GAOZHONG SHUXUE
JIAOXUE YI'NAN WENTI YANJIU

中小学教师
继续教育用书

高中数学教学疑难问题研究

胡明健　袁　桐　著

东北师范大学出版社

中小学教师继续教育用书

GAOZHONG SHUXUE JIAOXUE

YI'NAN WENTI YANJIU

■东北师范大学出版社

长　春

高中数学教学疑难问题研究

■ 胡明健　袁　桐　著

（吉）新登字 12 号

□出 版 人：贾国祥

□策划编辑：包瑞峰
□责任编辑：陈　珊
□封面设计：未　名
□责任校对：李　韬
□责任印制：栾喜湖

中小学教师继续教育用书
高中数学教学疑难问题研究
胡明健　袁　桐　著

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号（130024）
电话：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695744　5695734
电子函件：Sdcbs@mail. jl. cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春市第九印刷厂印刷
2000 年 12 月第 1 版　2000 年 12 月第 1 次印刷
开本：850×1168 1/32　印张：8.25　字数：200 千
印数：0 001 — 3 000 册

ISBN 7-5602-2691-4/G·1584　定价：9.00 元

中小学教师继续教育教材编写委员会

主　　任：史宁中　盛连喜

委　　员：张贵新　何艳茹

梁忠义　李　全

贾国祥　李殿国

本书编委会

主　任：蒋念祖　侗守愚

撰稿人：胡明健　袁　桐

出版说明

历史将翻开新的一页，人类即将跨入21世纪. 21世纪是充满机遇和挑战的世纪，是一个科学技术更加发达，竞争更加激烈，社会对人的素质要求更高的世纪. 提高人的素质的关键在教育，振兴教育的关键在教师，只有造就一支高素质的教师队伍，才能满足21世纪教育发展的要求. 而建立和完善适应21世纪需要的中小学教师继续教育制度，则是造就高素质中小学教师队伍的根本措施.

1998年6月，国家教育部师范教育司制定并印发了《中小学教师继续教育课程开发指南》(以下简称《指南》).《指南》对中小学教师继续教育的教学内容和课程体系作了原则规定，对现阶段中小学教师继续教育提出了基本要求，这标志着我国中小学教师继续教育教学内容和课程体系的确立.

我们组织编写的这套教材是以《指南》为指导，按《指南》所规定的课程和内容要求而编写的. 我们目前出版的这些教材，大部分都是《指南》中规定的必修课. 根据中小学教师继续教育开展的情况，我们还将陆续组织编写出版《指南》中规定的其他教材.

在教材编写过程中，我们认真汲取了“八五”期间全国各地

开展中小学教师继续教育的宝贵经验，坚持从中小学教师队伍建设的需要和中小学的实际出发，力求反映先进的教育思想、教育理论，反映最新的学科知识发展动态、教育教学改革实践和研究成果，反映现代教育技术和先进教学方法，在确保科学性的前提下，进一步突出了教材内容的针对性、实效性、先进性和时代性，体现了中小学教师继续教育的特点和要求.

由于时间仓促，加之中小学教师继续教育教材建设尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，缺憾之处在所难免，恳请广大读者不吝赐教，并在研究和探讨方面与我们进行更多的合作.

希望本教材能对广大中小学教师完善自我，提高自身素质，顺利地跨入21世纪，助一臂之力.

东北师范大学出版社

1999年7月

目　　录

第一章　映射与函数/1

第一节　集　合/1
第二节　映　射/15
第三节　函　数/25
第四节　反三角函数/51
思考与练习/65

第二章　不等式的证明/66

思考与练习/92

第三章　复　数/93

思考与练习/123

第四章　立体几何中的直观图/124

思考与练习/146

第五章　解析几何中的极坐标问题/147

思考与练习/172

第六章　极坐标的认识与分析/173

思考与练习/212

第七章　曲线的普通方程与参数方程/213

思考与练习/255

第 一 章

映射与函数

这一章主要研究的主要内容为：

集合；

映射；

函数及其性质；

反三角函数.

按照现行中学数学课本，以上这些内容主要涉及高级中学课本代数(上册)中的四章：第一章幂函数、指数函数和对数函数；第二章三角函数，第三章两角和与差的三角函数、解斜三角形；第四章反三角函数和简单三角方程. 但关于集合、映射与函数的数学思想方法及其应用贯彻和渗透于中学数学的每一部分，可以说是中学数学一根主线，这部分的教学对于贯彻素质教育，提高学生的数学素质具有十分重要的教育价值.

