

文達附加數學

蘇一方
黃鳴嬋

習題庫
(1.0 版)

— 使用手冊



文達附加數學

蘇一方
黃鳴嬋

習題庫
(1.0 版)

— 使用手冊



文達出版(香港)有限公司

MANHATTAN PRESS (H.K.) LTD.



鳴謝

課本內所有香港中學會考及香港高等程度會考試題均獲香港考試局批准轉載。

課本內所有倫大入學試試題均獲英國倫敦大學普通教育文憑考試局批准轉載。

MANHATTAN PRESS (H.K.) LTD

文達出版(香港)有限公司

香港新界葵涌華星街8-10號

華達工業中心B座六樓一至六室

© 文達出版(香港)有限公司，1998

本書版權由文達出版(香港)有限公司。

第一版 一九九八年

ISBN 962-342-715-8

編輯 趙崇富 王佩儀 助理編輯 張敏儀

製作 鄭海勳 楊頌珊 韋兆強

目 錄

第一部分	代數	2
第一章	二次方程與二次函數	2
	甲部	2
	乙部	6
第二章	單變元不等式	10
	甲部	10
	乙部	16
第三章	數學歸納法	20
	甲部	20
	乙部	26
第四章	正整指數的二項式定理	30
	甲部	30
	乙部	34
第一部分	複習題	37
第一部分	公開考試題目	40
第二部分	三角學	45
第五章	任意角之三角函數	45
	甲部	45
	乙部	48
第六章	三角學之應用	51
	甲部	51
	乙部	54
第七章	複角	59
	甲部	59
	乙部	65
第二部分	複習題	70
第二部分	公開考試題目	82

第三部分 解析幾何 92

第八章 平面直角坐標系 92

甲部 92

乙部 97

第九章 直線 100

甲部 100

乙部 106

第十章 圓 108

甲部 108

乙部 113

第十一章 圓錐曲線 117

甲部 117

乙部 122

第三部分 複習題 127

第三部分 公開考試題目 134

第四部分 向量 141

第十二章 二維空間的向量 141

甲部 141

乙部 152

第四部分 複習題 164

第四部分 公開考試題目 176

第五部分 複數 179

第十三章 複數 179

甲部 179

乙部 188

第五部分 複習題 196

第五部分 公開考試題目 207

第六部分 微分法 211

第十四章 函數的極限與導數 211

甲部 211

乙部 217

第十五章 微分法的法則 219

甲部 219

乙部 227

第十六章 微分法的應用 231

甲部 231

乙部 238

第六部分 複習題 252

第六部分 公開考試題目 257

第七部分 積分法 266

第十七章 不定積分 266

甲部 266

乙部 270

第十八章 積分法的技巧 273

甲部 273

乙部 279

第十九章 定積分 284

甲部 284

乙部 293

第七部分 複習題 298

第七部分 公開考試題目 313

文達附加數學

習題庫

檔案目錄

A-Math-C						
1-Alg	2-Trigo	3-Cgeom	4-Vector	5-Comp	6-Diff	7-Integ
am1-01-a	am1-05-a	am1-08-a	am2-12-a	am2-13-a	am2-14-a	am2-17-a
am1-01-b	am1-05-b	am1-08-b	am2-12-b	am2-13-b	am2-14-b	am2-17-b
am1-02-a	am1-06-a	am1-09-a	am2-p4-r	am2-p5-r	am2-15-a	am2-18-a
am1-02-b	am1-06-b	am1-09-b	am2-p4-x	am2-p5-x	am2-15-b	am2-18-b
am1-03-a	am1-07-a	am1-10-a			am2-16-a	am2-19-a
am1-03-b	am1-07-b	am1-10-b			am2-16-b	am2-19-b
am1-04-a	am1-p2-r	am1-11-a			am2-p6-r	am2-p7-r
am1-04-b	am1-p2-x	am1-11-b			am2-p6-x	am2-p7-x
am1-p1-r		am1-p3-r				
am1-p1-x		am1-p3-x				

1 二次方程與二次函數 (A)

