题(scheduling problem)、背包问题(knapsack problem)、图着色问题(graph coloring problem)、聚类问题(cluster problem)等。这些问题具有很强的工程背景,数学描述虽然简单,而最优化求解却很困难,其主要原因为所谓"组合爆炸"[4]。例如,聚类问题的可能划分方式有 $k^n/k!$ 个,加工调度问题中的 Job-shop 的可能排列方式有 $(n!)^m$ 个,基于置换排列描述的 n 城市 TSP 问题有 $n!$ 种可行排列,即便对无方向性和循环性的平面问题仍有 $(n-1)!/2$。

上述组合优化问题的状态数量随问题的规模呈超指数增长,因此解决这些问题的关键在于寻求有效的优化算法,也正是这些问题的代表性和复杂性激起了人们对组合优化理论与算法的研究。

§1.3 算法及其分类

所谓算法[3]是指一步步求解问题的通用程序，是解决问题的程序步骤的一个清晰描述。如果存在一个算法，它对问题 π 的每一个实例 I，在有限步后，一定可得到该实例的关于 π 的提问的答案，那么称该算法解问题 π。

作为一个算法，应具有以下五个重要的特征[2]：

(1) 有穷性：一个算法必须保证执行有限步骤之后结束。

(2) 确切性：算法的每一步骤必须有确切的定义。

(3) 输入：一个算法有零个或多个输入，以刻画运算对象的初始情况。

(4) 输出：一个算法有一个或多个输出，以反映对输入数据加工后的结果，没有输出的算法是毫无意义的。

(5) 可行性：算法原则上能够精确地运行。

就优化机制与行为而分，目前工程中常用的优化算法主要可分为[4]：经典算法、构造型算法、改进型算法、基于系统动态演化的算法和混合型算法：

(1) 经典算法包括线性规划、动态规划、整数规划和分支定界等运筹学中的传统算法，其算法计算量一般很大，只适于求解小规模问题实例，在工程中往往不适用。

(2) 构造型算法是用构造的方法快速建立问题的解，通常算法的优化质量差，难以满足工程需要。例如，调度问题中的典型构造型方法有：Johnson 法、Palmer 法、Gupta 法等。

(3) 改进型算法，或称邻域搜索算法。从任意解出发，对其邻域的不断搜索和对当前解的替换来实现优化。根据搜索行为，其又可分为局部搜索法和指导性搜索法。

- 局部搜索法即以局部优化策略在当前解的邻域中贪婪搜索，如只接受优于当前解的状态作为下一当前解的爬山法；接受当前解邻域中的最好解作为下一当前解的最陡下降法等。
- 指导性搜索法即利用一些指导规则来指导整个解空间中优良解的探索，如模拟退火(simulated annealing, SA)、禁忌搜索(tabu search, TS)、遗传算法(genetic algorithm, GA)等。

(4) 基于系统动态演化的方法是将优化过程转化为系统动态的演化过程，基于系统动态的演化来实现优化，如神经网络和混沌搜索等。