全国硕士研究生入学统一考试

笃志图书

2005年

考研数学

知识点归纳与总结

⊙ 主编：中国科学院　徐海军

⊙ 审阅：北京大学　王元飞

理工类

- **依据2005年版大纲**：本书依据最新大纲，由北京大学、清华大学和中国科学院多位考研辅导专家和名师联袂精心编写而成！
- **网络状体系**：对知识点进行横向、纵向的梳理、归纳和总结，形成知识网络体系图，简化复习！
- **锤炼知识点**：根据对历年考点分析，把握考试规律，剖析重难点，总结各类型解题方法！
- **结合历年真题**：将历年真题按考点系统分类，方便学生自测，检验对知识点的掌握情况！
- **提高复习效率**：考研学生一般复习六个月以上，耗时约1800小时，借助本书的归纳总结，可以为考生至少节约10% 的复习时间，即 180 个小时！

航空工业出版社

全国硕士研究生入学统

笃志图书

2005年

考研数学

知识点归纳与总结

理工类

⊙ 主编：中国科学院　徐海军

⊙ 审阅：北京大学　王元飞

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学知识点归纳与总结.理工、经济/徐海军等主编.—北京:航空工业出版社,2004.8

ISBN 7-80183-420-8

Ⅰ.考… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070808 号

考研数学知识点归纳与总结(理工类)

Kao Yan Shu Xue Zhi Shi Dian Gui Na Yu Zong Jie (Li Gong lei)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行电话:010-64978486 010-84926529

北京嘉羽印刷厂 全国各地新华书店经售

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

开本:880×1230 1/16 印张:27 字数:540 千字

印数:1—5000 全二册定价:36.00 元

本社图书如有残缺情况,请联系 010—82742769 或 13501285859

前言

各位考生：

1. 你是否仔细研读过2005年版考研大纲？

2. 你是否已经掌握考研大纲中涉及的知识点？

3. 你是否已经理解了所有的知识点，不存在含糊不清的地方？

4. 你脑海中是否形成了完善的数学知识体系？

5. 你对考研试题的结构、风格、命题思路等是否已经很熟悉？

6. 你是否对2005年的考试充满信心，是否想看看名师预测？

本书定位：

本书所做的主要工作就是将众多知识点归纳并总结，使之形成清晰的网络状体系，便于快速复习。在第一轮复习结束之后，考生需要对所有知识点有一个清晰的框架把握，在做题和查漏补缺中，始终有一个全局的概念，做到“胸中有丘壑”，同时对于各部分知识点的复习能够齐头并进而不顾此失彼，从而达到最佳的复习效果和境界。本书供各位考生第二、三轮复习使用。

本书特色：

依据新大纲：本书依据最新版的《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，由北京大学、清华大学和中国科学院多位考研辅导专家联袂精心编写而成。

网络状体系：本书十分注重知识的体系性，以整体的角度考虑数学学科并通过对大纲的解读，绘制了知识网络图，使单个的知识点形成知识体系，科学地缩短了考生对知识掌握和巩固所用的时间。知识点的选择和讲解融入了各位老师多年教学和考研辅导的经验，既保证了知识的完整性和延续性，又着重突出了考研的重点和易混淆的地方，使考生可以通过一本书完成对知识点的巩固和复习。

结合历年真题：对每部分知识点近十八年(1987年—2004年)真题都按题型进行分类，并对真题详加分析，给考生作为自测使用，让考生直面真题，感受真题的风格和命题思路。

提高复习效率：一般来说，考研耗时六个月，约1800个小时，经过试验和科学统计，本书的归纳总结平均可以为考生节约10%的时间，即180个小时。

使用建议：

1. 第二遍复习知识点时使用，巩固对知识点的理解，形成知识体系。
2. 大量的解题训练之前使用，让不同题型和相关知识点在你脑中形成联系。
3. 解题训练时着重训练名师预测的内容，直击2005年考研数学考试。
4. 解题训练遇到不清楚的知识点时作为速查手册使用。
5. 总复习时依照知识网络图，做知识点回放，查缺补漏。