第一节 集 合

一、教材概况

学生在初中代数中已接触到集合这一名词，对集合这个名词有了一定的感性认识，高中代数集合这部分教材是在学生已学过

初中数学的基础上，引入集合、子集、交集、并集、补集等概念以及一些有关的符号. 要求学生理解这些概念，并能正确使用有关符号，能运用它们重新叙述初中学过的一些概念，如方程(组)、不等式(组)的解集、线段、直线、射线和它们的交点，整数分为奇数、偶数，实数分为有理数、无理数等等. 通过这部分内容的学习，为以后学习映射概念和各种基本初等函数，学习从自然数集到复数集的发展过程以及讨论方程(组)、不等式(组)的解集等等作好初步的准备.

集合是高中代数上册(必修)第一章幂函数指数函数和对数函数中的第一大节.

这一大节分为两个小节.

第一小节“集合”：在这一小节中介绍了集合的概念，集合的两个主要特征 —— 元素的确定性、互异性，集合的两种表示方法 —— 列举法、描述法，元素与集合的属于与不属于关系及其表示符号，有限集、无限集的概念，自然数集、整数集、有理数集、实数集的概念及其字母表示等.

第二小节“子集、交集、并集、补集”：在这一小节中介绍了子集与真子集、交集、并集、补集的概念及其数学表示(例如 $A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 等)，空集的概念及其表示符号，集合的包含与不包含关系及它们的符号，奇数集、偶数集、无理数集的概念，并规定了无理数集的符号表示等等.

二、教材研究

1. 为什么要学习集合

现代数学除研究数学和几何图形外，还需研究更多更广泛的对象，希望能用统一的观点和有力的手段来处理研究对象，数形结合的方法是用统一方法处理不同对象(元素)的萌芽，使之能深刻地研究对象的性质. 直角坐标系的引入，使数形结合进入了一个新

的比较完美的阶段,使几何初步代数化、通过数研究形、通过形研究数.

集合论的产生使数形结合达到更高级的阶段,它不仅可用字母表示数、点、图形,还可以用字母表示向量、矩阵、线性变换、概率中的事件、对策论的策略、计算机上的信号和电路的开闭等等,大到宏观世界的银河系,小到微观世界的粒子的多种研究对象,都可以用字母运算来表达它们的各种演变,并在字母代数研究中抽象出它们的共同规律,研究解决各种问题,所以集合概念及其基本理论是近代数学最基本的内容之一,许多重要的数学分支,如数理逻辑、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等,都建立在集合理论的基础之上.另外,集合思想还广泛地渗透到自然科学的许多领域,集合术语在科技文章和科普读物中到处可见.学生进入高中,在高中一年级首先让学生学习并掌握集合的初步知识,可以使学生对初等数学的一些基本概念理解得更加深刻,表达得更加明确,可以更好地提高学生的数学的科学素质和数学的文化素质,同时也可以为学生阅读一些课外科技读物以及为今后学习近代数学知识准备必要的条件.

2. 集合的概念

众所周知,不是任何一个概念都能定义的,常常某些最基本的概念,对它们无需加以定义,而用例子来形象地描述它们,利用这些基本概念来定义各个数学学科的新概念.集合是数学中最原始的概念之一,是不定义的概念,即不能用其他的基本概念给它下定义,只能作描述性的说明.同几何中的点(没有形状大小),线(没有粗细),面(没有厚薄)等原始概念一样,只能作描述性的说明.

课本从学生已有的知识出发,让学生考察分析取自数、点、图形、整式以及物体的代表性的五个实例:

(1)1,2,3,4,5;

(2)与一个角的两边距离相等的所有点;

(3) 所有直角三角形;

(4)$x^2,3x+2,5y^3-x,x^2+y^2$;

(5) 某农场所有的拖拉机.

来引入集合的概念.课本把集合描述为"一组对象的全体"形成一个集合(有时也简称集).

集合概念的几点注释:

(1) 集合概念的内涵很小,只要一组对象即可,甚至连一组对象是否具有共同性质都未要求.但集合的外延却很大,小到粒子,大到宇宙的任何对象都可以,课本的作为引入集合概念的五个实例,正是从数、点、图形、整式、物体用以说明集合概念的外延很大.

