

概率与数理统计习题解答

曲阜师范学院高师函授数学专业学习资料

概率与数理统计习题解答

第 一 册

曲阜师范学院函授部

一九七九年元月

前 言

经1978年数学年会7份院校代表协商，准备于1979年期间编写一本概率论与数理统计习题解答。参加该项工作的有华中工学院、华中师范学院、南京大学、江苏师范学院、曲阜师范学院、等十二所院校。第一册的内容包括（1）北京大学1965年概率论习题，（2）林少宫编《基础概率与数理统计》（1978年版）习题。其他习题解答将陆续分册编辑。这个习题解答印发给我院函授生，作为函授数学专业《概率论》课程的学习和参考资料。

曲阜师范学院函授部 1979年1月

概率论习题解答

北京大学数学系

<1965>

说明：凡与下列书中习题相同者均未解答，只写了题号以便查

对。B.B. 格列坚科《概率论教程》

林少宫《基础概率与数理统计》

第一章 随机变量的一般概念

1. 有每部分上下两卷的书五部，放在一起。某人匆忙随便翻了兩本，问恰好是一部的概率多大？

解：五部共10卷，随便翻两卷的可能取法共 C_{10}^2 种

恰是一部，一卷来自五卷上中，一卷来自五卷下中，共有 $C_5^1 C_5^1$ 种

$$\text{取法：} \therefore P\{\cdot\} = \frac{C_5^1 C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

2. B. B. 格列坚科：《概率论教程》第一章习题4

3. 掷三颗骰子，求下列概率

a). 三颗骰子全相同 b). 两个相同，另一个不同， c). 三个各不相同。

解：全可能情况为 6^3

$$a). \text{三颗全同为：} C_3^1 \cdot 6 = 6. \therefore P\{\cdot\} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \approx 0.028$$

$$b). \text{二颗同，另一个不同，} C_3^2 \cdot 6 \cdot 5 = 90 \therefore P\{\cdot\} = \frac{90}{6^3} \\ = \frac{15}{36} \approx 0.417$$

$$c). \text{三颗全不同，} 6 \times 5 \times 4. \therefore P\{\cdot\} = \frac{20}{36} \approx 0.556$$

$$\text{或 } P\{\cdot\} = 1 - \frac{1}{36} - \frac{15}{36} = \frac{20}{36} \approx 0.556$$

4. 掷两颗骰子，求“出现点数之和小于4”的概率

解：全可能情况 $6^2 = 36$

“总和 < 4 ”的情况为 $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ 三种

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0.083$$

或用母函数法：求 $\frac{1}{36} (x + x^2 + \dots + x^6)^2$ 中 x 的方
次小于 4 的项的系数的总和。 $\frac{1}{36} (x + x^2 + \dots + x^6)^2 = \frac{1}{36}$
 $(x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + x^{12})$

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{1}{12} \doteq 0.083$$

5. 桥牌游戏中，南北一方获得全 P 四个 "A" 的概率

解：南北方共得牌 26 张，全 P 可能分为 C_{52}^{26}

$$\text{获 4 个 "A": } C_4^4 C_{48}^{22} \therefore P\{\cdot\} = \frac{C_4^4 C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}} = \frac{46}{833} = 0.055$$

6. 从一副扑克中任取 4 张，求至少有三张黑桃的概率

解：任取 4 张的总数 C_{52}^4 ，至少三张黑桃包括恰好三张，
恰好四张 而恰好三张： $C_{13}^3 C_{39}^1$ ，恰好四张 $C_{13}^4 C_{39}^0$

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{C_{13}^3 C_{39}^1 + C_{13}^4 C_{39}^0}{C_{52}^4} = \frac{913}{20825} \doteq 0.044$$

典型错误：先从 13 张黑桃中取 3 张，这样保证至少 3 张黑
桃，另从 $52 - 3 = 49$ 张中任取一张，如此 $P\{\cdot\} = C_{13}^3 C_{49}^1$
 $/ C_{52}^4 = \frac{1078}{20825}$

这一错误对四张全是黑桃者重复算了四次，例如黑桃 A, 2, 3, 4 时，先取 (A, 2, 3) 再取 (4) 算一次，先 (2, 3, 4) 再 (A)，先 (3, 4, A) 再 (2) 先 (4, A, 2) 再 (3)，共数了四次，而实际是一种。

