

世界科普巨匠经典译丛·第一辑

青少年 科普图书馆



中国科学院院士 **叶叔华、郑时龄** 郑重推荐

● 一部比故事更有趣，比童话更神奇，比游戏更具吸引力的趣味科学启蒙书 ●

INTERESTING
GEOMETRY

趣味

几何学

(苏) 别莱利曼 / 著

李爱军 / 译



上海科学普及出版社

青少年 科普图书馆

世界科普巨匠经典译丛·第一辑

INTERESTING
GEOMETRY

趣味

几何学

(苏) 别莱利曼 / 著 李爱军 / 译

上海科学普及出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

趣味几何学 / (苏) 别莱利曼著 ; 李爱军译 . - 上海 : 上海科学普及出版社 ,
2013.10

(世界科普巨匠经典译丛·第一辑)

ISBN 978-7-5427-5827-9

I . ①趣… II . ①别… ②李… III . ①几何学 - 普及读物 IV . ① O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 173926 号

责任编辑: 李 蕾

世界科普巨匠经典译丛·第一辑

趣味几何学

(苏) 别莱利曼 著 李爱军 译

上海科学普及出版社

(上海中山北路 832 号 邮编 200070)

<http://www.pspsh.com>

各地新华书店经销 北京德美印刷厂

开本 787 × 1092 1/12 印张 20.5 字数 248 000

2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-5827-9 定价: 29.80 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题
请向出版社联系调换

目录

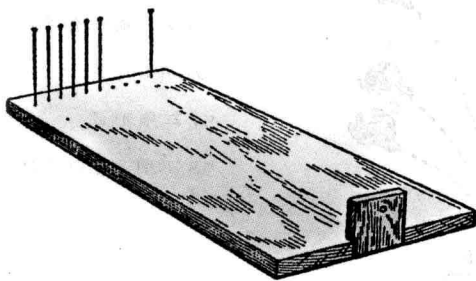
第1章 大森林中的几何学

1.1 用阴影长度测量物体高度	2
1.2 两个更简便的测量方法	5
1.3 看儒勒·凡尔纳怎样测高	7
1.4 侦察兵测高有什么高招?	8
1.5 用笔记本轻松测高	9
1.6 不靠近大树同样轻松测高	10
1.7 森林工作者的测高妙法	11
1.8 镜子也能轻松测高	13
1.9 一大一小两棵树	14
1.10 树干是什么形状	14
1.11 万能公式的应用	15
1.12 计算未伐树木的体积和 重量的方法	18
1.13 树叶上的几何知识	20
1.14 蚂蚁大力士	22

第2章 小河边的几何学

2.1 测量河流的宽度	26
2.2 帽檐也能测量河宽	29

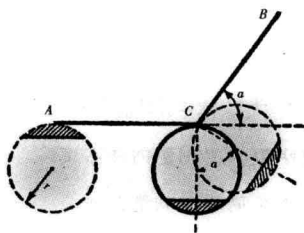
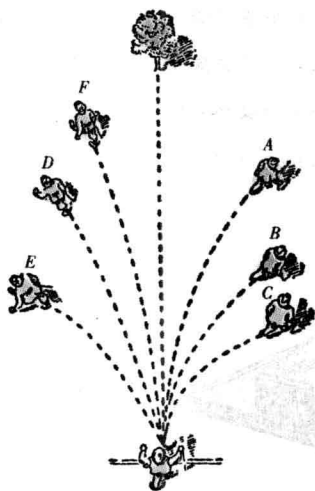
2.3 小岛的长度	30
2.4 对岸的过路人	31
2.5 最简便易行的测远仪	33
2.6 河流的巨大能量	35
2.7 河流的速度	37
2.8 小河的流量	38
2.9 置于水中的涡轮	41
2.10 色彩斑斓的虹膜	41
2.11 荡漾在水面上的圆圈	42
2.12 猜想榴霰弹爆炸后的情景	44
2.13 船头劈开的波峰	44
2.14 子弹的飞行速度	46
2.15 湖水到底有多深	48
2.16 倒映在水中的星空	49
2.17 横跨小河架桥修路	50
2.18 两座桥的修建	51