1. 已知方程 $x^2 - 5x + k = 0$ 的根為 α 和 β ，求一以 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 為根的二次方程。

(4 分)

Q1 解

所求方程為

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right) + k = 0$$

即 $kx^2 - 5x + 1 = 0$ 。

2. 當 p 為何值時，方程 $x^2 - 2px + (p + 6) = 0$ 有正重根？由此，求這方程的根。

(6 分)

Q2 解

$$x^2 - 2px + (p + 6) = 0$$

這方程有重根，若

$$\Delta = (-2p)^2 - 4(1)(p + 6) = 0$$

$$\therefore p^2 - p - 6 = 0$$

$$(p - 3)(p + 2) = 0$$

$$p = 3 \text{ 或 } -2$$

當 $p = 3$ ，方程為

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

當 $p = -2$ ，方程為

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2 \text{ (捨去)}$$

$\therefore$ 所求答案為 $p = 3$ 及 根 $= 3$ 。

3. 方程 $x^2 + kx + 10 = 0$ 的根為 α 和 $\alpha + 3$ 。求常數 k 的兩個可能值。

(5 分)

Q3 解

$$\alpha(\alpha + 3) = 10$$

$$\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0$$

$$(\alpha + 5)(\alpha - 2) = 0$$

$$\alpha = -5 \text{ 或 } 2$$

兩根之和為

$$-k = \alpha + (\alpha + 3)$$

$$\therefore k = -2\alpha - 3$$

$$k = -2(-5) - 3 \text{ 或 } -2(2) - 3$$

$$\therefore k = 7 \text{ 或 } -7$$

4. 已知 $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$, 證明 $f(x)$ 恆為正, 並求它的最小值。

(5 分)

Q4 解

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5}{2} - \frac{6}{x^2 - 2x + 4} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{6}{(x-1)^2 + 3} \end{aligned}$$

$\therefore$ 當 $x = 1$, $(x-1)^2 + 3$ 的最小值為 3,

$\therefore \frac{6}{(x-1)^2 + 3}$ 的最大值 $= \frac{6}{3} = 2$ 。

由此, $f(x)$ 的最小值為 $\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ 恆為正。

5. 方程 $x^2 + 10x + m = 0$ 有不等實根 α 和 β , 其中 m 為實常數。

(a) 求 m 值的範圍。

(b) 若 $\alpha^3 + \beta^3 = -370$, 求 m 的值。

(6 分)

Q5 解

(a) $x^2 + 10x + m = 0$

$\therefore$ 方程有不等實根,

$\therefore \Delta = 10^2 - 4(1)(m) > 0$

$$m < 25$$

(b) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$
 $= (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta]$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = 370, \alpha + \beta = -10, \alpha\beta = m$

$\therefore -10[(-10)^2 - 3m] = -370$

$\therefore m = 21$

6. 若對所有實數 x , $x^2 + 5x + \lambda > 10$, 試求 λ 的值。

(4 分)

Q6 解

$$x^2 + 5x + \lambda > 10$$

$\therefore x^2 + 5x + (\lambda - 10) > 0$

若此對所有實數 x 皆成立, 則

$$\Delta = 5^2 - 4(\lambda - 10) < 0$$

$\therefore \lambda > \frac{65}{4}$

7. 解方程 $6(x+4)^2 - 7(x+4) - 20 = 0$ 。

(4 分)

Q7 解

$$6(x+4)^2 - 7(x+4) - 20 = 0$$

$$[2(x+4) - 5][3(x+4) + 4] = 0$$

$$(2x+3)(3x+16) = 0$$

$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{16}{3}$

8. 利用配方法解方程 $3x^2 + 8x + 2 = 0$ 。

(4 分)

Q8 解

$$\begin{aligned}3x^2 + 8x + 2 &= 0 \\x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} &= 0 \\x^2 + \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \\ \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 &= \frac{10}{9} \\x + \frac{4}{3} &= \pm \frac{\sqrt{10}}{3} \\x &= -\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}\end{aligned}$$

9. 解方程 $3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ 。

(4 分)