7. 从一副扑克中抽牌，抽得黑桃时记一数字 "1"，不
是黑桃时记一数字 "0"，今抽取 4 次（无放回），求 "所得 4
个数字之和 ≥ 1 " 的概率

解：所述事件实际上至少有一张黑桃

"至少有一张黑桃" 的个数为 "总数" - "全非黑桃" 个

故. 而免数为 C_{52}^4 , 全非黑桃 $C_{13}^0 C_{39}^4$, 至少一黑桃 $C_{52}^4 - C_{13}^0 C_{39}^4$
 $C_{39}^4 \therefore p\{\cdot\} = \frac{C_{52}^4 - C_{13}^0 C_{39}^4}{C_{52}^4} = \frac{14498}{20825} = 0.696$

8. 将扑克一付红黑二色分成两堆. 今从两堆中各取一张
 求: a) 两张都是 "A" 的概率. b) 两张中至少有一张
 "A" 的概率.

解: 免取法 $C_{26}^1 C_{26}^1 = 26^2$

a) 两张都是 A. $C_2^1 C_{24}^0 \times C_2^1 C_{24}^0 = 2^2$

$$\therefore p\{\cdot\} = \frac{2^2}{26^2} = \frac{1}{169} = 0.006$$

b) 至少一张 A: 其逆为都不是 A. $C_2^0 C_{24}^2 \times C_2^0 C_{24}^2 = 24^2$

$$\therefore p\{\cdot\} = \frac{26^2 - 24^2}{26^2} = \frac{25}{169} = 0.148$$

9. 一人有几把钥匙. 其中只有一把可以打开房门. 他逐
 个试验, 求恰在第 K 次试验时. 打开了房门的概率.

解: 使用钥匙的可能排列法 $n!$

在第 K 次打开房门即解要之钥匙处于第 K 个位置, 其它位
 置不管. 故此情形有 $(n-1)!$ 种. $\therefore p\{\cdot\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

10. B. B. 格涅坚科《概率论教程》第一章习题 14

11. 一次乒乓球比赛有 24 人参加. 1, 2, 3, 4 号为种子
 选手, 今分四组比赛, 每组 5 人, 种子选手各在一组, 求下列
 概率:

a) 第一号与第 5 号在一组; b) 第 5 号与第 6 号在一组

解: 无妨设 1, 2, 3, 4 已分入不同组, 今只要把剩下的
 20 人分给 5 人与 1 号置一组, 5 人与 2 号置一组, 5 人与 3
 号置一组, 5 人与 4 号置一组, 故免分法为 $\frac{20!}{5! 5! 5! 5!}$

a) 1, 5号在一组 则5号定与1号处 故只须将剩下的19人分成4, 5, 5, 5 四堆分法数为 $\frac{19!}{4!5!5!5!}$

$$P\{.\} = \frac{19!}{4!5!5!5!} / \frac{20!}{5!5!5!5!} = \frac{1}{4} = 0.250$$

b) 5, 6号在一组, 5, 6号与1号同组可有 $\frac{18!}{3!5!5!5!}$

种分法

故5, 6号同组的分法为 $4 \times \frac{18!}{3!5!5!5!}$

$$\therefore P\{.\} = 4 \times \frac{18!}{3!5!5!5!} / \frac{20!}{5!5!5!5!} = \frac{4}{19} = 0.211$$

12. 湖中有鱼 其数不知 取1000条做上记号后放回, 经数日, 俟鱼已均匀混合后, 又提取1000条

问湖中鱼数为多少时能使所提1000条中有100条有记号之概率多大?

解: 当鱼数为几时, 作记号者再提1000条中有100条有记号的概率为: $\frac{C_{100}^{1000} C_{K-1000}^{900}}{C_K^{1000}}$

$$\text{今研究 } \frac{C_{100}^{1000} C_{K+1-1000}^{900}}{C_{K+1}^{1000}} / \frac{C_{100}^{1000} C_{K-1000}^{900}}{C_K^{1000}} =$$

$$\frac{(K+1-1000)^2}{(K+1)(K+1-1900)}$$

当 $K \geq 9999$ 时, 上式 ≤ 1

" $K \leq 9999$ ", 上式 ≥ 1

" $K = 9999$ 或 10000 时, 1000条中有100条作记号的概率最大, 为 $\frac{C_{100}^{1000} C_{9000}^{900}}{C_{10000}^{1000}}$

