

计算空气动力学 并行编程基础

Foundations of Computational
Aerodynamics Parallel Programming

刘巍 张理论 王勇献 邓小刚 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

014900959

V211.3
03

计算空气动力学 并行编程基础

Foundations of Computational
Aerodynamics Parallel Programming

刘巍 张理论 王勇献 邓小刚 编著



V211.3
03

国防工业出版社

· 北京 ·



北航

C1687480

图书在版编目(CIP)数据

计算空气动力学并行编程基础/刘巍等编著. —北京:
国防工业出版社, 2013. 8
ISBN 978-7-118-08943-1

I. ①计... II. ①刘... III. ①计算空气动力学 -
并行程序 - 程序设计 IV. ①V211.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 168495 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 21 字数 430 千字

2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 55.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前 言

计算空气动力学采用数值计算的方法求解可压缩流体方程组,可用于分析各类飞行器的气动特性,从而减少实验次数与成本,缩短型号研制周期。目前我国航空航天技术与超级计算机技术正处于快速发展阶段,面向各类飞行器设计的计算空气动力学属于二者之间的交叉学科,在科学研究与工程应用中的地位日益凸显。然而,计算空气动力学的方程与模型较为复杂,初学者难以在短时间内掌握其基本方法与实现细节,在开发计算空气动力学程序与软件之前,往往需要将公式从头推导一遍,才能清晰地理解各物理量的相互关系并获得适用于编程的方程形式,这些重复工作浪费了大量宝贵时间。

本书从基本假设出发,系统地推导出计算空气动力学在曲线坐标系下适用于编程的方程形式与求解过程。本书内容主要分成三部分,第一部分(第1章至第5章)是计算空气动力学的基础内容,包括三维可压缩流体方程组在曲线坐标系下的形式、显式与隐式时间离散及其求解方法、对流项与黏性项的空间离散格式、边界条件处理方法以及加速收敛技术;第二部分(第6章与第7章)主要内容是湍流与高温气体物理模型;第三部分(第8章与第9章)主要内容是计算空气动力学编程过程需要涉及的数据文件格式、前后处理方法、并行程序设计方法与并行软件框架应用。

计算空气动力学必须结合高性能计算技术才能发挥更大的作用。目前计算机芯片摩尔定律的维系不再依靠提高单核频率,而是依靠采用多核、众核以增加处理器核数。高性能计算机采用多核、众核已经成为常态,因此需要在现有 MPI 并行程序的基础上引入线程级并行(例如 OpenMP)才能充分发挥计算机的高性能。本书融入了最新发展的计算空气动力学大规模并行程序设计、MPI + OpenMP 两级并行策略以及高性能并行软件框架等内容,在计算空气动力学物理模型与高性能计算机之间架起一座桥梁。

本书具有三个鲜明的特色:专业知识点递进式详细推导、并行算法设计基于高性能计算平台、能够系统地指导软件开发人员编程实现。作者站在计算空气动力学高性能计算软件开发人员的视角,较为详细地梳理了计算空气动力学的基本方程与离散方法,推导出可用于实际编程的算法实现形式,侧重于让程序设计人员从顶层直观地理解数值计算流程与方法,从而更好地从底层编写、校验、修改与优化计算空气动力学并行程序与软件。本书能够弥补现有计算空气动力学专著偏重于

模型方程性质讨论与常见差分格式分析等经典内容,而不适用于指导具体编程、未能很好地与高性能计算机硬件体系结构相结合等不足。通过对本书内容的学习,软件开发人员可提高计算空气动力学并行软件的性能与质量,进而提升高性能计算机应用水平。

本书面向的读者对象是计算空气动力学方向的研究生与科研人员,掌握一定的空气动力学基础知识对于理解本书内容更为有利。本书对从事其他科学工程领域同样需要求解偏微分方程组的高性能计算机应用人员也有一定的参考价值。

本书在选材与出版方面得到了国家自然科学基金项目(11272352)、国家重点基础研究发展计划课题(2009CB723803)的支持与资助。在书稿准备与出版过程中,国防工业出版社的编辑人员给予了大力支持与帮助,在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在错误与不足,恳请读者斧正,与本书内容相关的问题可发至:aerodynamics_nudt@126.com。

