概率论与数理统计
学习指导与习题解析

陈晓兰 马玉林 主编

山东教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与习题解析/陈晓兰，马玉林主编.—济南:山东教育出版社,2013
ISBN 978-7-5328-8162-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陈… ②马… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第227063号

概率论与数理统计
学习指导与习题解析
陈晓兰 马玉林 主编

主　　管：山东出版传媒股份有限公司
出 版 者：山东教育出版社
　　　　　(济南市纬一路321号 邮编:250001)
电　　话：(0531)82092664 传真:(0531)82092625
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印　　刷：山东新华印刷厂潍坊厂
版　　次：2013年8月第1版第1次印刷
规　　格：787mm×1092mm 16开本
印　　张：16.25印张
字　　数：301千字
书　　号：ISBN 978-7-5328-8162-8
定　　价：26.00元

(如印装质量有问题,请与印刷厂联系调换)
印厂电话:0536-2116806

前言

《概率论与数理统计》是研究随机现象统计规律性的一门学科，是高等财经类院校本科阶段开设的一门必修课程，同时又是硕士研究生入学考试的主要内容之一。为了帮助同学们进一步学好该课程，提高解题水平和解题技巧，我们组织多年讲授该课程的教师编写了这本《概率论与数理统计学习指导与习题解析》。

本书是经济科学出版社出版的《概率论与数理统计》的配套参考书，全书紧扣教材，内容结构与教材保持一致，并侧重以下几点：第一，对每章所涉及的概念、定理等主要内容作简明扼要的总结，并指出对某些概念和定理应如何理解；第二，归纳出每一章的重点和难点及典型题型的解题方法和解题步骤；第三，例题分析是本书的重点，本书给出了课后习题A组较难习题的解答和B组部分答案，有的习题给出多种解法，便于加强学生对课本知识的理解；第四，为了提高学生对知识的综合运用能力和解题能力，每章后面补充了大量习题，习题除了选自一些国内外有影响的参考书或刊物外，还大量选自历届研究生入学考试的题目，并附有自测题的全部答案，供学生练习之用。

本书可作为高等财经类院校各专业学生学习《概率论与数理统计》课程的辅导材料，还可作为讲授本课程教师的教学参考用书。

本书由山东财经大学数学与数量经济学院组织编写，其中第1章由周玉珠编写，第2章和第5章由郭洪峰编写，第3章和第4章由张慧编写，第6章和第9章由王晓杰编写，第7章和第8章由马玉林编写，陈晓兰、马玉林负责全书的统稿和审定工作。

由于我们经验不足，水平有限，书中难免有不足或谬误之处，恳请各位专家及广大读者批评指正，我们表示衷心的感谢。

编者

2013年7月

目录

第 1 章　随机事件及其概率 …………………………………………………… (1)
1.1　知识点总结 ………………………………………………………………… (1)
1.2　难点解析 …………………………………………………………………… (5)
1.3　习题选解 …………………………………………………………………… (9)
1.4　自测题 ……………………………………………………………………… (31)
1.5　自测题答案 ………………………………………………………………… (36)

第 2 章　随机变量及其分布 ……………………………………………………… (37)
2.1　知识点总结 ………………………………………………………………… (37)
2.2　难点解析 …………………………………………………………………… (40)
2.3　习题选解 …………………………………………………………………… (41)
2.4　自测题 ……………………………………………………………………… (60)
2.5　自测题答案 ………………………………………………………………… (64)

第 3 章　多维随机变量及其分布 ………………………………………………… (67)
3.1　知识点总结 ………………………………………………………………… (67)
3.2　难点解析 …………………………………………………………………… (71)
3.3　习题选解 …………………………………………………………………… (75)
3.4　自测题 ……………………………………………………………………… (97)
3.5　自测题答案 ………………………………………………………………… (100)

第 4 章　随机变量的数字特征 …………………………………………………… (104)
4.1　知识点总结 ………………………………………………………………… (104)
4.2　难点解析 …………………………………………………………………… (107)
4.3　习题选解 …………………………………………………………………… (108)
4.4　自测题 ……………………………………………………………………… (127)
4.5　自测题答案 ………………………………………………………………… (130)