(2) 集合理论的创始人康托称集合为一些确定的不同的东西的总体,人们能意识到这些东西,并且能判断一个东西是属于或不属于这个总体.课本用"一组对象的全体"精炼的蕴含关于集合中的元素的两大特征:

① 确定性,设 A 是一个给定的集合,x 是某一具体对象,则 x 或者是 A 的元素,或者不是 A 的元素,两种情况必有一种且只有一种成立.

② 互异性,一个给定集合中的元素,指属于这个集合的互不相同的个体(或对象).因此,同一集合中不应重复出现同一元素.

集合的以上两大特征可成为判断所给对象是否构成集合的依据.例如,"著名的科学家","好心的人"这类对象,一般不能构成数学意义上的集合,因为找不到可以判别每一具体对象是否属于集合的明确标准,又如符号$\{1,1,2\}$,由于其中出现了重复的元素,所以不能作为集合的正确表示,应把它写成$\{1,2\}$.

(3) 如果某种事物不存在,很自然的把这种事物的总体称为空集,即把不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.

(4) 因为每个集也是一个事物,所以空集 $\varnothing$ 是一个事物,故知$\{\varnothing\}$ 不是空集,因为 $\varnothing$ 是$\{\varnothing\}$ 中的惟一元素,即

$\varnothing \in \{\varnothing\}$

由此也可以说明 $\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$ 是两个不同的概念，前者没有元素，而后者有一个元素.

例 1　已知集合

$M = \{x, xy, \lg(xy)\}$

及 $N = \{0, |x|, y\}$,

并且 $M = N$，那么

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \cdots + \left(x^{2001} + \frac{1}{y^{2001}}\right)$$

的值等于(　　)

解　显然，$xy \neq 0$，由题意知 $\lg(xy) = 0$,

$xy = 1$，只能 $x = y = -1$，因为 $x = y = 1$ 不合题意，否则，M(或 N) 中有两个元素为 1，违背集合中元素的互异性的原则，所以

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \cdots + \left(x^{2001} + \frac{1}{y^{2001}}\right) = -2$$

3. 集合的表示法

(1) 列举法　是把给定集合的元素，不重复，不计次序，不遗漏地一一列出，放在集合符号{　}内，元素之间用逗号“,”分开.

一般地说，当集合 A 为有限集，且它的元素个数不多时，可用列举法来表示.

(2) 描述法　是把集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内，描述法可用文字描述，也可用数学式子描述，数学式子描述时的常用模式是 $\{x \mid P\}$，x 是集合的代表元素，竖线是隔开符号，P 是指元素 x 所具有的公共属性.

一般来说，当一个集合有许多元素或无限多个元素时，列出全部元素是很麻烦的甚至是不可能的，用描述法来表示集合就较为

方便.

用描述法表示集合时要注意的是：

① 需要多层次描述属性时，可选用关联词“且”、“或”等联结，若描述部分出现元素以外的字母时，要进一步对新字母说明其含义或指出取值范围；

② 集合的代表元素不能用单个字母 x 来表示时，可用代表元素 (x,y) 或 (x,y,z) 等来表示.

(3) 韦恩(Venn)图法　用圆圈(或方框)表示集合，注意圆圈(或方框)的大小不表示该集合中元素的多少〔除一圆(方框)包含在另一圆(方框)内〕.

韦恩图是数学语言中的一种图形语言，是数形结合思想在集合中的体现，它具有语言转换功能，逻辑分析、推理功能，具有较强的数学功能的教育意义.

例 2　设 $x,y\in\mathbf{R}$，条件甲：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$；条件乙：$|x|+|y|\leqslant 1$；条件丙：$x^2+y^2\leqslant 1$，则甲是丙的什么条件？乙是丙的什么条件？

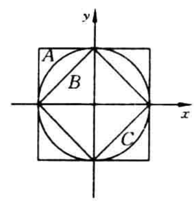

图 1 - 1

解　设分别满足条件甲，乙，丙的点集为 A,B,C，画出韦恩图如 1 - 1.

易见 $A\supset C$，$B\subset C$.

所以，甲是丙的必要非充分条件，乙是丙的充分非必要条件.

例 3　某年级先后举行数理化三科竞赛，其中 75 人参加数学竞赛，68 人参加物理竞赛，61 人参加化学竞赛，17 人同时参加物理和数学竞赛，12 人同时参加数学和化学竞赛，9 人同时参加化学和物理竞赛；还有 6 人三科竞赛都参加，求参加竞赛的学生人数.