作 者

2013 年 5 月于长沙

目 录

第 1 章 基本方程形式	1
1.1 引言	1
1.1.1 计算空气动力学的作用	1
1.1.2 计算空气动力学的特点	2
1.1.3 计算空气动力学的步骤	3
1.2 热力学基础	4
1.2.1 气体状态方程	4
1.2.2 比热、内能和焓	4
1.2.3 黏性系数	5
1.2.4 传热系数	5
1.3 直角坐标系下微分形式 N-S 方程	5
1.3.1 连续介质假设	6
1.3.2 方程通用形式	7
1.3.3 质量方程	8
1.3.4 动量方程	8
1.3.5 能量方程	10
1.3.6 N-S 方程组	12
1.4 无量纲化	13
1.4.1 特征量的选取方法	13
1.4.2 方程组无量纲化因子	14
1.4.3 方程组无量纲化	15
1.4.4 特征速度不同引起的表达式差异	18
1.5 曲线坐标系下微分形式 N-S 方程	19
1.5.1 度量系数	20
1.5.2 坐标变换	24
1.5.3 有限差分法	28
1.6 积分形式 N-S 方程	28
1.6.1 直角坐标系下积分形式 N-S 方程	29
1.6.2 曲线坐标系下积分形式 N-S 方程	32

1.6.3	有限体积法	32
1.6.4	有限体积法度量系数	36
1.6.5	有限体积法单元体积	39
1.7	有限差分法与有限体积法	40
1.7.1	有限差分法与有限体积法的异同	41
1.7.2	有限差分—有限体积混合方法	42
第2章	时间离散格式	44
2.1	显式 Runge – Kutta 法	44
2.2	隐式方法残差项线性化	45
2.2.1	对流通量 Jacobian 矩阵与分裂	47
2.2.2	黏性通量 Jacobian 矩阵与谱半径	52
2.2.3	有限体积法七对角矩阵	61
2.2.4	有限差分法十三对角矩阵	62
2.3	隐式线性化定常流动求解方法	63
2.3.1	当地时间步长	63
2.3.2	定常流方程组形式	63
2.3.3	点松弛 SGS 解法	64
2.3.4	线松弛 SGS 解法	66
2.3.5	LU – SGS 解法	67
2.3.6	LU – ADI 解法	68
2.3.7	Jacobi 迭代法	70
2.4	隐式线性化非定常流动求解方法	71
2.4.1	单时间步法	71
2.4.2	双时间步法	73
2.5	初始条件	74
2.5.1	给定原始变量	74
2.5.2	给定飞行高度、马赫数、攻角与侧滑角	75
2.5.3	给定雷诺数、马赫数、温度、攻角与侧滑角	75
2.6	收敛判据	76
2.6.1	定常流动迭代收敛判据	76
2.6.2	非定常流动亚迭代收敛判据	76
第3章	空间离散格式	78
3.1	曲线坐标系下的导数计算	78
3.2	对流项半点重构	80
3.2.1	二阶 MUSCL 重构	81

3.2.2	五阶显式 WCNS 重构	83
3.3	对流通量导数	85
3.3.1	矢通量分裂格式 (FVS)	85
3.3.2	通量差分裂格式 (FDS)	90
3.3.3	混合格式 (AUSM)	91
3.4	黏性通量导数	95
3.4.1	完全 N-S 方程	96
3.4.2	薄层近似方程	99
3.5	再论通量 Jacobian 矩阵	102
第 4 章	边界条件处理	104
4.1	虚网格概念	105
4.2	特征分析	106
4.2.1	边界信息传播方向	108
4.2.2	特征线相容关系式	109
4.3	远场边界条件	111
4.3.1	远场特征变量边界条件	112
4.3.2	远场 Riemann 边界条件	115
4.4	壁面边界条件	116
4.4.1	无黏壁面	116
4.4.2	黏性壁面	119
4.5	对称边界条件	120
4.6	内边界条件	122
第 5 章	加速收敛技术	125
5.1	多重网格方法	125
5.1.1	基本循环 FAS 格式	125
5.1.2	多重网格循环策略	126
5.1.3	传递算子	127
5.2	预条件 Newton-Krylov 算法	130
5.2.1	非线性函数	131
5.2.2	非精确 Newton 法	133
5.2.3	Krylov 子空间方法	134
5.2.4	预条件 JFNK 算法	144
第 6 章	湍流模型方程	152
6.1	雷诺时均控制方程	153
6.1.1	雷诺时均方法	153