Q9 解

$$\begin{aligned}3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} &= 0 \\ \text{兩邊乘以 } x^2, \\ 3x^2 - 5x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}\end{aligned}$$

10. 若方程 $2x^2 + (k-3)x + 18 = 0$ 有重根，求

- (a) k 的可能值，
(b) 該重根。

(5 分)

Q10 解

$$\begin{aligned}\text{(a) 判別式} &= (k-3)^2 - 4(2)(18) = 0 \\ &(k-3)^2 = 144 \\ &k-3 = \pm 12 \\ &k = -9 \text{ 或 } 15\end{aligned}$$

- (b) 當 $k = -9$ ，該方程為

$$\begin{aligned}2x^2 - 12x + 18 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = 3$$

- 當 $k = 15$ ，該方程為

$$\begin{aligned}2x^2 + 12x + 18 &= 0 \\ (x+3)^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = -3$$

11. 若聯立方程

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + k \end{cases}$$

沒有實解，其中 k 為常數，求 k 值的範圍。

(5 分)

Q11 解

$$y = x^2 - 2x \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y = x + k \quad \dots\dots\dots (2)$$

把 (2) 代入 (1)，

$$\begin{aligned} x + k &= x^2 - 2x \\ x^2 - 3x - k &= 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

若聯立方程沒有實解，則方程 (3) 沒有實根。

由此，其判別式 < 0 ，

$$\text{即 } (-3)^2 - 4(1)(-k) < 0$$

$$9 + 4k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{9}{4}$$

12. 當 k 為何值時，數式 $4x^2 + 5x + k$ 恆為正？

(4 分)

Q12 解

$$\because x^2 \text{ 的係數} = 4 > 0$$

$$\therefore \text{對所有實數 } x, \text{ 數式 } 4x^2 + 5x + k > 0 \text{ 若}$$

$$5^2 - 4(4)k < 0$$

$$25 - 16k < 0$$

$$k > \frac{25}{16}$$

13. 若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一個根是另一個根的三倍，證明 $3b^2 = 16ac$ 。

(4 分)

Q13 解

設 α 和 3α 為該方程的根。

$$\text{兩根之和} = \alpha + 3\alpha = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha = -\frac{b}{4a} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{兩根之積} = \alpha(3\alpha) = \frac{c}{a}$$

$$3\alpha^2 = \frac{c}{a} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{把 (1) 代入 (2), } 3\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 = \frac{c}{a}$$

$$\frac{3b^2}{16a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore 3b^2 = 16ac$$

1 二次方程與二次函數 (B)

1. α 和 β 為方程 $2x^2 + 5x - 6 = 0$ 的根。

(a) 求 $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ 的值。

(4 分)

(b) 求一二次方程，其根為 $\frac{4\alpha}{\beta}$ 和 $\frac{4\beta}{\alpha}$ 。

(5 分)

Q1 解

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-6}{2}\right)}{\frac{-6}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{49}{12} \\ \text{(b)} \quad \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{4\beta}{\alpha} &= 4\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= 4\left(-\frac{49}{12}\right) \\ &= -\frac{49}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{4\alpha}{\beta} \cdot \frac{4\beta}{\alpha} = 16$$

∴ 所求方程為

$$x^2 - \left(-\frac{49}{3}\right)x + 16 = 0$$

$$\text{即} \quad 3x^2 + 49x + 48 = 0。$$

2. 設 $f(x) = 3 + 2x - x^2$ 。

(a) 解方程 $f(x) = 0$ 。

(3 分)

(b) 求 $f(x)$ 的極大值。

(3 分)

(c) 由此，描繪 $y = f(x)$ 的圖像。

(3 分)

Q2 解

(a) $f(x) = 3 + 2x - x^2 = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$\therefore x = -1$ 或 3