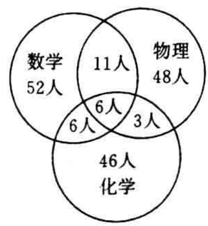

图 1 - 2

解　根据题意，可画出韦恩图如 1 - 2.

所以，参赛学生人数为：

$$52 + 48 + 46 + 11 + 6 + 6 + 3 = 172(\text{人})$$

4. 集合与集合间的关系

(1) 子集与真子集的联系与区别　从定义上看，当且仅当对任意 $x \in A$ 都有 $x \in B$，那么集合 A 叫集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)，从韦恩图上看，图 1-3 和图 1-4 中集合 A 都是集合 B 的子集，因此它包含着两层意思，即集合 A 的元素可能和集合 B 的元素完全相同，也可能集合 A 的元素是集合 B 的元素的一部分，若集合 A 是集合 B 的真子集，不仅要求 A 是 B 的子集，还要求 B 中至少有一个元素不属于 A，符号是 $A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$). 图 1-4 表达的是 A 是 B 的真子集，因此真子集是子集，反之则不成立.

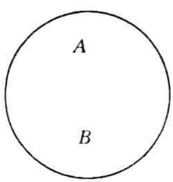

图 1-3

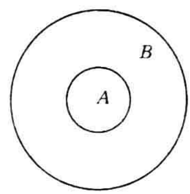

图 1-4

教材规定“空集是任何集合的子集”，如何从子集定义来说明这个规定的合理性？

我们知道原命题与其逆否命题是等价的，所以子集的定义可以换成与其等价的另一种说法：若对任意 $x \notin B$，则必有 $x \notin A$，那么集合 A 叫集合 B 的子集. 空集是不含任何元素的集合. 显然符合空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集的定义，因而教材规定“空集是任何集合的子集”是合理的.

(2) 要注意 $\in$ 与 $\subseteq$ (或 $\subsetneqq$) 这两种符号的不同涵义，$\in$ 用在元素与集合之间，表示元素与集合的从属关系；$\subseteq$ (或 $\subsetneqq$)，用在集合与集合之间，表示包含(或真包含)关系，请看下面一个例子：

例 4　设 $A = \{0,1\}$，且 $B = \{x \mid x \subseteq A\}$，$A$ 与 B 是什么关系？

弄清集合中元素是认识集合的关键. 由 B 的表示式可知, x 代表 A 的子集, 因而 A 的子集(包括 A 自身) 都是 B 的元素, 如用列举法写出 B, 则 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$, 所以 A 不是 B 的子集, 而是 A 的元素, 即 $A\in B$.

(3) 等集的含义　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$, 则 $A=B$, 说明两个等集的元素完全相同. 由等集定义我们得到证明两个集合相等的一种证明方法: 如果要证明 $A=B$, 只要证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 两者都成立即可.

平面解析几何中, 曲线和方程的关系, 就是两个集合的相等的关系, 我们把曲线看作适合某种条件 P 的点 M 的集合:

$$P=\{M\mid P(M)\}.$$

在建立坐标系后, 点集 P 的任一元素 M 都有一个有序数对 (x,y) 和它对应, (x,y) 是某个二元方程 $f(x,y)=0$ 的解, 也就是说, 它是解的集合

$$Q=\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}$$

中的一个元素, 反之, 对于解集 $Q=\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}$ 中任一元素 (x,y) 都有一点 M 与它对应, 点 M 是点集 $P=\{M\mid P(M)\}$ 中的一个元素, P 和 Q 的这种对应关系, 曲线和方程的关系实质上就是两个集合的相等关系.

(4) 交集、并集、补集　A 与 B 的交集是由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合, 记作 $A\cap B$. A 与 B 的并集是由属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 记作 $A\cup B$. 它们都是表示集合与集合之间关系的, 但是 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$, 而 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$, 交集是用"且"字描述, 是 A、B 的公共元素组成的集合, 并集是用"或"字描述, 是 A、B 中不同的元素组成的集合.

从韦恩图上看, 图 1-5 的①、② 阴影部分表示集合 A、B 的交集, 图 1-5 的(3)、(4) 阴影部分表示集合 A、B 的并集.