6.1.2	时均方程无量纲化	155
6.2	零方程湍流模型	156
6.2.1	Baldwin - Lomax 湍流模型	157
6.2.2	Degani 修正的 B - L 湍流模型	158
6.3	一方程湍流模型	158
6.3.1	Baldwin - Barth 湍流模型	159
6.3.2	Spalart - Allmaras 湍流模型	160
6.4	两方程湍流模型	160
6.4.1	Wilcox $k - \omega$ 模型	160
6.4.2	Menter's $k - \omega$ 模型	161
6.4.3	EASM Gatski - Speziale $k - \omega$ 模型	163
6.4.4	EASM Girimaji $k - \varepsilon$ 模型	167
6.4.5	Abid $k - \varepsilon$ 模型	169
6.4.6	EASM Gatski - Speziale $k - \varepsilon$ 模型	170
6.5	初始条件与边界条件	172
6.6	应用湍流模型的注意事项	173
6.7	两方程湍流模型通用形式	174
第 7 章	高温气体效应	176
7.1	气体模型	176
7.1.1	质量比焓与内能	177
7.1.2	质量比熵	178
7.1.3	混合气体自由焓	179
7.2	高温气体化学平衡流	180
7.2.1	Gibbs 最小自由焓方法	180
7.2.2	能量守恒方程计算温度	183
7.3	高温气体热化学非平衡流	184
7.3.1	高温气体非平衡方程组	184
7.3.2	对流项 Jacobian 矩阵	186
7.3.3	组分生成源项及其 Jacobian 矩阵	202
7.3.4	振动源项及其 Jacobian 矩阵	210
第 8 章	前后处理方法	216
8.1	数据文件格式	216
8.1.1	网格与流场文件格式 PLOT3D	216
8.1.2	边界文件格式 Generic. inp	218
8.1.3	Tecplot 格式的可视化文件	224

8.1.4	CGNS 格式转换	226
8.2	网格奇点与搜索	243
8.2.1	奇点重构的问题描述	245
8.2.2	重构算法及时间复杂性分析	246
8.2.3	数值实验结果与讨论	248
8.3	网格二次剖分技术	250
8.3.1	网格块分组问题	251
8.3.2	二次剖分方法	252
8.3.3	剖分法的选择策略	255
8.4	气动特性计算	256
8.4.1	气动力	257
8.4.2	气动力矩	264
8.4.3	升/阻力与压心	266
8.4.4	气动热	268
第 9 章	并行编程基础	271
9.1	并行计算与并行编程	272
9.1.1	并行计算相关概念	272
9.1.2	并行计算机系统结构与分类	274
9.1.3	并行编程模型与实现技术	275
9.1.4	并行编程的常用模式	280
9.2	并程序序设计	284
9.2.1	并程序序流程设计	284
9.2.2	MPI 进程并行	286
9.2.3	OpenMP 线程并行	288
9.3	并程序序性能优化技术	295
9.3.1	提升并程序序性能的技术	295
9.3.2	数值实验结果与讨论	300
9.4	并行软件框架 PETSc	303
9.4.1	PETSc 软件体系结构	303
9.4.2	PETSc 软件功能	304
9.4.3	基于 PETSc 编程	305
9.4.4	多 DMDA 创建实例	314
参考文献		322
主要符号表		325

第1章 基本方程形式

1.1 引言

1.1.1 计算空气动力学的作用

空气动力学(Aerodynamics)是流体动力学(Fluid dynamics)的一个分支,主要研究空气与周围物体之间力、热等相互作用。在计算机问世以前,研究气体流动规律的主要方法有实验研究(以地面实验为研究手段)和理论分析(基于流动简化假设,给出所研究问题的解析解)。实验研究的优点是可以借助各种先进仪器设备,给出复杂流动准确、可靠的观测结果,这些结果对于流动机理研究和飞行器设计具有不可替代的作用;但实验研究不仅费用高、周期长,而且有些流动状态难以通过实验进行研究。理论分析的优点是可以给出具有一定适用范围的解析解或近似解析解,这些解析解可作为分析流动机理的有力工具;但由于流体运动具有强非线性,所研究流动问题的数学模型有时要经过很大的简化,在这种条件下得到的解析解适用范围非常有限,因此理论分析一般只能研究简单的流动问题,远不能满足工程设计需要。

空气流动需要遵守的定律主要来自四个方面:

- (1) 运动学方面:质量守恒定律(或称连续性条件);
- (2) 动力学方面:牛顿第二定律(即动量定理);
- (3) 热力学方面:能量守恒定律(即热力学第一定律)以及熵方程(即热力学第二定律,如等熵流动下存在压强与密度的等熵关系式);
- (4) 气体物理与化学属性方面:如气体状态方程、高温效应下气体组元间的化学反应方程、气体输运机理(黏性、热、扩散)等。

基于以上基本定律以及相关的本构方程(切应力与速度梯度的关系)和状态方程,可形成描述空气状态(密度、速度、压强)随时间变化率的偏微分方程组(也可在有限区域内进行积分得到积分形式方程组),即 Navier - Stokes 方程,简称 N - S 方程,一般也称为控制方程(Governing Equations)。计算机的出现使数值求解流体控制方程成为可能,并逐渐形成了一个新学科:计算流体动力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)。计算流体动力学是通过数值方法求解流体动力学控制方程,得到流场状态离散的定量描述,并以此研究、预测流体运动规律的学科。CFD 将流体运动控制方程中的积分、微分项近似地表示为离散的代数形式,使积分或微

分形式的控制方程组转化为代数方程组,再通过计算机求解这些代数方程组,从而得到流场在时间、空间点上的数值解(Numerical Solution)。CFD 也称为流场的数值模拟、数值计算、数值仿真等。为了适应航空、航天、航海事业的发展需要,CFD 自 20 世纪诞生以来已经取得长足进步。特别是随着航空航天事业的发展,以空气为流动介质的计算空气动力学(Computational Aerodynamics)逐渐从 CFD 中分离出来,其特点是流体介质具有显著的可压缩性,以及流场内可能出现由于气体受到压缩而引起的激波、高温效应等物理与化学现象。由于计算空气动力学所采用的方程与方法通常也适用于其他气体,因此计算空气动力学有时也称为计算气体动力学(Computational Gasdynamics)。

计算空气动力学有力地促进了空气动力学的研究。理论分析提供了描述空气运动的数学、物理模型,实验研究发现了很多有意义的流动现象,计算空气动力学则架起了从数理模型到流动现象之间的桥梁,这主要体现在两个方面:一方面,由于仅通过一次计算无法预知参数变化对流动的影响,这一点与实验研究相近;另一方面,计算空气动力学处理的是流体控制方程,而理论分析也是通过各种方法简化流体控制方程从而得到解析解。计算空气动力学不仅能够克服实验研究与理论分析的诸多限制,而且可以发现一些新的流动现象和机理,已成为空气动力学不可或缺的第三种研究方法。

计算空气动力学在飞行器设计中的主要任务包括:空气动力的高精度计算、湍流计算、减阻设计、气动热分析、气动弹性分析、气动载荷分析等。世界各主要航空航天强国都非常重视计算空气动力学的发展,并且已经出现了多套优秀的研究软件、专业软件以及商用软件,应用这些软件可降低对风洞实验的依赖,从而大幅度降低飞行器设计成本、缩短研制周期。目前,计算空气动力学已成为航空航天飞行器设计的利器。

1.1.2 计算空气动力学的特点

(1) 计算空气动力学的发展与计算机技术的发展直接相关。计算空气动力学的网格规模越大、所模拟的流动现象越复杂、所研究飞行器的外形越接近实际,则对计算机内存与运算速度的要求越高,二者之间的发展是相互促进的。

(2) 计算空气动力学与计算数学存在紧密联系。计算空气动力学将控制方程离散为代数方程组,在此过程中产生了一系列数学问题。由于流体运动的控制方程具有非线性,数值方法也必须体现非线性的特点,而非线性问题的数值方法属于计算数学的难点问题。

(3) 计算空气动力学具有典型的多学科交叉特点。所涉及的学科有空气动力学、偏微分方程的数学理论和数值方法以及计算机科学等。计算空气动力学的发展促进了这些学科的发展,而体现计算空气动力学真实水平的标准是解决实际问题的能力。

(4) 计算空气动力学的发展在很大程度上依赖于实验研究和理论研究的发展。由于缺乏数值解误差评估的严格理论,计算空气动力学结果的验证与确认通常依赖于与实验结果对比。计算空气动力学所采用的各种数学模型则是理论研究的成果。理论工作者在研究气体运动基本规律的基础上,建立了多种类型的辅助方程,提出了各种简化的流动模型,给出了一系列解析解和数值方法,这些研究成果奠定了计算空气动力学的理论基础^[1]。