B. 几个人 (包括甲、乙) 排成一行, 求甲乙二人间恰有

r 人的概率？

解： n 人排一行共 $n!$ 法

甲乙间有 r 人，可先研究甲处于第 1 个，乙处于第 $r+2$ 个的情形。这时，甲、乙间恰有 r 人，而除甲、乙外，其余 $n-2$ 置换位置仍能保持甲、乙间有 r 人。故甲乙分别处于 $1, r+2$ 位置时共有 $(n-2)!$ 种排法，甲、乙位置可交换，又使甲、乙间有 r 人的甲、乙的位置共有 $(n-r-1)$ 种。

$$\text{故 } P\{\cdot\} = \frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

14. 从自然数 $1, 2, \dots, N$ 中随机抽取 n 次，可重复取同一数，求下列概率：a). n 个数恰好依自然顺序相连（即后一数比前一数大 1）；b). n 个数各不相同；c). n 个数各不相同且依次递增。

解：总数 N^n 。

a). n 个数依自然次序相连有 $N-n+1$ 种

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{N-n+1}{N^n}$$

b). n 个数各不相同，有 $\frac{N!}{(N-n)!}$ 种

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{N!/(N-n)!}{N^n}$$

c). n 个数各不相同，且依次递增有 $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ 种

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{N!}{n!(N-n)!} / N^n$$

15. 将号码 $1, 2, \dots, n$ 放入 n 个空格中（每格可放任意张号码）

求下列概率：a). 没有一空格 b). 恰有一空格

解：全排列法 n^n

a). 没有空格 $n!$ $\therefore P\{\cdot\} = n! / n^n$

b). 恰有一空格，总的情形为有一空格，一格有二号码，其余一格一号码，故我们可以为先取二号码及二格，将二号码一起放入一格，另一格空着，其法共有 $2C_n^2 C_n^2$ ，剩下 $n-2$ 码 $n-2$ 格，恰成一格一号码，故恰有一空格的放法共 $2C_n^2 C_n^2 (n-2)!$

$$\therefore P\{\cdot\} = 2C_n^2 C_n^2 (n-2)! / n^n = C_n^2 n! / n^n$$

16. 九个乘客上三节车厢，每个乘客随机地选择车厢，求下列概率：a) 每节车厢恰有3人；b) 没有空车厢；

解：总的上车法为 3^9 种

a). 每节恰有三人，即九人分成 3, 3, 3 三堆

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{9!}{3!3!3!} / 3^9 = \frac{6050}{6561} \approx 0.085$$

b). 没有空车厢，其逆为有空车厢，上车法为：

$$\begin{aligned} & \text{"第一节空"} \text{个} + \text{"第二节空"} \text{个} + \text{"第三节空"} \text{个} \\ & - \text{"第一、二节同时空"} \text{个} - \text{"第二、三节同时空"} \text{个} \\ & - \text{"第三、一节同时空"} \text{个} = 2^9 + 2^9 + 2^9 - 1^9 - 1^9 - 1^9 \\ & = 3 \cdot 2^9 - 3 = 3(2^9 - 1) \end{aligned}$$

$$\therefore P\{\cdot\} = \frac{3^9 - 3(2^9 - 1)}{3^9} = \frac{6050}{6561} \approx 0.922$$

17. 林少宫《基础概率与数理统计》第二章习题 23

第二章 随机变量的一般理论

1. 林少宫:《基础概率与数理统计》第三章习题2

2. 甲乙二人分别独立射击同一目标一弹, 甲击中概率为 p , 不中为 $1-p$, 乙击中概率为 $\bar{p}$, 不中概率为 $1-\bar{p}$, 求目标受弹数的分布

解: 设 甲射击结果为 $\eta = \begin{cases} 1 & \text{命中} \\ 0 & \text{未中} \end{cases}$

乙射击结果为 $\zeta = \begin{cases} 1 & \text{命中} \\ 0 & \text{未中} \end{cases}$

$$\therefore p(\eta=1)=p \quad p(\eta=0)=1-p$$

$$p(\zeta=1)=\bar{p} \quad p(\zeta=0)=1-\bar{p}$$

$\therefore \eta, \zeta$ 独立, 受弹数 $\xi = \eta + \zeta$ 可取值 0, 1, 2

$$\therefore p(\xi=0)=p(\eta=0, \zeta=0)=p(\eta=0)p(\zeta=0) \\ = (1-p)(1-\bar{p})$$