第5章　大数定律和中心极限定理 …………………………………… (134)
5.1　知识点总结 ……………………………………………………… (134)
5.2　难点解析 ………………………………………………………… (135)
5.3　习题选解 ………………………………………………………… (138)
5.4　自测题 …………………………………………………………… (145)
5.5　自测题答案 ……………………………………………………… (147)
第6章　抽样分布 …………………………………………………………… (148)
6.1　知识点总结 ……………………………………………………… (148)
6.2　难点解析 ………………………………………………………… (152)
6.3　习题选解 ………………………………………………………… (155)
6.4　自测题 …………………………………………………………… (169)
6.5　自测题答案 ……………………………………………………… (172)
第7章　参数估计 …………………………………………………………… (173)
7.1　知识点总结 ……………………………………………………… (173)
7.2　难点解析 ………………………………………………………… (175)
7.3　习题选解 ………………………………………………………… (177)
7.4　自测题 …………………………………………………………… (189)
7.5　自测题答案 ……………………………………………………… (194)
第8章　统计假设检验 ……………………………………………………… (198)
8.1　知识点总结 ……………………………………………………… (198)
8.2　难点解析 ………………………………………………………… (201)
8.3　习题选解 ………………………………………………………… (203)
8.4　自测题 …………………………………………………………… (215)
8.5　自测题答案 ……………………………………………………… (217)
第9章　方差分析与回归分析 ……………………………………………… (219)
9.1　知识点总结 ……………………………………………………… (219)
9.2　难点解析 ………………………………………………………… (225)
9.3　习题选解 ………………………………………………………… (229)
9.4　自测题 …………………………………………………………… (246)
9.5　自测题答案 ……………………………………………………… (252)

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　知识点总结

一、随机事件和样本空间

1. 随机事件

对随机现象的观察或实验统称为随机试验，简称试验. 随机试验的结果称为随机事件，简称事件，通常用大写字母 A，B，…表示. 不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件称为基本事件. 能够分解为两个或多个基本事件的随机事件称为复合事件.

2. 样本空间

对于随机试验的每一个基本结果(基本事件)称为一个样本点，用字母 ω 表示. 全体样本点的集合，称为该试验的样本空间，通常用 Ω 表示.

3. 必然事件、不可能事件

每次试验中一定发生的事件称为必然事件，即样本空间 Ω. 每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，即空集 Φ.

二、事件间的关系与运算

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

2. 相等关系

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

3. 事件的和（并）

“事件 A 与 B 中至少有一件发生”这一事件，称为事件 A 与 B 的和(并)，记为

$A+B$ 或 $A \cup B$.

4. 事件的积（交）

“事件 A 与 B 同时发生”这一事件，称为事件 A 与 B 的积(交)，记为 AB 或 $A \cap B$.

5. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件，称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$ 或 $A\overline{B}$.

6. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与 B 互不相容(或称互斥).

7. 对立事件

“事件 A 不发生”这一事件称为事件 A 的对立事件(或逆事件)，记为 $\overline{A}$.

8. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组.

随机事件满足下面的运算律：

(1) 交换律：$A+B=B+A, AB=BA$.

(2) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C), (AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A+B)C=AC+BC$(第一分配律)；

$A+BC=(A+B)(A+C)$(第二分配律).

(4) 对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

三、随机事件的概率

1. 概率的统计定义

在相同条件下，重复进行 n 次试验，当试验次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动. 将这个频率的稳定值 p 称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

2. 概率的公理化定义

对于试验的每一个随机事件 A，都赋予一个实数 $P(A)$，满足

非负性：对于任何事件 A, $P(A) \geqslant 0$；

规范性：对于必然事件 Ω, $P(\Omega)=1$；

可列可加性：对于任意可列个两两互不相容的事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

3. 概率的性质

(1) 不可能事件 Φ 的概率等于 0,即 $P(\Phi)=0$.

(2) 设事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则有 $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(3) 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,则有 $\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$.

特别地,$P(A)+P(\overline{A})=1$.

(4) 对于任意两个事件 A,B,有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地,如果 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(5) 对于任意两个事件 A,B,有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广　对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

四、三个重要概型

1. 古典概型

如果试验的基本事件总数为有限个,且在每次试验中,各个基本事件出现的可能性相同,则称此试验为古典概型. 在古典概型中,事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\# A}{\# \Omega},$$

其中,$\# A$ 与 $\# \Omega$ 分别表示 A 所包含的基本事件数和试验的基本事件总数.

2. 几何概型

如果样本空间 Ω 为 m 维空间中的有界区域,且随机点落入 Ω 中任何区域的可能性与该区域的体积成正比,而与该区域的形状及其在 Ω 中的位置无关,则称此试验为几何概型. 在几何概型中,随机点落入 Ω 内任一区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{\# A}{\# \Omega},$$

其中,$\# A$ 与 $\# \Omega$ 分别表示区域 A 和 Ω 的 m 维体积.