本书编者

2004年7月

目　　录

前言
考研高分复习方案(供参考)
第一部分　高等数学 …… (1)
第一章　函数　极限　连续 …… (1)
一、考试要求及分析 …… (1)
二、知识网络图 …… (3)
三、重难点知识归纳总结 …… (5)
四、本章小结 …… (11)
五、历年考研真题解析 …… (11)
六、名师预测 …… (14)
第二章　一元函数微分学 …… (15)
一、考试要求及分析 …… (15)
二、知识网络图 …… (17)
三、重难点知识归纳总结 …… (21)
四、本章小结 …… (25)
五、历年考研真题解析 …… (25)
六、名师预测 …… (32)
第三章　一元函数积分学 …… (33)
一、考试要求及分析 …… (33)
二、知识网络图 …… (34)
三、重难点知识归纳总结 …… (41)
四、本章小结 …… (42)
五、历年考研真题解析 …… (42)
六、名师预测 …… (48)
第四章　向量代数和空间解析几何 …… (49)
一、考试要求及分析 …… (49)
二、知识网络图 …… (50)
三、重难点知识归纳总结 …… (51)
四、本章小结 …… (53)
五、历年考研真题解析 …… (53)
六、名师预测 …… (55)
第五章　多元函数微分学 …… (56)
一、考试要求及分析 …… (56)
二、知识网络图 …… (57)
三、重难点知识归纳总结 …… (58)
四、本章小结 …… (62)
五、历年考研真题解析 …… (62)
六、名师预测 …… (70)

第六章　多元函数积分学…………(71)
一、考试要求及分析…………(71)
二、知识网络图…………(72)
三、重难点知识归纳总结…………(80)
四、本章小结…………(85)
五、历年考研真题解析…………(86)
六、名师预测…………(101)
第七章　无穷级数…………(102)
一、考试要求及分析…………(102)
二、知识网络图…………(103)
三、重难点知识归纳总结…………(107)
四、本章小结…………(109)
五、历年考研真题解析…………(109)
六、名师预测…………(117)
第八章　常微分方程…………(118)
一、考试要求及分析…………(118)
二、知识网络图…………(119)
三、本章小结…………(122)
四、历年考研真题解析…………(123)
五、名师预测…………(127)

第二部分　线性代数…………(128)
第一章　行列式　矩阵…………(128)
一、考试要求及分析…………(128)
二、知识网络图…………(129)
三、重难点知识归纳总结…………(131)
四、本章小结…………(136)
五、历年考研真题解析…………(136)
六、名师预测…………(142)
第二章　向量　线性方程组…………(143)
一、考试要求及分析…………(143)
二、知识网络图…………(144)
三、重难点知识归纳总结…………(149)
四、本章小结…………(153)
五、历年考研真题解析…………(153)
六、名师预测…………(161)
第三章　矩阵的特征值和特征向量　二次型…………(162)
一、考试要求及分析…………(162)
二、知识网络图…………(163)
三、重难点知识归纳总结…………(165)
四、本章小结…………(167)
五、历年考研真题解析…………(167)
六、名师预测…………(175)

第三部分　概率论与数理统计 …………………………………………………………………………………… (176)
第一章　离散型随机变量概率分布及其数字特征 ………………………………………………………… (176)
一、考试要求及分析………………………………………………………………………………………… (176)
二、知识网络图……………………………………………………………………………………………… (177)
三、重难点知识归纳总结…………………………………………………………………………………… (181)
四、本章小结………………………………………………………………………………………………… (184)
五、历年考研真题解析……………………………………………………………………………………… (184)
六、名师预测………………………………………………………………………………………………… (188)
第二章　连续型随机变量概率分布及其数字特征 ………………………………………………………… (189)
一、考试要求及分析………………………………………………………………………………………… (189)
二、知识网络图……………………………………………………………………………………………… (190)
三、重难点知识归纳总结…………………………………………………………………………………… (191)
四、本章小结………………………………………………………………………………………………… (194)
五、历年考研真题解析……………………………………………………………………………………… (194)
六、名师预测………………………………………………………………………………………………… (202)
第三章　大数定律和中心极限定理 ………………………………………………………………………… (203)
一、考试要求及分析………………………………………………………………………………………… (203)
二、知识网络图……………………………………………………………………………………………… (203)
三、重难点知识归纳总结…………………………………………………………………………………… (205)
四、本章小结………………………………………………………………………………………………… (206)
五、历年考研真题解析……………………………………………………………………………………… (207)
六、名师预测………………………………………………………………………………………………… (207)
第四章　数理统计基础 ……………………………………………………………………………………… (208)
一、考试要求及分析………………………………………………………………………………………… (208)
二、知识网络图……………………………………………………………………………………………… (209)
三、重难点知识归纳总结…………………………………………………………………………………… (217)
四、本章小结………………………………………………………………………………………………… (218)
五、历年考研真题解析……………………………………………………………………………………… (219)
六、名师预测………………………………………………………………………………………………… (222)