(ξ 为目标受弹数, ξ 可取值 0, 1, 2)

$$p(\xi=1)=p((\eta=1, \zeta=0) \text{ 或 } (\eta=0, \zeta=1))$$

$$=p(\eta=1, \zeta=0)+p(\eta=0, \zeta=1)=p(1-\bar{p})+\bar{p}(1-p)$$

$$\text{类似 } p(\xi=2)=p\bar{p}$$

3. 射击某目标直至击中为止, 设每次击中的概率独立的为 p , 求射击次数 N 的分布

解: N 可取值 1, 2, ----

$$p(N=K)=p(\text{第一次未中, ----, 第 } K-1 \text{ 次未中, 第 } K \text{ 次中}) \\ =p(\text{第一次未中}) \cdots p(\text{第 } K-1 \text{ 次未中}) p(\text{第 } K \text{ 次中})$$

K 次中)

$$= (1-p)(1-p)\cdots(1-p)p = (1-p)^{K-1}p, K=1, 2, \dots$$

4. 某同学不慎将生字 probability 的卡片混入一堆 n 张的空白卡片中, 今逐张查找直至找到为止, 求该同学检查的卡片张数的分布.

解: 共有 $n+1$ 张卡片, 该被检查的卡片张数为 Z

Z 的可能值为 $1, 2, \dots, n+1$.

$Z=K$ 即生字 probability 的卡片在第 K 次被查着,

$$\therefore P\{Z=K\} = \frac{\text{probability 卡片在第 } K \text{ 次被查着的查法}}{\text{全 } P \text{ 可能查法}}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

5. 求第一章习题 7 中所得四数字总和这一随机变量的分布

解: 该所得数字总和为 Z , Z 取值 $0, 1, 2, 3, 4$

$Z=K$ 即所取 4 张中恰有 K 张黑桃

$$\therefore P(Z=K) = \frac{C_{13}^K C_{39}^{4-K}}{C_{52}^4}, K=0, 1, 2, 3, 4$$

$$P(Z=0) = \frac{6327}{20825} \approx 0.302, P(Z=1) = \frac{9139}{20825} \approx 0.438$$

$$P(Z=2) = \frac{4446}{20825} \approx 0.213, P(Z=3) = \frac{858}{20825} \approx 0.041$$

$$P(Z=4) = \frac{55}{20825} \approx 0.003$$

6. 求三次投掷硬币中, 国徽出现次数的分布

解: 该出现次数为 Z , Z 可取值: $0, 1, 2, 3$

$$P(Z=0) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, P(Z=1) = \frac{C_{3,1}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(Z=2) = \frac{C_3^2}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad P(Z=3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

7. 一袋中装有号码“0”五个，号码“1”十个，今取两号码，将所得二数依大小次序（十位数 > 个位数）排成一两位数，求此两位数的分布。

解：设 Z 为此两位数， Z 可取值 00, 10, 11

$$P(Z=00) = P(\text{所取二数皆为0}) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{2}{21}$$

$$P(Z=10) = P(\text{所取二数一为0, 一为1}) = \frac{C_5^1 C_{10}^1}{C_{15}^2} \\ = \frac{10}{21}$$

$$P(Z=11) = P(\text{所取二数皆为1}) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{9}{21}$$

8. 已知 Z_1, Z_2 都是仅能取 0, 1 两值的随机变量，他们的分布相同。取值 0 的概率为 p ，取值 1 的概率为 $q = 1 - p$ ，且 Z_1, Z_2 独立。求 $Z_1 + Z_2$ 的分布

解： $Z_1 + Z_2$ 可能取值 0, 1, 2

$$P(Z_1 + Z_2 = 0) = P(Z_1 = 0, Z_2 = 0) = P(Z_1 = 0) P(Z_2 = 0) = p \cdot p = p^2$$

$$P(Z_1 + Z_2 = 1) = P\{(Z_1 = 0, Z_2 = 1) \text{ 或 } (Z_1 = 1, Z_2 = 0)\} \\ = P(Z_1 = 0, Z_2 = 1) + P(Z_1 = 1, Z_2 = 0) \\ = P(Z_1 = 0) P(Z_2 = 1) + P(Z_1 = 1) P(Z_2 = 0) \\ = p(1-p) + (1-p)p \\ = 2p(1-p)$$

$$P(Z_1 + Z_2 = 2) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(Z_1 = 1) P(Z_2 = 1) \\ = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$$

9. 已知 Z_1, Z_2 独立，同分布，都仅取非负整数值，他

取值 K 的概率为 $e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$, $K=0, 1, 2, \dots$. λ 是常数.