3. 贝努利 (Bernoulli) 概型

只有两个基本事件 $A,\overline{A}$ 的试验,称为贝努利试验. n 次独立重复的贝努利试验称为 n 重贝努利概型. 在 n 重贝努利概型中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,

则事件 A 在 n 次试验中恰好发生 k 次 $(0\leqslant k\leqslant n)$ 的概率 $P(B_k)$ 为

$$P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

五、条件概率

设 $P(B)>0$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

而 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$P(A)>0$，称为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

六、三个重要公式

1. 乘法公式

设 A,B 是两个事件，若 $P(B)>0$，则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

若 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

推广　对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

2. 全概率公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i).$$

3. 贝叶斯(Bayes)公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，则对任意事件 B，$P(B)>0$，有

$$P(A_m|B)=\frac{P(A_m)\cdot P(B|A_m)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad(m=1,2,\cdots,n).$$

七、独立性

1. 两个事件的独立性

若随机事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

2. 多个事件的独立性

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，如果对于任何正整数 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 以及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

3. 性质

性质1　设 A,B 为两个事件，$P(A)P(B)>0$，则 A 与 B 独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$ 或 $P(B|A)=P(B)$.

性质2　如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则将其中任意 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个事件相应地换成它们的对立事件，所得的 n 个事件也相互独立.

性质3　如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i).$$

1.2　难点解析

本章内容有四个难点：古典概型与几何概型中概率的计算；条件概率的理解和计算；事件的独立性的理解和判断；全概率公式和贝叶斯公式.

一、古典概型与几何概型

古典概型满足两个假设条件：试验的基本事件总数为有限个；每次试验中，各个基本事件出现的可能性相同. 其计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

在计算古典概率时，首先要判别试验是否属于古典概型，其次再计算基本事件总数和事件 A 所包含的基本事件数，然后利用相应的公式进行计算.

例 1.1　袋中有 a 个白球，b 个黑球，现在把球随机地一个个取出来，取出的球不放回，求第 m 次取出的球是白球的概率$(1\leqslant m\leqslant a+b)$.

解：记 $A=$“第 m 次取到白球”，给出两种解法：

解法 1　把 a 个白球，b 个黑球都看作是不同的（例如把$a+b$个球分别编上 1 至$a+b$号），将球一个一个地取出后摆放成一排，考虑到取球顺序，则可能的排列法相当于把 $a+b$ 个元素进行全排列，共有$(a+b)!$ 种排法.

考虑到对称性，每种排法机会相同，故试验是古典概型.

A 发生可以看作先从 a 个白球中任取一个放在第 m 个位置上，然后将剩下的 $a+b-1$个球任意排在另外 $a+b-1$ 个位置上，共有 $a(a+b-1)!$ 种排法，故

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法 2 认为 $a+b$ 个球只有颜色区别而无其他区别,不考虑取球的先后顺序,将 $a+b$ 个球摆放成一排,其中 a 个位置放白球,b 个位置放黑球,共有 C_{a+b}^{a} 种放法.

由对称性,每种放法机会相等,故试验是古典概型.

A 发生可以看作先从 a 个白球中任取一个放在第 m 个位置上,然后在剩下的 $a+b-1$ 个位置上用 $a-1$ 个放白球,b 个放黑球,共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法,故

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

本例说明,对同一个随机现象,可以用不同的样本空间来描述. 在计算基本事件总数和事件 A 包含的基本事件数时,必须在同一个确定的样本空间中考虑.

注: 注意到结果与 m 无关,这从理论上说明了日常生活中"抓阄儿"的办法是公平合理的. 有不少实际问题可以归结为本例,如抽奖问题:n 张奖券中有 k 张有奖,现有 n 个人依次各取一张,则每个人抽到有奖奖券的概率都为 $\frac{k}{n}$.

例 1.2 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中,问杯子中球的个数最多为 1,2,3 的概率各是多少?

解: 我们认为球是可区分的,将 3 个球随机地放入 4 个杯子中,共有 $n=4^3$ 种放置法. 设 A_i="杯子中球的个数最多为 i",$i=1,2,3$.