1.1.3 计算空气动力学的步骤

(1) 计算区域的几何描述。计算区域内表面的几何形状来源于飞行器外形,计算区域外表面的几何形状一般无明确要求,但外表面到内表面之间的距离与流动马赫数有关。对于亚声速流场,由于流场内一点的扰动可以传遍整个流场,因此要求计算域外表面距离内表面足够远,一般情况下此距离需要取 20 倍飞行器长度以上。对于超声速流场,由于下游扰动不影响上游,因此上游的计算域只要求包含住头部激波即可,下游的计算域根据是否计算飞行器底部阻力而定:若不计算底部阻力,则下游计算域在飞行器尾部即可截止;若计算底部阻力,则需要将下游计算域包含住底部的回流区。

(2) 计算域离散化。空气动力学控制方程中包括时间与空间的变量(自变量)以及物理变量(因变量),这些变量对应着时间与空间上流动问题的解。要把控制方程中微分或积分项用离散的代数方程代替进而求解变量,必须首先把求解域表示为离散形式,即网格划分。变量可定义在每一个网格点或者控制体中心上,流体运动方程中的积分或微分项被近似地表示为离散分布的因变量和自变量的代数函数,并由此得到一组代数方程,这个过程称为控制方程的离散化(Discretization),其中所采用的离散化方法称为数值方法或数值格式。

(3) 根据流动问题确定控制方程。例如,在进行可压缩流动计算时,可选用五变量 $N-S$ 方程;在进行高超声速流动计算时,由于强激波后的温度很高,还要考虑是否增加气体组分的化学反应方程。有时为了提高计算效率,也可以简化 $N-S$ 方程,例如黏性项采用薄层近似假设,甚至采用忽略黏性的 Euler 方程。

(4) 确定初始条件与边界条件。初始条件用于流场初始化,外流场计算的初始条件一般采用未受扰动自由来流下的空气参数。边界条件是在计算域的边界上需要满足的变量关系式。初始条件与边界条件是控制方程有确定解的前提,控制方程与初始条件、边界条件共同构成一个物理过程完整的数学描述。

(5) 计算程序设计、验证与确认。在网格划分和数值方法的基础上,编制、调试数值求解流动控制方程的计算机程序或软件。编制大型的软件要遵循软件工程方法、原则以及相关的行业标准。采用先进的程序调试工具和调试方法,可以提高程序或软件设计与调试的效率。在程序调试完成后,还应通过典型算例对其进行验证(Verification)与确认(Validation),确保程序或软件实现了设计者的目的,这也

是 CFD 研究的重要内容之一。

(6) 数值解的显示和评价。在得到数值解后,对数值解进行显示与分析是 CFD 中的重要环节,一般称为后处理(Post-processing)。后处理一般包括:①计算感兴趣部件的气动力、力矩、压力中心;②应用流场可视化软件对流场进行显示与分析;③对数值方法和物理模型的误差进行评估等。与后处理相对应的是前处理(Pre-processing),包括网格划分等迭代求解控制方程之前的工作。

1.2 热力学基础

1.2.1 气体状态方程

空气在一定温度和压强范围内可近似为热完全气体(Thermally Perfect Gas),热完全气体满足气体状态方程(克拉柏龙方程):

$$p = \rho RT = \rho TR_u/M_w \quad (1.1)$$

式中, p 为气体压强; ρ 为气体密度; T 为气体温度; R 为气体常数(不同气体的值不同); R_u 为通用气体常数($8314.3 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$); M_w 为气体分子摩尔质量。对于空气来讲,摩尔质量等于 28.95 kg/kmol 气体常数为

$$R_{air} = \frac{R_u}{M_{w,air}} = \frac{8314.3 \text{ J}}{28.95 \text{ kg} \cdot \text{K}} = 287.2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (1.2)$$