第3章 辽阔旷野上的几何学

3.1 月球的可视尺寸	54
3.2 人的视角	55
3.3 盘子和月亮	57
3.4 月亮与硬币	57
3.5 一张轰动一时的照片	58
3.6 活的测角仪	60
3.7 阿科夹测角仪	62
3.8 钉靶测角仪	63
3.9 炮兵的射击角度	64
3.10 视觉的敏锐度	66
3.11 视力所及的最远距离	67
3.12 与地平线相接的月亮和星星	70
3.13 气球的影子	72
3.14 云和地面的距离	73
3.15 塔的高度就藏在它的照片中	77
3.16 自习题	78

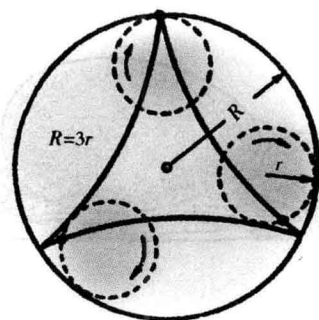


第4章 路上的几何学

4.1 用脚步测量距离	80
4.2 目测法	81
4.3 坡度	83
4.4 一堆碎石	86
4.5 “骄人的土丘”	87
4.6 公路的弯道	89
4.7 弯道半径	89
4.8 辽阔海底	91
4.9 “水山”真的存在吗?	93

第5章 不依靠公式和函数表的野外三角学

5.1 正弦的计算	96
5.2 开平方根	99
5.3 利用正弦值求角度	100
5.4 太阳有多高	102
5.5 小岛离你有多远	103
5.6 湖的宽度	104
5.7 三角形区	105
5.8 不用测量的测角法	107



第6章 天地相接的地方

6.1 地平线	110
6.2 从地平线上升起的轮船	112
6.3 地平线有多远?	113
6.4 果戈里的高塔	116
6.5 普希金的土丘	117
6.6 铁轨的交汇点	118
6.7 关于灯塔	119
6.8 闪电	120
6.9 轮船	120
6.10 月球上的“地平线”	121
6.11 月球上的环形山	121
6.12 木星	122
6.13 自习题	122

第7章 鲁滨孙的野外几何学

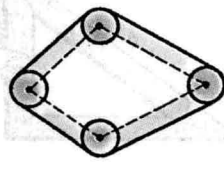
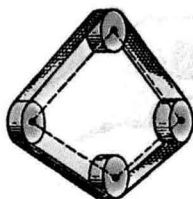
7.1 星空几何学	124
7.2 小岛的纬度	127
7.3 测定地理经度	129

第8章 黑暗中的几何学

8.1 船舱的底层	132
8.2 测量水桶的方法	133
8.3 测量尺	133
8.4 还有什么要做的事	135
8.5 验算	137
8.6 马克·吐温夜行记	139
8.7 蒙上眼睛转圈	141
8.8 没有工具的测量	148
8.9 黑暗中的直角	149

第9章 圆的过去和现在

9.1 埃及人和罗马人的实用几何学	152
9.2 π 的精确值	153
9.3 杰克·伦敦的错误	155
9.4 掷针实验	156
9.5 圆周的展开	157
9.6 关于方圆	159
9.7 宾格三角形	162
9.8 是头还是脚	163
9.9 围绕着赤道的钢丝	164

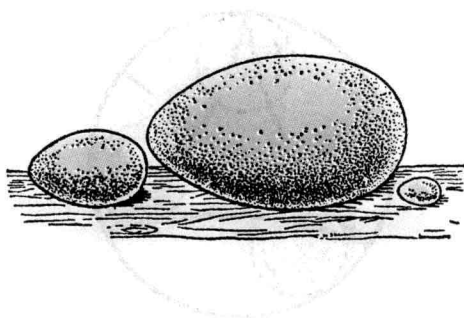
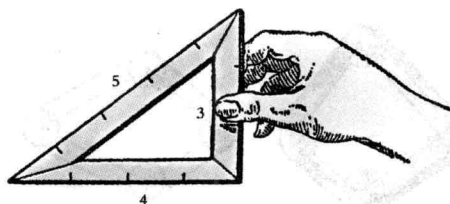