(1) A_1 只有当每个杯子最多放入一个球时才能发生,因此 A_1 包含的基本事件数为 P_4^3,故

$$P(A_1)=\frac{P_4^3}{4^3}=\frac{3}{8};$$

(2) A_3 只有当 3 个球放入同一个杯子时才能发生,因此 A_3 包含的基本事件数为 C_4^1,故

$$P(A_3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16};$$

(3) 因为 A_1,A_2,A_3 两两互不相容,且 $A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$,故

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1,$$

因此

$$P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=\frac{9}{16}.$$

注: 本例实际上是"分房问题",也称为"质点入盒问题"或"生日问题",其典型例子见课本中的例 1.3.7 和例 1.3.8.

几何概型是对古典概型的推广,它将基本事件推广到无限多个. 这时试验的样本空间 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域,每一个样本点出现的可能性相同,则这时点落入区域 A 内的概率为

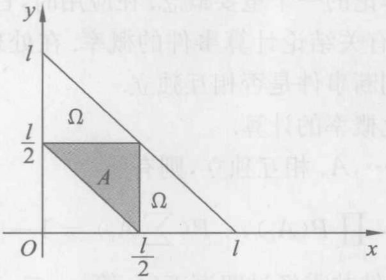
$$P(A)=\frac{\sharp A}{\sharp \Omega},$$

其中$\sharp A$与$\sharp \Omega$分别表示区域A和Ω的一个度量，当$n=1,2,3$时，分别表示长度、面积和体积.

例 1.3　将一根长为l的绳子在任意两点剪断，求得到的三段能围成三角形的概率.

解：设其中两段长度分别为x,y，则第三段长度为$l-x-y$，于是样本空间Ω可以表示为$\Omega=\{(x,y)\mid x>0,y>0,x+y<l\}$.

令A="三段能围成三角形"，则三段构成三角形的条件为任意两边之和大于第三边，即$A=\left\{(x,y)\left|\frac{l}{2}>x>0,\frac{l}{2}>y>0,x+y>\frac{l}{2}\right.\right\}$.



根据几何概型，有$P(A)=\frac{\sharp A}{\sharp \Omega}=\frac{1}{4}$.

二、条件概率的理解和计算

使用条件概率的关键是能正确地运用条件，分析条件的发生对于样本空间的影响.

计算条件概率$P(A|B)$一般可根据具体情况选用以下两种方法之一：

(1) 在样本空间Ω中，由定义$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$计算，其中$P(B)>0$；

(2) 在缩减后的样本空间中直接计算概率$P(A|B)$.

例 1.4　在 10 个塑料球中有 3 个黑色球，7 个白色球，今从中任取 2 个，在已知其中一个是黑色球的条件下，求另一个也是黑色球的概率.

解：令A_i="两个球中有i个黑色球"$(i=0,1,2)$，令B="其中一个是黑色球"，则所求概率为$P(A_2|B)$. 给出两种解法：

解法 1　用定义计算：

显然$B=A_1+A_2$，且A_1,A_2互不相容，所以

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15},$$

又 $A_2B=A_2$，所以 $P(A_2B)=P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$，因此

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{1}{8}.$$

解法 2 在缩减的样本空间 B 中直接计算：

$$P(A_2|B)=\frac{C_3^2}{C_3^1C_7^1+C_3^2}=\frac{1}{8}.$$

三、事件的独立性的理解和判断

事件的独立性是概率论的一个重要概念. 在应用时，首先要正确判断事件的独立性，然后利用独立性的有关结论计算事件的概率. 在处理实际问题时，往往根据问题的实际意义去分析判断事件是否相互独立.

利用独立性可以简化概率的计算.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),\quad P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i).$$

例 1.5 加工某一零件共需经过四道工序，第一、二、三、四道工序出次品的概率分别为 0.02，0.03，0.05，0.04，各道工序互不影响，求加工出的零件是次品的概率.

解：设 A_i＝“第 i 道工序出次品”($i=1,2,3,4$)，B＝“加工出的零件是次品”，则 $B=A_1+A_2+A_3+A_4$，又 $A_i(i=1,2,3,4)$ 相互独立，所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)\\&=1-(1-0.02)(1-0.03)(1-0.05)(1-0.04)\approx 0.133.\end{aligned}$$

四、全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式应用于求某一较复杂事件的概率时，往往将这一复杂事件分解成若干个互不相容的简单事件的和，而这些简单事件的概率是容易求出的. 做这种题目时，可以将一个复杂事件进行分解，画成概率树的形式，直观易懂.

例 1.6 某仪器有三个独立工作的元件，它们损坏的概率都是 0.1，当一个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.25；当两个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.6；当三个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.95. 求仪器发生故障的概率.

