文登教育

Wendeng Education

2014

文登教育集团课堂用书

（数学三）

考研数学复习指南

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

陈文灯 黄先开 主编

本书使用说明：

- 本书所提供的所有网络增值服务**全部免费**。
- 答疑论坛说明及各复习阶段**免费课件**介绍详见封二、封三。
- 书后附录全套**课后题详解**，答疑论坛**新赠**重点习题**视频讲解**。
- 总结**37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育

Wendeng Education

2014

文登教育集团课堂用书

（数学三）

考研数学复习指南

陈文灯 黄先开 主 编

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2014年考研数学复习指南.数学.3 / 陈文灯,黄先开主编.—北京:北京理工大学出版社,2012.12

ISBN 978-7-5640-7083-0

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… ②黄… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第288393号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 41.75
字　　数 / 777千字
版　　次 / 2012年12月第1版　2012年12月第1次印刷
定　　价 / 56.80元

责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前 言

书从1995年出版以来，历经十八年的再版和修订，集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握，以及众多考研学子的复习心得、实战体会，已成为广大考研读者的良师诤友，同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编，成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考研学子圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题，编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛（www.bjwendeng.com/bbs）”，以更好地和同学们交流，互动。从您购书开始一直到考试，文登名师将一直伴随着您！许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助、受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外，在文登教育平台的基础上，我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课，建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南，效果将事半功倍！

此次再版，我们做了以下修订。

(1)“变繁为简，变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结，得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧，并给出了详细的分析，使同学们了解这些方法的由来，让“玄妙”变得顺理成章。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的作法，经过我们的分析，原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容，修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助，再版力求尽量做到完美。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题："如何有效地利用您的书提高复习效果?""考好数学，书要看几遍?"

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看，对基础部分要多下点工夫，做到概念、定理能用自己的语言叙述，习题应全部都做。高数的基础：极限、导数与微分、不定积分；线性代数的基础：矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量；概率论与数理统计的基础：事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)，随机变量的数字特征(期望 $E(X)$、方差 $D(X)$、协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$，相关系数 ρ_{XY})。如果是自学，应先仔仔细细地把本书看一遍，然后再详细看二三遍，对重点知识点着重理解、揣摩；如果是参加强化班，最好应该与上课"同步"进行，课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗：

数学基础树的根，
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺，
功到高分自然成。

陈文灯

2012.11

目　录

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

附录 课后习题答案详解

第一篇　微积分

第一章　函数、极限和连续

第1节　重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义，如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶) 函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数：$|x|$，$\cos x$，x^{2n}(n 为正整数)，$e^{|x|}$，e^{x^2}，….

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\frac{1}{x}$，x^{2n+1}，$\arcsin x$，$\arctan x$，….

提示 判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性.

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$；　　(2) $y = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $y = F(x)\left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}\right)$，其中 $a > 0, a \neq 1$，$F(x)$ 为奇函数.

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$，

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故　$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=-\int_0^{x}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t \quad (因为 f(x) 为奇函数)$$

$$=F(x),$$

故 $y=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2},$$

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x)$,$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x)$,$g(x)$ 分别是以 T_1,T_2,($T_1\neq T_2$) 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期:$\sin x$,$\cos x$,其周期 $T=2\pi$;

$\tan x$,$\cot x$,$|\sin x|$,$|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是根据周期的定义,有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为________的周期函数.

【解】 $$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x),\left(由题设 f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

即 $f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数；

(2) 如果 $\int_a^T f(x)\mathrm{d}x \neq 0$，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

所以，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x)=\int_a^x [f(t)-k+k]\mathrm{d}t=\int_a^x [f(t)-k]\mathrm{d}t+k(x-a).$$

因为 $k(x-a)$ 是线性函数，所以，只需证明当 k 取某一值时，$g(x)=\int_a^x [f(t)-k]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$g(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t=\int_a^x [f(t)-k]\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t$$
$$=g(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT,$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，有 $g(x+T)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果 $\exists M>0$，使得对于一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界；若不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数	$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$，	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$，	$x\in(-\infty,+\infty)$
	$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$，	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$，	$x\in[-1,1]$
	$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$，	$\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$，	$x\in(-\infty,+\infty)$

提示 判别函数的界，一般先要对函数取绝对值，然后用不等式放缩法求解；或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界，且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.　　(D) 有界且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$.　　【　】

【解】$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$　(因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$)，

故 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$， 可知(C)入选.

【例 1.5】函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$.　　(D) 有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$.　　【　】

【解】$f(x)=\frac{\lg x}{x}, f'(x)=\frac{x\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$， 所以 $f'(x)>0$. 故 $f(x)$“↑”.

因此，$\frac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\lg 1}{1}$， 即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，可知，该选(C).

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对 $\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知为可导，则其单调性的判别用定义；若 $f(x)$ 在区间 X 上可导，则利用导数判别更简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0, x_2>0$. 求证：

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1>0, x_2>0$，且 $x_1<x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\quad\Rightarrow x_1 f(x_2)\leqslant x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\quad\Rightarrow x_2 f(x_1+x_2)\leqslant x_1 f(x_2)+x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1+x_2)\leqslant x_2 f(x_1)+x_2 f(x_2)\Rightarrow f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

(2) 的证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明：$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)>0$ 即可.