第一部分　高等数学

第一章　函数　极限　连续

一、考试要求及分析

【数学一】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

【数学二】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数的左极限与右极限概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

数学一

历年试题分数统计

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
分数	3	8	3	13	9	9	6		8	

考点分布

分值 考点 年份	复合函数	极限运算法则	两个基本极限	单调有界准则	无穷小量
95			3		
96			3	5	
97		3			
98		3	4	6	
99		3	3		3
00		5			4
01			3	3	
02					
03		4	4		
04					

数学二

历年试题分数统计

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
分数	8	3	9	5		3	16	11	7	15

考点分布

分值 考点 年份	复合函数	极限四则运算法则	两个基本极限	夹逼原理	单调有界准则	无穷小量	间断点类型
95			5	3			
96			3				
97	3		3			3	
98							5
99							
00		3					
01	3	3	3			3	4
02					8		3
03		3				4	
04			10			1	4

二、知识网络图

(一) 函数

1. 定义

① 若有两个集合 X, Y，若对变换域 X 中的每一个 x 值，通过一定的法则对应到 Y 中的唯一元素 y，则称 f 为定义在 X 上的一个函数，称变量 y 为变量 x 的函数，记为：$y = f(x)$，其中 x 为自变量，y 为因变量.

② 把 X 称为函数定义域，$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的值域.

③ 若对 Y 中每一个 y，在 X 中均有唯一的 x 与之对应，同样地可以构造以 y 为自变量的新函数称为 $y = f(x)$ 的反函数，记为：$x = f^{-1}(y)$.

④ 函数 $y = f(\varphi(x))$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成，且 φ 的值域与 f 的定义域交集非空，则称为复合函数，其中 u 是中间函数变量.

⑤ 初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的有理运算与有限次的复合所产生的，且能用一个解析式表达出来的函数，初等函数分为代数函数和超越函数. 常见的几个初等函数：

A. 幂函数 $y = x^{\mu}$（μ 是常数）

B. 对数函数 $y = \log_a x$（a 是常数，$a > 0$ 且 $a \neq 1$）

C. 指数函数 $y = a^x$（a 是常数，且 $a > 0$）

D. 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, \cdots$

E. 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, \cdots$

2. 函数的解析式与定义域

函数的解析式

函数的解析式一般可以分为显式、隐式和参数式三种形式；

函数的类型	定　　义	表达方式
显式函数	函数因变量明显地为自变量所表达的函数解析式	$y = f(x_1, \cdots, x_n)$
隐函数	把自变量与因变量的关系用方程式的形式表示	$F(x, y) = 0$
参变量函数	用参变量来表达函数	$\begin{cases} x_i = \varphi_i(t) \\ y_j = \phi_j(t) \end{cases}$

函数的定义域

求复杂函数的定义域就是化为求解简单函数的定义域的不等式组；

通常需要考虑以下几个问题：

A. 对于分式函数来说要求其分母不等于零；

B. 对于偶次根式下的代数形式不能为负；

C. 对数的底数要求大于零且不等于 1；

D. 反三角函数 $\arcsin f(x), \arccos f(x)$ 中的 $f(x)$ 要满足 $|f(x)| \leqslant 1$.

3. 性质

函数的奇偶性

定义

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，且对任意的 $x \in X$ 都有 $f(x) = f(-x)$，或 $f(x) = -f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数或奇函数；

注意：并非所有的函数都具有奇偶性；

函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，这可以作为判断函数奇偶性的标志.