解：令 A_i＝“三个元件中有 i 个损坏”($i=0,1,2,3$)，B＝“仪器发生故障”，则 A_0,A_1,A_2,A_3 构成一个完备事件组，且

$P(A_0)=0.9^3=0.729$，$P(A_1)=C_3^1\times0.1\times0.9^2=0.243$，

$P(A_2)=C_3^2\times0.1^2\times0.9=0.027$，　$P(A_3)=0.1^3=0.001$.

又 $P(B|A_0)=0$，　$P(B|A_1)=0.25$，　$P(B|A_2)=0.6$，　$P(B|A_3)=0.95$，

由全概率公式，可得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.078.$$

贝叶斯公式是全概率公式的推广. 它的思路和全概率公式正好相反，全概率公式是由因求果，而贝叶斯公式是由果求因，所以它又称贝叶斯决策. 它在经营管理、投资决策、医学卫生统计、人工智能等方面有重要的应用.

例 1.7　由医学统计数据分析知，人群中患有某种疾病的人数占总人数的 0.5%. 一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的病人检查出呈阳性，但也以 1% 的概率误将不患有此疾病的检验出呈阳性. 现设某人检查呈阳性反应，问他确患有此疾病的概率是多少？

解：记 A＝"检验呈阳性"，B_1＝{被检验者患此疾病}，B_2＝{被检验者不患此疾病}，显然 $B_1\cup B_2=\Omega$，$B_1B_2=\Phi$，且

$P(B_1)=0.005$，　$P(B_2)=0.995$，　$P(A|B_1)=0.95$，　$P(A|B_2)=0.01$.

由贝叶斯公式可得

$$P(B_1|A)=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.01}\approx0.323.$$

这个结果表明，虽然 $P(A|B_1)=0.95$，$P(\overline{A}|B_2)=0.99$，这两个概率都比较高，但若将此试验用于普查，当某人检查出呈阳性时，也不必过于恐慌，因为实际上患有此病的概率为 32.3%.

应用全概率公式和贝叶斯公式时，关键是找到对事件 B 有直接影响的完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，并正确计算出概率 $P(A_i)$ 与 $P(B|A_i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 特别注意的是：不要混淆 $P(B|A_i)$ 和 $P(A_i|B)$，二者意义完全不同.

1.3　习题选解

习题 1-1

1. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四种不同的工作，若其中甲、乙两名志愿者不能从事翻译工作，共有多少种不同的选派方案？

解：根据题意，由排列可得，从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事四项不同工作，有 $P_6^4=360$ 种不同的情况；其中甲从事翻译工作有 $P_5^3=60$ 种情况，乙从事翻译工

作有 $P_5^3=60$ 种情况. 若其中甲、乙两名志愿者都不能从事翻译工作，则选派方案共有 $360-60-60=240$ 种.

2. 从编号为 $1,2,3,\cdots,10,11$ 的 11 个球中任取 5 个球，使这 5 个球的编号之和为奇数，共有多少种不同的取法?

解:本题与顺序无关，属于组合问题. 在 11 个球中任取 5 个球，有 $C_{11}^5=462$ 种选法；若要使这 5 个球的编号之和为奇数，包括下列三种情况：

(1) 5 个球的编号全为奇数，有 $C_6^5=6$ 种选法；

(2) 有 3 个球编号为奇数，2 个球编号为偶数，有 $C_6^3\cdot C_5^2=200$ 种选法；

(3) 有 1 个球编号为奇数，4 个球编号为偶数，有 $C_6^1\cdot C_5^4=30$ 种选法.

由加法原理，共有 $C_6^5+C_6^3\cdot C_5^2+C_6^1\cdot C_5^4=236$ 种选法.

3. 将标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个球放入标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个盒子内，每个盒内放一个球，则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放法有多少种?

解:由题设知，有 7 个球的标号与其所在盒子的标号正好一致. 我们可以分两步进行：首先选取 3 个球，使剩下的球放在与其标号一致的盒子里，有 $C_{10}^3=120$ 种放法；然后将选出的三个球放在与其标号不一致的盒子里，有 2 种放法，由乘法原理，共有 $2C_{10}^3=240$ 种放法.

习题 1-2

1. 写出以下试验的样本空间：

(1) 袋中装有白、黑两球，从中任取一球，观察其颜色；

(2) 袋中装有白、黑两球，从中任取一球，记下其颜色后放回，再任取一球，又记下其颜色.

解:(1) $\Omega=\{$白，黑$\}$.

(2) $\Omega=\{($白、白$),($白、黑$),($黑、白$),($黑、黑$)\}$.