9.10 事实和计算	165
9.11 钢丝上行走的姑娘	167
9.12 飞过北极	170
9.13 传送带的长度	174
9.14 聪明的乌鸦	177

第 10 章 不用测量和计算的几何学

10.1 不用圆规照样作图	180
10.2 铁片的重心	181
10.3 拿破仑的题目	182
10.4 简便的三分角器	183
10.5 表针三分角器	184
10.6 圆周的划分	185
10.7 打台球的题目	187
10.8 台球的聪明之处	188
10.9 一笔画就	193
10.10 柯尼斯堡的七座桥梁	195
10.11 几何学玩笑	196
10.12 正方形的检验	197
10.13 别样棋赛	197



第 11 章 几何学中的大与小

11.1 一立方厘米里可以容纳 27 000 000 000 000 000 000 000 个什么?	200
11.2 体积与压力	201
11.3 细如蛛丝却坚如钢丝	203
11.4 两个容器	204
11.5 硕大的香烟	205
11.6 鸵鸟蛋	206
11.7 隆鸟蛋	206
11.8 尺寸反差大的鸟蛋	207
11.9 不把蛋壳打破, 如何测定 蛋壳的重量?	207
11.10 俄罗斯的硬币	208
11.11 百万卢布的银币	209
11.12 想象出来的画面	209
11.13 人的正常体重	211
11.14 高个子和矮个子	212
11.15 格列佛的几何学	213
11.15 尘埃和云飘浮在空中的奥秘	215



第 12 章 几何经济学

12.1 看帕霍姆怎样买地?

(列夫·托尔斯泰的题目) 218

12.2 棒形? 长方形? 222

12.3 正方形的特点 223

12.4 别的形状的地 224

12.5 面积最大的圆形 225

12.6 最不好拔的钉子 228

12.7 什么物体体积最大 228

12.8 和数相等的乘数乘积 229

12.9 最大面积的三角形 230



12.10 方梁题目 231

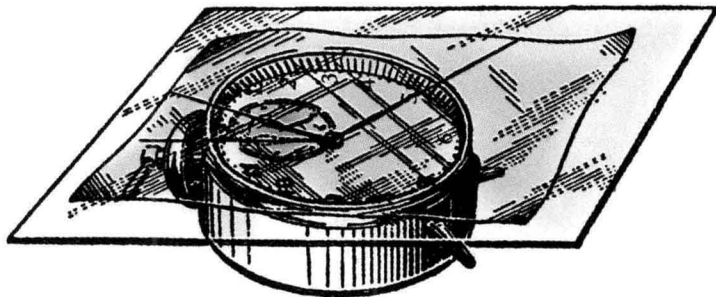
12.11 自制三角板 232

12.12 铁匠的难题 233

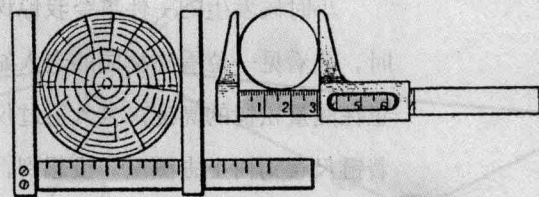
12.13 车工的难题 234

12.14 接长木板的技巧 236

12.15 哪条路线最短 238



第1章



大森林中的几何学



1.1 用阴影长度测量物体高度

小时候发生的一件事令我惊讶万分，直到现在还能回忆起当时的情形。那时，我看见一位看守林园的老人站在一棵松树旁，手里拿着一个小巧的仪器，正在测量松树的高度。老人透过仪器朝树梢瞄了一眼，我猜想接着他可能会带着链尺爬到树上去测量。没想到，老人不但没有去爬树，而且把仪器收起来，告诉大家测量结束了。

当时我还是一个小孩儿，觉得这种不用砍树，也不用爬树的测量方法很神奇，就像魔术一样高深莫测。后来，当我知道了几何学的基本原理后，才知道这种测量方法很简单。而且，利用简单的仪器或者徒手测量的方法多种多样。