性质

(1) 任意多个奇函数的代数和仍为奇函数；

(2) 任意多个偶函数的代数和仍为偶函数；

(3) 一奇一偶函数的乘积仍是奇函数；

(4) 若 $f(x)$ 是可积的奇函数，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是偶函数.

函数周期性的讨论

定义

函数 $f(x)$ 在区间 X 有定义，若存在非零常数 T 使得 $f(x+T) = f(x)$，对在定义域内的所有 x 均成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. 其中 T 是函数 $f(x)$ 的周期.

- **3. 性质**
  - **函数周期性的讨论**
    - **性质**
      - (1) 若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 $nT(n \neq 0, n$ 为整数$)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期;
      - (2) 若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期是 $\frac{T}{|a|}$;
      - (3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T 为周期的周期函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 仍是以 T 为周期的函数;
      - (4) 常见的周期函数主要是三角函数. 连续的周期函数,若函数不是常数,则有最小周期,如 $\sin x, \cos x$ 的最小周期是 2π, $\tan x, \cot x$ 的最小周期是 π.
  - **函数的有界性**

    若函数 $y = f(x)$ 定义在区间 X 上,且同时存在常数 $M > 0$,使对 $\forall x \in X$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界.
  - **函数的单调性**
    - 设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义,对 $\forall x_1, x_2 \in X$,且 $x_1 < x_2$:
    - 若 $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调递增函数;
    - 若 $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调递减函数;
    - 若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, $f(x)$ 在区间 X 上是递增(不减) 函数;
    - 若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $f(x)$ 在区间 X 上是递减(不增) 函数.

(二) 极限

- **1. 基本概念**
  - **数列的极限**
    - 设数列 $\{x_n\}$ 和常数 μ,若对任意给定的正数 ε,总存在一个正整数 N,当 $n > N$ 时,有 $|x_n - \mu| < \varepsilon$,则称常数 μ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,即是说,当 $n \to \infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 收敛于常数 μ,记作 $\lim\limits_{n \to \infty}\{x_n\} = \mu$.
    - 数学语言描述: $\lim\limits_{n \to \infty}\{x_n\} = \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in N$,当 $n > N$ 时,有 $|x(n) - \mu| < \varepsilon$
  - **函数的极限**
    - (1) 设函数 $f(x)$ 和常数 μ,若对任意给定的正数 ε,总存在一个正数 δ,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$,则称当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 收敛于常数 μ,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mu$.
    - 数学语言描述: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x| < \delta$ 时,有 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$
    - (2) 设函数 $f(x)$ 和常数 μ,若对任意给定的正数 ε,总存在一个正数 Δ,当 $|x| > \Delta$ 时,有 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$,则称当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 收敛于常数 μ,记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \mu$.
    - 数学语言描述: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta > 0$,当 $|x| > \Delta$ 时,有 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$
  - **左极限**

    设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个左领域内有定义,存在常数 μ,若对任意 $\varepsilon > 0$,总存在一个正数 δ,对一切 $0 < x_0 - x < \delta$ 的 x,都有不等式 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$ 成立,则称常数 μ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \mu$.
  - **右极限**

    设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个右领域内有定义,存在常数 μ,若对任意 $\varepsilon > 0$,总存在一个正数 δ,对一切 $0 < x - x_0 < \delta$ 的 x,都有不等式 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$ 成立,则称常数 μ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \mu$.
  - **无穷小量**

    无穷小数学语言描述:当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 为无穷小量是指对任意给定的正数 ε,总存在一个正数 Δ,对一切使等式 $0 < |x - x_0| < \Delta$ 成立的 x 时,恒有 $|f(x)| < \varepsilon$.
  - **无穷大量**

    无穷大数学语言描述:当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 为无穷大量是指对任意给定的正数 N,总存在一个正数 Δ,对一切使等式 $0 < |x - x_0| < \Delta$ 成立的 x,恒有 $|f(x)| > N$,把无穷大量记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$;通常把取值不为零的无穷小量的倒数定义为无穷大量.