(b) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

$$= 3 - (x^2 - 2x)$$

$$= 3 - (x^2 - 2x + 1) + 1$$

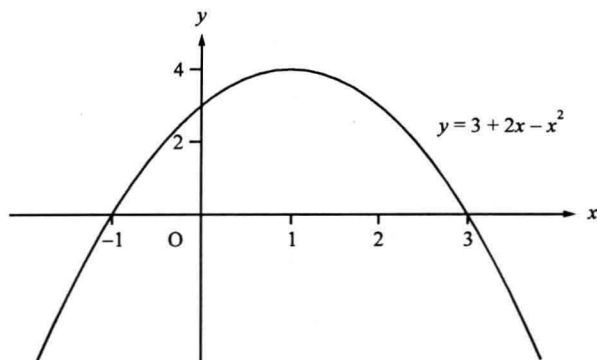
$$= 4 - (x-1)^2$$

$\therefore f(x)$ 的極大值 $= f(1)$

$$= 4$$

(c) $y = f(x)$ 的圖像與 x 軸相交於 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ 。它有極大點 $(1, 4)$ 。

因此，可得 $y = f(x)$ 的圖像如下。



3. (a) 函數 $y = ax^2 - 12x + c$ 在 $x = -\frac{3}{2}$ 時有最大值 10。求 a 與 c 的值。

(6 分)

(b) 若方程 $ax^2 - 12x + c = 0$ 的根為 α 和 β ，求根為 α^2 、 β^2 的二次方程。

(6 分)

Q3 解

(a) $y = ax^2 - 12x + c$ 有最大值當

$$x = \frac{6}{a} = -\frac{3}{2}$$

$\therefore a = -4$

由此，

$$10 = -4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(-\frac{3}{2}\right) + c$$

$$10 = -9 + 18 + c$$

$\therefore c = 1$

(b) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(\frac{12}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{12}{-4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{-4}\right)$$

$$= \frac{19}{2}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 \beta^2 &= (\alpha\beta)^2 \\ &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

∴ 所求方程為

$$x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{1}{16} = 0$$

$$\text{即 } 16x^2 - 152x + 1 = 0。$$

4. (a) 已知 α 和 β 為方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根，求根為 $\alpha + \frac{m}{\alpha}$ 、 $\beta + \frac{m}{\beta}$ 的二次方程 (其中 m 為常數)。

(7 分)

- (b) 試求 m 的值，使 (a) 部所求得的方程有重根。

(5 分)

Q4 解

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad \left(\alpha + \frac{m}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{m}{\beta}\right) &= (\alpha + \beta) + \frac{m(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= 3 + \frac{3m}{1} \\ &= 3 + 3m \\ \left(\alpha + \frac{m}{\alpha}\right) \left(\beta + \frac{m}{\beta}\right) &= \alpha\beta + m\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{m^2}{\alpha\beta} \\ &= \alpha\beta + m \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{m^2}{\alpha\beta} \\ &= \alpha\beta + m \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + \frac{m^2}{\alpha\beta} \\ &= 1 + m \cdot \frac{(3)^2 - 2(1)}{1} + \frac{m^2}{1} \\ &= 1 + 7m + m^2\end{aligned}$$

∴ 以 $\alpha + \frac{m}{\alpha}$ 及 $\beta + \frac{m}{\beta}$ 為根的方程為

$$x^2 - (3 + 3m)x + (1 + 7m + m^2) = 0。$$

- (b) 以上方程有重根，若

$$(3 + 3m)^2 - 4(1 + 7m + m^2) = 0$$

$$5m^2 - 10m + 5 = 0$$

$$5(m - 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = 1$$

5. 已知 $f(x) = -x^2 + 2kx + 6 - 5k$ ，其中 k 為常數。

- (a) 以 k 表方程 $f(x) = 0$ 的判別式。

(4 分)

- (b) 由此，或用其他方法，求 k 值的範圍使得 $f(x) \leq 0$ 對所有 x 成立。

(5 分)

Q5 解

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \Delta &= (2k)^2 - 4(-1)(6-5k) \\ &= 4(k^2 - 5k + 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad &\because f(x) \leq 0, \text{ 對所有實數 } x, \\ &\therefore \Delta \leq 0 \\ \text{即} \quad &4(k^2 - 5k + 6) \leq 0 \\ &(k-2)(k-3) \leq 0 \\ &\therefore 2 \leq k \leq 3 \end{aligned}$$