既古老又简单的方法，就是公元前6世纪古希腊的哲学家泰勒斯测量埃及金字塔所用的方法，借助了金字塔的影子。当时，法老和祭司们聚集在最高的金字塔下面，看着眼前这位想要测量宏伟建筑高度的客人。据说，泰勒斯选择了一个时间来测量金字塔的高度——当他的身影的长度和身高相等时。因为这时金字塔的阴影长度^①也和它的实际高度相等，这就是类比的方法。

现在，我们会觉得古希腊哲学家的智慧也不过如此，他解决问题的方法连小孩子都知道。不过，大家不要忘记，我们是站在几何学的角度看待这个问题的，而几何学是泰勒斯之后的无数先人的智慧结晶凝聚而成的。希腊数学家欧几里德生活在距离泰勒斯很久之后的时代，他撰写了一部很好的书，之后的两千年，人们就是通过这本书来学习几何学的。虽然今天的每个中学生都熟知这本书中的原理，但是泰勒斯的时代还没有这些原理，他能够借助阴影测量金字塔的高度，必然知道三角形的一些特征，下面我们来说两个特性（第一个特性就是泰勒斯发现的）：

^① 阴影的长度是从金字塔的方形底座中心点计算，金字塔底座的宽度可以通过直接测量获得。



(1) 等腰三角形的腰所对的两个角相等；反过来说也成立，那就是有两个角相等的三角形是等腰三角形。

(2) 任意三角形的内角和等于 180° 。

由于掌握了这些知识，泰勒斯才得出，当他的身影长度等于身高时，太阳光以 45° 投射到地面上，由此可以得知，金字塔顶点、塔底中心点和塔影端点构成一个等腰三角形，塔影的长度和金字塔顶点到塔底中心点的线（也就是金字塔的高度）是三角形的两个腰。

在充满阳光的日子里，用这个简单的方法可以测量出独立的树木高度。不过，在高纬度地带，不会那么容易出现合适的机会。因为在那些地方，太阳总是低垂在地平线上，只有夏季的正午时分，物体的影子长度才和高度相等。因此，泰勒斯的测量方法有一定的局限性。

然而，在有阳光的日子里，只要把上面的方法稍作改动，就可以测量出任何物体的高度。当然，除了测量物体影子的长度，还需要知道自己的身影和身高或者竹竿的高度和影子长度，根据它们的比例，求出物体的高度（图 1-1）：

$$AB : ab = BC : bc,$$

也就是说，树影的长度是你的影子长度的几倍，树的高度就是你的身高的几倍。当然，这个结果是根据三角形 ABC 和 abc 相似的几何原理得来的。

有的人也许会说，这么简单的方法不用从几何学中找依据。离开了几何学，人们就不知道树高几倍，树影就长几倍吗？不过，事实并没有这么简单。如果把这条规律用到路灯的投影上，这条准则就不适用了。从（图 1-2）中可以看到，

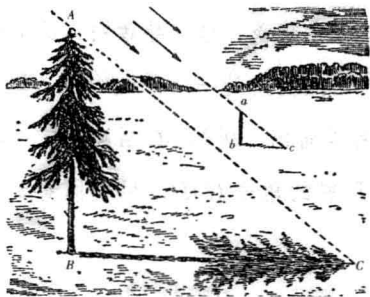


图 1-1 根据树的阴影侧量它的高度

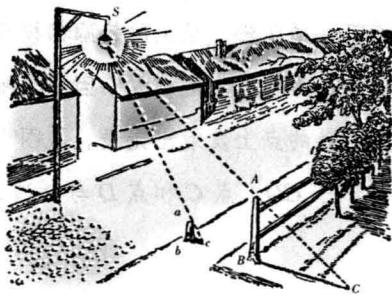


图 1-2 这种测量方法在什么情况下不适用



AB 的高度大约是 ab 高度的 2 倍, 但影子的长度 BC 是 bc 的 7 倍。没有几何学, 你要怎么解释这种现象? 为什么相同的方法会出现不同的结果?



我们仔细想一想, 这两者之间有什么区别。主要的问题是, 太阳光线是平行的, 而路灯的光线则是不平行的。后者的说法明显是对的, 但怎样才可以确定太阳的光线是平行的呢?