2. 求极限的方法

① 利用无穷小量的性质与运算法则来求极限；

② 利用极限的四则运算法则求极限；

③ 利用复合函数极限的运算法则求极限；

④ 利用函数极限存在的两个准则求极限；

⑤ 利用两个重要极限($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$) 求函数的极限；

⑥ 利用无穷小的等价代换定理；

常用的等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},e^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a,\ln(1+x)\sim x,\sqrt[n]{1+x}\sim 1+\dfrac{1}{n}x$

⑦ 利用洛必达法则求函数的极限；

⑧ 利用导数或定积分的定义求极限；

⑨ 利用泰勒公式求极限.

(三) 连续

1. 定义

① 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，若当自变量 x 的增量 Δx 趋于零时，对应的函数值的增量也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

② 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于 $x=x_0$ 处的函数值，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续.

2. 性质

① 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点处都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

② 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

三、重难点知识归纳总结

[知识点 1] 函数极限与数列极限的区别与联系

极限是高等数学的基础，要正确理解极限的基本概念、函数左右极限的定义以及函数极限的存在与左右极限之间的关系.

(1) 数列 $\{x_n\}$ 的极限与函数 $f(x)$ 的极限的区别：数列 $x_n=f(n)$，其中自变量 n 的变化过程是不连续的，且只有一种变化过程：$n\to\infty$；而函数 $f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有：$x\to x_0,x\to x_0^-,x\to+\infty,x\to-\infty$；

(2) 数列 $\{x_n\}$ 的极限与函数 $f(x)$ 的极限之间的联系：

① 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 一定存在，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；

② 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 仍可以存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是当 $n\to+\infty$ 时，对于任意数列 x_n，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

[知识点 2] 无穷小量　无穷大量　极限　有界函数　无界函数

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的极限为零，我们把函数 $f(x)$ 叫做 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷小，但不是绝对值很小的数，因为无穷小可以认为是这样的函数，在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε；相应地我们也不能够把无穷大量认为是绝对值无穷大的数，因为无穷大不是数，不可以把它与很大的数混为一谈.

在自变量 x 的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；

(2) 无穷小与函数极限的关系表现在：在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 中，具有极限的函数可以表达成它的极限与一个无穷小之和；相反地，如果函数可以被表示成常数与无穷小之和，则该常数就是函数的极限.

(3) 无穷小量与有界函数的区别和联系：

① 无穷小在自变量的某种趋向下，对应的函数值趋于零；而有界函数是函数值在对应的自变量定义域内的变化情况.

② 无穷小定义中的不等式是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，$|f(x)| < \varepsilon$，其中 ε 是任意小的正数；而有界函数定义中的不等式方程为 $|f(x)| < M$，其中 M 不一定是任意小的正数.

③ 无穷小量与函数有界性的联系是若函数 $f(x)$ 在当 $x \to x_0$ 时是无穷小，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个 δ 邻域内(或某去心邻域) 必定有界.

(4) 无穷大与无界函数的区别和联系：

① 无穷大是指在自变量的某种趋向下，其函数绝对值无限增大的趋势；而无界函数是指函数值在对应的自变量定义域内的变化情况.

② 无穷大定义中的不等式 $|f(x)| > M$ 对使不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 成立的一切 x 都成立，而无界函数定义中的不等式为 $|f(x)| > M$，只要求在 $0 < |X - X_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 能够找到一个 x 来满足即可.

③ 若函数 $f(x)$ 是无穷大量，则 $f(x)$ 必定无界；相反地，函数 $f(x)$ 无界时，$f(x)$ 不一定是无穷大量.

[知识点 3] 无穷小量的比较与等价无穷小的性质

(1) 无穷小的比较

若 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是在同一自变量 x 变化过程中的无穷小量，且 $\alpha(x) \neq 0$，则

① 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$；

② 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小；

③ 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = c \neq 0$，则称 $\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 同阶的无穷小；

④ 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$；

显然地，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情况，即 $c = 1$.

(2) 常见的等价无穷小

我们知道等价无穷小代换原理：若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$，且 $x \to a$ 时 $f(x) \sim \alpha(x)$，$g(x) \sim \beta(x)$，则有 $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to a} \alpha(x)/\beta(x)$.