6. 設 α 、 β 為方程 $2x^2 + (k+5)x - 3k = 0$ 的根。試以 k 表 $\alpha^2 + \beta^2$ 和 $\alpha^3 + \beta^3$ 。

(9 分)

Q6 解

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{k+5}{2} \\ \alpha\beta &= -\frac{3k}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{k+5}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{3k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(k^2 + 22k + 25) \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \\ &= \left(-\frac{k+5}{2}\right) \left[\frac{1}{4}(k^2 + 22k + 25) - \left(-\frac{3k}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{8}(k+5)(k^2 + 28k + 25) \end{aligned}$$

2 單變元不等式 (A)

1. 解聯立不等式：

$$\begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{9}{2} \\ |x-1| \geq 2 \end{cases}$$

(5 分)

Q1 解

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{9}{2} \\ |x-1| \geq 2 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} -\frac{9}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{9}{2} \\ x-1 \leq -2 \text{ 或 } x-1 \geq 2 \end{cases} \\ & \begin{cases} -4 < x < 5 \\ x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3 \end{cases} \\ \therefore & -4 < x \leq -1 \text{ 或 } 3 \leq x < 5 \end{aligned}$$

2. 解不等式 $|2x-5| \geq 4x-1$ 。

(5 分)

Q2 解

$$\begin{aligned} & |2x-5| \geq 4x-1 \\ & \begin{array}{lll} 2x-5 \geq 4x-1 & \text{或} & 2x-5 \leq -(4x-1) \\ 2x \leq -4 & \text{或} & 6x \leq 6 \\ x \leq -2 & \text{或} & x \leq 1 \end{array} \\ \therefore & x \leq 1 \end{aligned}$$

3. 解不等式 $|x+2| + |x-1| \leq 5$ 。

(7 分)

Q3 解

情況一： $x > 1$

$$\begin{aligned} & |x+2| + |x-1| \leq 5 \\ & (x+2) + (x-1) \leq 5 \\ & x \leq 2 \end{aligned}$$

$\therefore$ 解為 $1 < x \leq 2$ 。

情況二： $-2 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} & |x+2| + |x-1| \leq 5 \\ & (x+2) + [-(x-1)] \leq 5 \\ & 3 \leq 5 \end{aligned}$$

這對區間內所有的 x 值皆成立。

$\therefore$ 解為 $-2 \leq x \leq 1$ 。

情況三: $x < -2$

$$|x+2| + |x-1| \leq 5$$

$$-(x+2) - (x-1) \leq 5$$

$$x \geq -3$$

$\therefore$ 解為 $-3 \leq x < -2$ 。

綜合以上三種情況, 所求不等式的解為 $-3 \leq x \leq 2$ 。

4. 對於以下各情況, 解不等式 $\frac{3}{x+2} < x$ 。

(a) $x > -2$

(b) $x < -2$

(6 分)

Q4 解

(a) 對於 $x > -2$, $x+2 > 0$ 。

$$\frac{3}{x+2} < x$$

$$\therefore 3 < x(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 或 } x > 1$$

$$\therefore \text{所求的解為 } x > 1。$$

(b) 對於 $x < -2$, $x+2 < 0$ 。

$$\frac{3}{x+2} < x$$

$$\therefore 3 > x(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$(x+3)(x-1) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 1$$

$$\therefore \text{所求的解為 } -3 < x < -2。$$

5. 若數式 $x^2 + 2kx + k + 2$ 對所有 x 的實數值皆為正, 求常數 k 的值域。

(5 分)

Q5 解

數式 $x^2 + 2kx + k + 2$ 對所有 x 皆為正, 若

$$(2k)^2 - 4(k+2) < 0$$

$$k^2 - k - 2 < 0$$

$$(k-2)(k+1) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 2$$

6. 若方程 $x^2 + kx + k = -3$ 有實根, 求常數 k 的值域。

(5 分)

Q6 解

$$x^2 + kx + k = -3$$

$$x^2 + kx + k + 3 = 0$$