4. 设某人向目标射击三次，用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次击中目标，试将下列事件用 A_1,A_2,A_3 的运算表示出来：

(1) 只有第 1 枪命中； (2) 至少有 1 枪命中； (3) 至少有两枪命中；

(4) 3 枪都没有命中.

解:(1) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(2) $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$ 或 $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$；

(4) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

5. $A_i(i=1,2,3)$的含义如上题所述，试用语言描述下列事件：

(1) $\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$； (2) $\overline{A_1+A_2}$； (3) $(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$.

解:(1) 至少有一枪没有命中；

(2) 第一枪和第二枪均未命中；

(3) 第二枪命中，而第一枪和第三枪恰好有一次命中.

7. 设A,B为两个随机事件，试利用事件之间的关系与运算证明：

(1) $B=AB\cup\overline{A}B$ 且AB与$\overline{A}B$互不相容；

(2) $A\cup B=A\cup\overline{A}B$ 且A与$\overline{A}B$互不相容.

提示:(1) 要证$B=AB\cup\overline{A}B$，只需证明

$$AB\cup\overline{A}B\subset B,\text{且 } B\subset AB\cup\overline{A}B;$$

要证AB与$\overline{A}B$互不相容，只需证明$AB\cap\overline{A}B=\Phi$.

证明过程略.

(2) 略.

习题1-3

1. 若事件A与B互斥，且$P(A)=0.3,P(B)=0.5$，计算$P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})$.

解:因为事件A与B互斥，$AB=\Phi$，所以$P(AB)=0$，又$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A\cup B$，由加法公式，可得

$P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5=0.8.$

2. 已知$P(\overline{A})=0.5,P(\overline{A}B)=0.2,P(B)=0.4$，计算：

(1) $P(AB)$； (2) $P(A-B)$； (3) $P(A+B)$； (4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解:(1) $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.2=0.2$；

(2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=1-P(\overline{A})-P(AB)=1-0.5-0.2=0.3$；

(3) $P(A+B)=P(A-B)+P(B)=0.3+0.4=0.7$；

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)=1-0.7=0.3.$

3. 已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16},P(AB)=0$，求事件$A,B,C$全不发生的概率.

解:因为$ABC\subseteq AB$，所以$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，故$P(ABC)=0$. 由加法公式可得

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0=\frac{5}{8},\end{aligned}$$

于是A,B,C全不发生的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A+B+C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$$

4. 已知 $P(A)=0.6, P(AB)=0.1, P(\overline{A}\,\overline{B})=0.15$，计算：

(1) $P(A\overline{B})$； (2) $P(\overline{A}B)$； (3) $P(A+B)$.

解：(1) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.6-0.1=0.5$；

(2) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-0.6-0.15=0.25$；

(3) $P(A+B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-0.15=0.85$.

5. 设 $P(A)=\ln a, P(B)=0.2, A\supset B$，求 a 的取值范围.

解：由 $A\supset B$ 知，$P(B)\leqslant P(A)\leqslant 1$，即 $0.2\leqslant \ln a\leqslant 1$，

所以 a 的取值范围是 $e^{0.2}\leqslant a\leqslant e$.

6. 某班有 10 名同学是同一年出生(一年按 365 天计算)，试求下列事件的概率：

(1) 至少有两人是同一天出生；

(2) 至少有一人是 10 月 1 日出生.

解：(1) 设 A＝“至少有两人是同一天出生”，则 $\overline{A}$＝“10 名同学中任何两人都不在同一天出生”，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^{10}}{365^{10}}\approx 0.117.$$

(2) 设 B＝“至少有一人是 10 月 1 日出生”，则 $\overline{B}$＝“10 名同学中没有人在 10 月 1 日出生”，于是

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{364^{10}}{365^{10}}\approx 0.027.$$

8. 从 1～100 共 100 个整数中任取 1 个，试求取到的整数能被 6 或 8 整除的概率.

解：设 A＝“取到的整数能被 6 整除”，B＝“取到的整数能被 8 整除”，则所求概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{16}{100}+\frac{12}{100}-\frac{4}{100}=0.24.$$

9. 从 0～9 共 10 个整数中不重复地任取 4 个数字，试求取到的 4 个数字能够组成一个四位偶数的概率.

解：设 A＝“取到的 4 个数字能够组成一个四位偶数”，则 $\overline{A}$＝“取到的 4 个数字不能组成一个四位偶数”，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{41}{42}.$$

10. 设有 100 件产品，其中一、二、三等品数量分别为 60 件、30 件和 10 件，