常见的一些等价无穷小如：当 $x \to 0$ 时，有 $\sin x \sim x$，$\mathrm{tg} x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\mathrm{arctg} x \sim x$，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$e^x \sim 1 + x$，$\sqrt[n]{1+x} \sim 1 + \dfrac{1}{n}x$，$\ln(1+x) \sim x$.

(3) 等价无穷小的性质

① 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

② 常数与无穷小的乘积是无穷小；

③ 有限个无穷小的乘积仍是无穷小；

④ 若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$ 且 $lim[f(x) \pm g(x)]$ 存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$；

⑤ 若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，且 $\lim[f(x) \cdot g(x)]$ 存在，则 $\lim[f(x)g(x)] = AB = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$；

⑥ 若 $\lim f(x)$ 存在，且 C 是常数，则 $\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$；

⑦ 若 $\lim f(x)$ 存在，且 n 是正整数，则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$；

⑧ 若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，且 $B \neq 0$，$\lim[\dfrac{f(x)}{g(x)}]$ 存在，则 $\lim[\dfrac{f(x)}{g(x)}] = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$；

⑨ 若 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$，而 $\lim \varphi(x) = a$，$\lim \psi(x) = b$，那么 $a \geqslant b$.

[知识点 4] 极限存在准则、判别方法和两个重要极限

(1) 如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足以下条件：

① $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n = a$，则数列 y_n 的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$.

(2) 常用的极限判别方法是：

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) = A$；

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \text{或}x\to\infty}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A+\alpha$，其中 α 是无穷小量；

③ 夹逼定理：数列 x_n，y_n 及 z_n 满足以下条件：

A. $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$.

B. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n = a$

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$.

④ 单调有界数列必有极限.

(3) 两个重要的极限：

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 或 $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\quad\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

[知识点 5] 数列极限的求解方法

(1) 根据数列极限的定义

对于数列$\{x_n\}$来讲，若存在实数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $n\geqslant N$ 时 $|x_n - A|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛，且称 A 为数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$；

一般用来证明数列极限，若存在一个常数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $n\geqslant N$ 时 $|a_n - A|<\varepsilon$，则可推出数列的极限为 A.

(2) 根据数列极限存在的定理

利用夹逼定理和单调有界序列必有极限的重要性质来求数列极限；

其中夹逼原理：若有数列 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n = a$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$.

(3) 利用数列本身的变形求极限

往往是可以通过对数列的通项的变形来求数列的极限，其主要的方法是分子(分母)的有理化、分式化简(常可化去不定型)、裂项相消、同加减或同乘除某一个公因子等等.

(4) 利用数列的递推关系求极限

利用数列的递推关系求出数列通项，将它化为级数的形式然后再求极限(经常会用到无穷等比数列的求和公式)；

一般步骤是利用递推关系证明数列有极限，再结合题干中的特征方程求出其极限；

反之，可以先假定数列的极限存在，然后证明假设条件成立.

(5) 利用数列极限与函数极限存在的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$ 的充要条件是对于当$n\to+\infty$的任意数列 x_n，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n) = A$，利用这样的结论可以把数列的极限问题转化成函数的极限问题，从而可以利用函数极限的求解方法来计算数列的极限.

(6) 利用定积分运算

根据定积分的定义，我们知道积分是求和运算的推广，可以通过极限把不连续的问题转化成连续的问题来解决，因此有些求和极限问题实际上可以转化成定积分的问题.

(7) 利用级数的敛散条件

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件，可以计算当 $n\to\infty$ 时数列通项的极限趋于零，是证明数列级数收敛的首选方法.

(8) 利用 Stolz 定理及其相应的结论

Stolz 定理在处理一系列特殊问题上效果很显著，若数列$\{x_n\}$单调上升且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = +\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$.

推论：① 若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}y_k = l$；

② 若 y_n 恒为正，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}y_k} = l$；

③ 若 y_n 恒大于零，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n} = l$.