1.2.2 比热、内能和焓

热完全气体的内能与焓仅是温度的函数,当温度在一定范围内时,其定容比热 c_v 、定压比热 c_p 以及比热比 γ 保持恒值不变,此时的热完全气体称为量热完全气体(Calorically Perfect Gas)。量热完全气体的比内能与比焓(或称单位质量内能与焓)分别为

$$e_{in} = c_v T, h = c_p T \quad (1.3)$$

设单位质量气体动能为 e_k , 气体总比内能可表示为

$$e = e_{in} + e_k = c_v T + (u^2 + v^2 + w^2)/2 \quad (1.4)$$

考虑到气体比热存在如下关系式:

$$c_p - c_v = R, c_p = \gamma c_v \quad (1.5)$$

因此:

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (1.6)$$

气体总比内能又可表示为

$$e = \frac{RT}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (1.7)$$

1.2.3 黏性系数

气体动力黏性系数 μ (单位: $\text{Pa} \cdot \text{s}$)是温度与流动状态的函数,计算式为

$$\mu = \mu_l + \mu_t \quad (1.8)$$

式中, μ_l 与 μ_t 分别为层流黏性系数与湍流黏性系数。其中层流黏性系数可通过 Sutherland 公式计算:

$$\mu_l \approx \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \left(\frac{T_0 + T_s}{T + T_s} \right) \quad (1.9)$$

式中, $T_0 = 273.15\text{K}$;对于空气 $\mu_0 = 1.71608 \times 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$, $T_s = 110.4\text{K}$ 。

湍流黏性系数一般采用湍流模型计算。当流动状态为层流时, $\mu_t = 0$ 。

1.2.4 传热系数

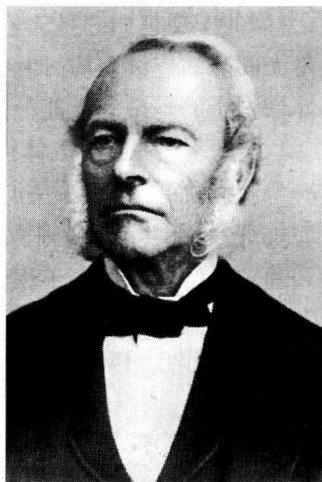
对于各向同性的流体,导热系数无方向特性,仅是温度与流动状态的函数,计算式为:

$$k = \frac{\mu c_p}{Pr} \Rightarrow k = k_l + k_t = \frac{\mu_l c_p}{Pr_l} + \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \quad (1.10)$$

式中, k_l 与 k_t 分别表示层流传热系数与湍流传热系数; Pr_l 与 Pr_t 分别表示层流普朗特数与湍流普朗特数,对于空气等双原子分子气体, $Pr_l \approx 0.72$ 、 $Pr_t \approx 0.9$ 。



Prandtl



Stokes

1.3 直角坐标系下微分形式 N-S 方程

首先给出本章 N-S 方程各种形式的推导顺序以及方程形式与离散方法的关系,如图 1.1 所示。

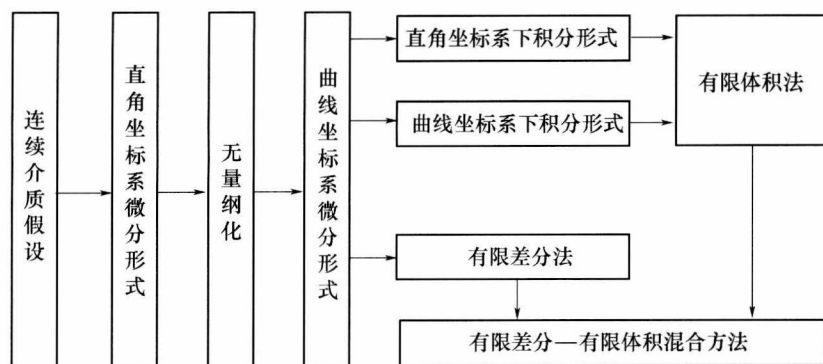


图 1.1 本章 N-S 方程各种形式的推导顺序以及方程形式与离散方法关系示意图

1.3.1 连续介质假设

流体包括液体与气体,二者都是由大量不断运动的分子所组成,分子间经常发生碰撞,并交换动量与能量。如果将流体看作由分子构成的质点系,根据牛顿定律可列出分子运动的微分方程组,在一定的初始条件与边界条件下可求解该微分方程组,进而得到流体的运动状态。然而由于分子数目相当大,而且分子之间力的性质与输运过程尚不完全清楚,因此从数学上求解这一方程组较为困难。