我们之所以说太阳照射到地球上的光线是平行的, 那是因为光线之间的角度小得可以忽略, 只要用一个简单的几何学计算就可以证明。假设从太阳的某一点射出两道光线, 落到地球表面的两个点上, 两点之间的距离我们设定为 1 千米。以太阳上射出光线的那一点为圆心, 太阳到地球的距离 (150 000 000 千米) 为半径画一个圆, 那么两道光线的圆弧长度是 1 千米。这个圆的周长是 $2\pi \times 150\,000\,000$ 千米 = 940 000 000 千米。这个圆上的每 1° 的弧长是圆周的 $\frac{1}{360}$, 大约是 2 600 000 千米; 1 弧分是 1 弧度的 $\frac{1}{60}$, 即 43 000 千米; 而 1 弧秒则是 1 弧分的 $\frac{1}{60}$, 即 720 千米。我们假设的圆弧长度是 1 千米, 对应的角度应该是 $\frac{1}{720}$ 秒。最精密的天文仪器也无法测量出如此微小的角度, 所以在实践中可以省略不计, 我们认为到达地球上的太阳光线是平行的直线^①。

如果不清楚这些几何知识, 利用阴影测量高度的方法就没有了理论依据。

当你把影子测量法应用到实践中的时候, 就会发现这个方法不一定总是可靠。因为阴影尽头的界限不是十分明确, 测量的长度不可能准确无误。太阳光投下的每一道阴影, 尽头的轮廓都模糊不清, 颜色暗淡, 这就导致阴影的界限难以确定。为什么会这样呢? 因为太阳不是一个点, 而是一个巨大的发光体, 可以从无数的点上发射出光线。从图 1-3 中可以看出, 树影 BC 后面还有一段模糊的影子 CD 。点 C 和点 D 与树顶 A 之间形成的角度 CAD , 跟我们看太阳

^① 太阳投射到地球直径两端的光线角度较大, 可以测量出来, 约为 17 秒, 这个角度的确定可以让人们更好的测定地球和太阳之间的距离。



圆面所形成的夹角相等，即半度。由于阴影的不确定所造成的误差，即使是在太阳高挂在空中时，也可能是 5° 或者更大。这个误差再加上地面不平及其他难以克服的误差，使得测量的结果不够准确。例如，这个测量方法不能用在高低不平的山地上。

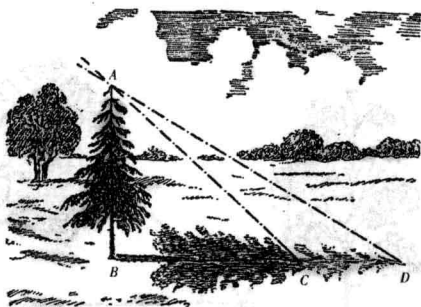


图 1-3 半影是如何形成的

1.2

两个更简便的测量方法

测量高度完全可以不必借助阴影的帮助，这样的方法有很多，在这里介绍两种简便易行的方法。

第一种方法，用一块小木板和三枚大头针制作出一个小仪器，用这个小仪器就能运用等边三角形的特性了。

找一块小木板，找出它比较光滑的一面，在上面画出等腰三角形的三个顶点。再在这三个顶点上分别钉上大头针（图 1-4），如果你手边没有可以画出直角的绘图工具也没关系，只要把一张纸对折一次，然后沿着第一次折弯处再对折一次，这样第一次折叠的两部分就重合了，你就得到一个直角。这样的仪器容易制作，就算你在野外也能制作出来。

这个小仪器使用起来也很简便，首先，手拿着仪器，在距离被测大树不远处，将三角形的一条直角边呈垂直状态，把一根细线系在直角边上端的大头针上，并让它垂直向下，在细线下端系上一个小重物，接着你就往大树的方向或远离大树的方向