[知识点 6] 函数极限的求解方法

(1) 利用函数极限的定义

数学描述为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = \mu \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$，使满足 $0 < |x| < \Delta$ 的 x，有 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$

利用函数定义可以做证明题，证明某些给定函数的极限值，但是这样的方法并不是很常用，主要是逻辑推理不够严密，我们可以类似地利用函数导数定义求极限.

(2) 通过函数本身的变形来计算其极限

利用函数本身的变形来求极限类似于数列极限中的方法，利用代数式的变形是一个重要的技巧，常用的方法是分式化简、分子(或分母)有理化、求和号和极限号的次序交换、裂项相消法等.

(3) 利用洛必达法则来计算极限

① 未定式：如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，两个函数 $G(x)$，$F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，则其极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\dfrac{G(x)}{F(x)}$可能存在，也有可能不存在. 通常把这种极限称为未定式.

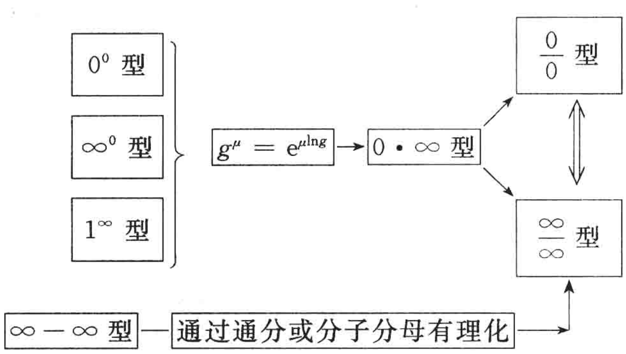
② 洛必达法则：

当 $x \to x_0$ 时，两个函数 $G(x)$，$F(x)$ 都趋于零，且在点 x_0 某去心邻域内，$G'(x)$，$F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{G(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{G'(x)}{F'(x)}$(其中$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{G'(x)}{F'(x)}$ 存在或为无穷大量)；

当 $x \to \infty$ 时，两个函数 $G(x)$，$F(x)$ 都趋于零，且 $G'(x)$，$F'(x)$ 当 $|x| > N$ 时存在，且 $F'(x) \neq 0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G'(x)}{F'(x)}$(其中$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G'(x)}{F'(x)}$ 存在或为无穷大量)；

我们把这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式极限值的方法称为洛必达法则.

③ 把不定式如 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 等形式转换成可以运用洛必达法则的未定式($\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$)，具体变换可以参考下表：



(4) 利用无穷小量代换计算函数的极限

等价无穷小代换定理：若$\lim\limits_{x\to a}f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x) = 0$，且 $x \to a$ 时 $f(x) \sim \alpha(x)$，$g(x) \sim \beta(x)$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x)$.

常见的一些等价无穷小如当 $x \to 0$ 时，有 $\sin x \sim x$，$\mathrm{tg}x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\mathrm{arctg}x \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$e^x \sim 1+x$，$\sqrt[n]{1+x} \sim 1+\dfrac{1}{n}x$，$\ln(1+x) \sim x$.

(5) 利用重要的极限性质

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　或　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$　或　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(6) 利用微分或积分中值定理计算极限

常见的微分中值定理有：罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理.

积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积且不变号，则有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \xi\in[a,b]$.

(7) 利用函数的泰勒公式展开计算极限

利用 Taylor 公式对函数进行展开，是计算 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限的最好方法，这样大大地减少计算量，只要估计函数无穷小(大) 的阶数，然后展开到相应的项即可.

[知识点 7] 求极限的方法归纳与总结

(1) 用极限的定义证明极限；

(2) 利用初等函数在其定义域内的连续性求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

(3) 利用无穷小与无穷大的关系：即在同一变化趋势下无穷大的倒数是无穷小；非“0”的无穷小的倒数是无穷大；

(4) 对有理分式函数通过进行降次处理后再求极限；

(5) 利用等价无穷小的代换或无穷小的有关性质求极限；

(6) 对有理分式可以通过分解因式约去其极限为 0 的公因式；

(7) 对有理分式进行分子或分母有理化(通常是乘以共轭因子)；

(8) 利用两个重要的极限公式求极限；

(9) 利用洛必达法则求极限；

(10) 利用级数收敛的必要条件求极限(常利用泰勒公式展开)；

(11) 利用定积分求极限；

(12) 利用数列极限与函数极限的关系求极限；

(13) 利用 stolz 定理及相应的结论求极限；

(14) 利用中值定理求极限；

(15) 利用数列的递推关系求数列极限.