流体力学研究的是流体的宏观运动,而流体的宏观运动显然取决于分子的微观运动,流体的宏观规律即是大量分子微观运动的统计平均规律。宏观的流体可以看成是无间隙的连续介质,即认为流体微团连续地充满了流体所在的整个空间,所谓流体微团指的是微观上充分大(远远大于分子运动平均自由程)、宏观上又充分小(远远小于所感兴趣的流体运动空间尺度)的分子团。在宏观上可把流体微团看成一个质点,而不必再去关心流体微团的尺寸。流体微团所具有的宏观物理量(如质量、速度、压强、温度等)满足一切应该遵循的物理定律,而流体的某些物理常数必须由实验确定。有了连续介质假设,在研究流体宏观运动时,就可以把一个本质上是大量分子或原子的运动问题近似为连续充满整个空间的流体微团运动问题,而且每个空间点和每个时刻都有确定的物理量,这些物理量都是空间坐标和时间的函数。

连续介质假设是流体力学中第一个根本性假设。在一般情况下,连续介质假设是合理的,这是因为宏观问题的特征尺度(如机翼的翼弦长度)和特征时间(如机翼的振动周期)与分子间的距离及碰撞时间相比大得不可比拟,个别分子的行为几乎不影响大量分子统计平均后的宏观物理量,因此在考虑流体的宏观运动时不必直接考虑流体的分子结构,而采用连续介质假设。但是在某些特殊问题中,连续介质假设可能不成立。例如导弹和卫星在高空中飞行时,分子间的距离很大,以至于可与飞行器的特征尺度相比拟,此时连续介质假设失效。

1.3.2 方程通用形式

在连续介质假设下,流体微团集合的运动状态可采用流体动力学方程描述。描述流体运动的方法一般有欧拉法、拉格朗日法以及任意拉格朗日—欧拉法(Arbitrary Lagrangian – Eulerian, ALE),这些方法主要描述流体微团集合的运动状态,即流动参数。流体参数包括运动特征量(如流体微团的速度)和热力学状态特征量(如压强、密度与温度),这些流动参数是时间与空间的函数。

在欧拉法中,网格(流动区域)的位置固定,网格点的运动速度为零,流体微团穿过网格区域或网格单元构成的控制体。在拉格朗日法中,网格随流体运动,网格点的速度与当地流体微团的速度相同。由于流体微团的速度及其变形规律是由流体动力学定律决定的,不能人为给定,因此拉格朗日方法在实际应用中受到了限制^[2];相比之下,事先给出网格,再求解流体动力学基本方程的欧拉法获得了广泛应用。在空气动力学领域中,经常出现部件相对运动的情况(例如机翼颤振、多体分离等),此时描述飞行器外部流动区域的网格也要随之运动,需要采用能够考虑网格运动的任意拉格朗日—欧拉法。为了便于理解,本章将首先推导出在直角坐标系(网格静止)下采用欧拉法描述的流体动力学方程(即N-S方程),再通过坐标转换,将方程形式转为曲线坐标系(网格运动)下采用任意拉格朗日—欧拉法描述的流体动力学方程。

在推导流体动力学N-S方程之前,首先定义笛卡儿直角坐标系。笛卡儿直角坐标系(简称为直角坐标系)一般与初始状态的网格坐标系相同,初始状态的网格坐标系即生成网格时采用的坐标系,原点任意(一般取飞行器头部顶点); x 轴一般取飞行器体轴,从头部指向尾部为正; y 轴一般在飞行器纵向对称面内与 x 轴垂直,向上为正; z 轴与 x 轴、 y 轴组成右手坐标系。在直角坐标系三个轴正方向上分别取三个点,原点与此三点形成三条线段,长度分别为 Δx 、 Δy 、 Δz ,并以此三条线段为棱形成一个长方体。令该长方体体积无穷小,即 $\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$,则气体状态量在小长方体各个面上可认为均匀分布,即

$$\iint \phi ds \approx \phi \Delta s \quad (1.11)$$

ϕ 为通用气体守恒变量。在小长方体上的体积分也可近似为

$$\iiint \phi d\Omega \approx \phi \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.12)$$

在欧拉法下,定义 ϕ 通量流出小长方体为正,则 x 方向 ϕ 的净流出量为

$$\left[\phi u + \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z - \phi u \Delta y \Delta z = \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.13)$$

同理, y 方向与 z 方向的净流出量分别为

$$\left[\phi v + \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \Delta z - \phi v \Delta x \Delta z = \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.14)$$