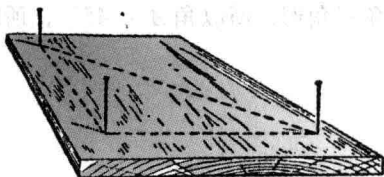


图 1-4 大头针测高仪

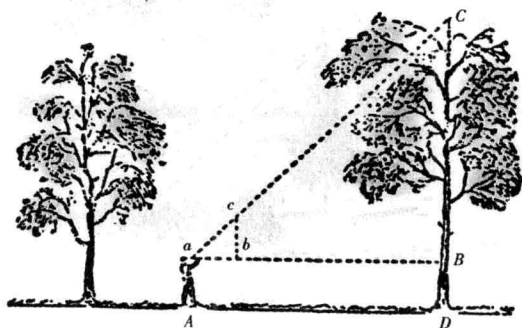


图 1-5 利用大头针测高仪进行测量

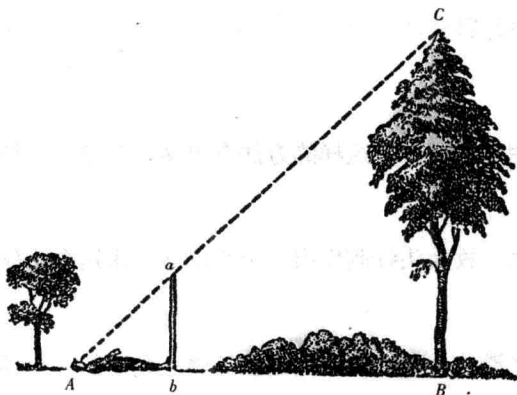


图 1-6 另一种测量树的高度的方法

挪动脚步，最后找到点 A （图 1-5），从这个点出发，透过大头针 a 和 c 往树顶方向望去，你会发现这时树顶 C 已经被两枚大头针遮盖住了。这就说明树顶 C 在直角三角形的斜边（弦） ac 的延长线上，也就是说，角 $a = 45^\circ$ ， aB 间的距离与 CB 间的距离是相等的。

可以看出，只要有 aB 或 AD 的距离（地面上仪器与树的距离），再加上 BD 的距离，（你的眼睛和地面之间的距离），那么树的高度就能轻松地计算出来了。

还有一个比上述方法更简便的方法，这个方法连大头针测高仪都不用。只要选好位置（图 1-6），把一根长木杆垂直插进地面，让它露出与你身高相等的高度^①，然后你面朝上躺在地上，眼睛看向树顶，你会发现，树顶和木杆的顶端是在同一条直线上的，因为三角形 Aba 是等腰直角三角形，所以角 $A = 45^\circ$ ，所以 $AB = BC$ ，也就是树的高度。

①准确地说，长木杆留在地面上的高度应该是你站立时，眼睛离地面的高度。



1.3 看儒勒·凡尔纳怎样测高

儒勒·凡尔纳在著名小说《神秘岛》中描写了一种测量高大物体高度的更为简便的方法。内容如下：

工程师说：“今天我们去测量眺望岗的高度。”

哈伯特问：“要拿什么工具？”

工程师说：“不要拿工具，我们有一种更简便准确的好方法。”

哈伯特很想知道那是什么方法，于是赶紧跟着工程师向岸边走去。

工程师拿了一根笔直的木杆，约12英尺长，然后拿着木杆和自己的身高认真地比量了一下，以求更为准确。哈伯特在旁边拿着一条绳头上系着小石头的绳子。

工程师走到离花岗岩壁500英尺的地方，把木杆插进土里2英尺并固定好，又用系着绳头的小石头调整好木杆的垂直度。

然后工程师在离木杆一段距离的地方仰面躺在地上，眼睛看到木杆的顶端和峭壁的边缘在同一条直线上（图1-7），然后在躺下的地方做好标记。

工程师问哈伯特：“你对几何学的基本常识都了解吗？”

“是的。”

工程师接着说：“那相似三角形的特性了解吗？”

“相似三角形的对应边是成比例的。”