[知识点 8] 函数的连续性与闭区间上连续函数的性质

函数的连续性需要从几个不同的方面来把握：一是连续函数在某一点上的等价形式；二是函数在闭区间上连续的重要性质及其定理.

(1) 函数连续的等价条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，若 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 当自变量 x 的增量 Δx 趋于零时，对应的函数值的增量也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限等于 $x=x_0$ 处的函数值，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \Leftrightarrow y=f(x)$ 在 x_0 处极限均相等，且等于函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$；

由极限的四则运算法则可知，连续函数的性质如下：

假设 $f(x), g(x)$ 均在 $x=x_0$ 处连续，则：

① $f(x)\pm g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；

② $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；

③ 如果 $g(x)\neq 0$，则 $f(x)/g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；

④ 若 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，而 $u=u(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $u_0=u(x_0)$，则复合函数 $f(u(x))$ 在 $x=x_0$ 处连

续，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = f[\lim\limits_{x\to x_0} u(x)] = f(u_0)$；

因为基本的初等函数在其定义域内均连续，故所有的初等函数在定义域区间内都连续.

归纳起来，利用函数的连续性求解问题：

A. 利用函数的连续性求函数的极限；

B. 利用函数的连续性对方程根的存在进行判定；

C. 利用连续函数的介值定理探讨函数在连续区间上取得介值的问题；

D. 利用函数连续性(连续是可微，可导的必要条件) 讨论函数的极值等问题.

(2) 函数的间断点

① 定义：函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义若出现以下的情形之一：

A. 在点 $x = x_0$ 处没有定义；

B. 虽在点 $x = x_0$ 处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

C. 虽在点 $x = x_0$ 处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

② 间断点分类：

通常把间断点分成两类：

A. 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x-0)$ 和右极限 $f(x+0)$ 都存在，那么称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点；其中左右极限均相等者称为可去间断点，反之不相等者称为跳跃间断点.

B. 把不是第一类间断点的任何间断点称为第二类间断点，常见的是无穷间断点和无限振荡间断点.

(3) 闭区间上连续函数的性质

若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界，且在$[a,b]$ 上能取得函数 $f(x)$ 在最大值 M 和最小值 m 间的一切值，即设 $m \leqslant \lambda \leqslant M$，则至少存在 $\zeta \in [a,b]$，使得 $f(\zeta) = \lambda$.

①(最值定理) 在闭区间上连续的任意函数一定有最大值和最小值；

②(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界；

③(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b) < 0$)，那么在开区间(a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $a < \zeta < b$，使 $f(\zeta) = 0$；

④(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续，且在区间的端点处取不同的函数值 $f(a) = A$，$f(b) = B$，则对于 A 与 B 之间的任意一个数λ，在(a,b) 内至少存在一点 ε，使得 $f(\varepsilon) = \lambda(a < \varepsilon < b)$.

[知识点 9] 重要定理、公式与结论

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \varepsilon(x)$ 其中$\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$，$\varepsilon(x)$ 为无穷小量；

(3) 如果有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$，且 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$)，则 $C \geqslant 0$(或 $C \leqslant 0$)；

(4) 单调有界数列必有极限；

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$；

(7) $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}}{c_1x^m + c_2x^{m-1} + \cdots + c_mx + c_{m+1}} = \begin{cases} \dfrac{a_1}{c_1}, \text{当 } n = m \text{ 时} \\ 0, \text{当 } n < m \text{ 时} \\ \infty, \text{当 } n > m \text{ 时} \end{cases};$$

(8) 当 $x \to +\infty$ 时，下列各函数趋于 $+\infty$ 的快慢程度

由快到慢的顺序为：x^x，$a^x(a > 1)$，$x^a(a > 0)$，$\ln x$；

(9) 当 $n \to \infty$ 时，下列各函数趋于 $+\infty$ 的快慢程度