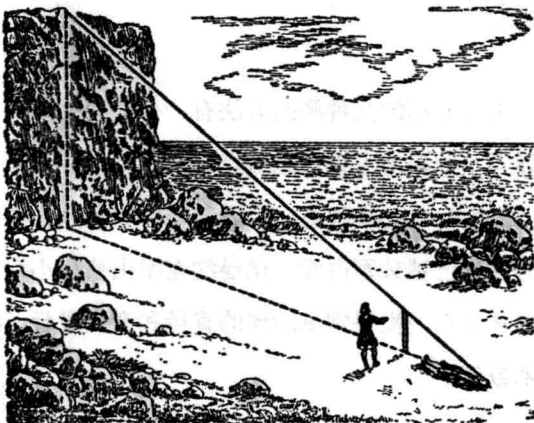


图1-7 《神秘岛》中的主人公正在测量眺望岗的高度



工程师点点头说：“没错。我现在做的就是两个相似直角三角形，木杆是小三角形的一边，我躺下时眼睛的位置，瞧，我已经做好标记了，它到杆脚的距离就是另一边，我看向眺望岗的视线就是弦，同时它也是大三角形的弦，而大三角形的两边则是我们要测量高度的眺望岗的峭壁和我做好标记的地方到岩壁脚的距离。”

哈伯特这才恍然大悟：“哦！你做的标记处到木杆的距离和它到岩壁角的距离的比例与木杆高度和岩壁高度的比例是一样的。”

工程师说：“是的，所以只要把标记处到木杆的距离和它到岩壁角的距离测量出来即可，木杆的高度我们已经知道，现在就能通过比例算式计算出岩壁的高度了。”

经过测量，两个距离分别为 15 英尺和 500 英尺。然后工程师开始计算：

$$15 : 500 = 10^{\text{①}} : x,$$

$$500 \times 10 = 5\,000,$$

$$5\,000 \div 15 = 333.3.$$

经过计算得出眺望岩的高度约为 333 英尺。

1.4

侦察兵测高有什么高招？

刚才介绍的几种测高方法有一个共同的缺点，就是需要人躺在地上。其实就算人不躺在地上也可以测量。

卫国战争的前线上，中尉诺曼约克的分队奉命在山涧上建造一座桥。但山涧的对岸已被敌军占领，诺曼约克派出侦察小组去侦察建桥的地点，侦察小组在树林中对一批很常见的树的直径和高度进行了测量，并计算出了架桥需要的树木数量。

①前面提到木杆长 12 英尺，减去埋入土内的 2 英尺，就是木杆在地面以上的高度，为 10 英尺。



侦察兵测量树高只是借助了一根木杆的帮助，方法如下：

他们拿一根高出自己身高一段距离的木杆，在离树木不远处把它垂直插进土里，再顺着图中 Dd 两点的沿长线后退至 A 点，面朝树尖，从 a 点可以看到木杆的顶端 b 和树尖在同一直线上，然后头部姿势保持不变，

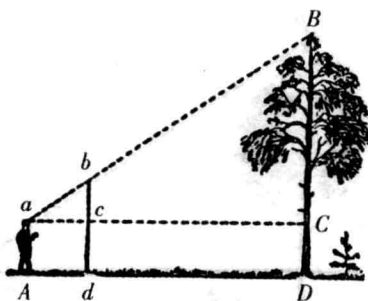


图 1-8 用木杆测量高度

眼睛向水平直线 aC 的方向望去，并在木杆和树上分别标记上 c 点和 C 点（如图 1-8）。

下面就可以根据三角形 abc 和 aBC 的相似关系开始计算了，列出如下比例式：

$$BC : bc = aC : ac,$$

得出：
$$BC = bc \times \left(\frac{aC}{ac}\right).$$

bc 、 aC 、 CD 和 ac 的距离可以直接测量出来，只要把计算出来的 BC 值加上 CD 的距离就是树的高度了。

接着，侦察兵们又用相应的计算方法计算出这片树林的树木数量，根据这些数据，诺曼约克很轻松地确定了架桥的地点和桥的样式，桥如期建好，战斗任务圆满完成。

1.5

用笔记本轻松测高

有一个测高的方法非常简便，只需拿一个笔记本，在笔记本边缘插根铅笔即可，这样它本身就能创造一个三角形。把笔记本举在眼前，使有铅笔的一端朝向大树，然后调整铅笔的高度，直到从 a 点向树尖望去时能看到笔尖 b 和树尖 B 在同一条直线上为止（如图 1-9）。

于是三角形 abc 和三角形 aBC 是相似三角形，列出比例式：