求证, $Z_1 + Z_2$ 的分布为: $P(Z_1 + Z_2 = K) = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^K}{K!}$.

$K=0, 1, 2, \dots$

解: $Z_1 + Z_2$ 可能取值 $0, 1, 2, \dots$

$$\therefore P(Z_1 + Z_2 = K) = P\left\{\bigcup_{l=0}^K (Z_1 = l, Z_2 = K-l)\right\} = \sum_{l=0}^K$$

$$P(Z_1 = l, Z_2 = K-l) = \sum_{l=0}^K e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(K-l)}}{(K-l)!} =$$

$$e^{-2\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} \sum_{l=0}^K \binom{K}{l}$$

$$= e^{-2\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} (1+1)^K = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^K}{K!}, \quad K=0, 1, 2, \dots$$

10. 掷二骰子, 求出现点数总和的分布.

解: 利用母函数, 现点数总和为 Z .

$$\frac{1}{36} (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = \frac{1}{36} (x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12})$$

$$\therefore P(Z=2) = \frac{1}{36}, P(Z=3) = \frac{2}{36}, P(Z=4) = \frac{3}{36}$$

$$P(Z=5) = \frac{4}{36}, P(Z=6) = \frac{5}{36}, P(Z=7) = \frac{6}{36}$$

$$P(Z=8) = \frac{5}{36}, P(Z=9) = \frac{4}{36}, P(Z=10) = \frac{3}{36}$$

$$P(Z=11) = \frac{2}{36}, P(Z=12) = \frac{1}{36}$$

11. 用 R, V, 语言描述试验——“从一袋装有三个白球, 二个黑球, 五个红球的袋中抽取一球”并求该随机变量的分布函数.

解 约定 $Z = \begin{cases} 1 & \text{所抽一球为白球} \\ 2 & \text{" " " " "黑"} \\ 3 & \text{" " " " "红"} \end{cases}$

$$\text{则 } P(Z=1) = \frac{3}{3+2+5} = \frac{3}{10}, P(Z=2) = \frac{2}{10}$$

$$P(Z=3) = \frac{5}{10}$$

12. 将第一章习题B中所述试验用R. V. 描述之, 并求其所涉及的R. V. 的分布.

解: 今从红色中取一张结果为 $Z = \begin{cases} 1, & \text{取得A} \\ 0, & \dots \text{非A} \end{cases}$

今从黑色中取一张结果为 $\eta = \begin{cases} 1, & \text{取得A} \\ 0, & \dots \text{非A} \end{cases}$

$$P(Z=1) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}, P(Z=0) = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

$$P(\eta=1) = \frac{1}{13}, P(\eta=0) = \frac{12}{13} \text{ 且 } Z \text{ 与 } \eta \text{ 独立}$$

$$\text{即 } P(Z=1, \eta=1) = \frac{1}{169}, P(Z=1, \eta=0) = \frac{12}{169}$$

$$P(Z=0, \eta=1) = \frac{12}{169}, P(Z=0, \eta=0) = \frac{144}{169}$$

13. 自分别标有1, 2, ..., N的N张卡片中取出n张, 依号码大小次序排成 $X_1 < X_2 < \dots < X_n$, 求其中第K个 X_K 的分布.

解: X_K 可取值 $K, K+1, \dots, N-n+K$

$$P\{X_K = l\} = \frac{C_{l-1}^{K-1} \cdot C_1^1 \cdot C_{N-l}^{n-K}}{C_N^n} = \frac{C_{l-1}^{K-1} C_{N-l}^{n-K}}{C_N^n}$$

$$l = K, K+1, \dots, N-n+K$$

14. 一电话机在 $t=0$ 受到一次呼唤后, 在时刻 t 以前没有第二次呼唤, 而在 t 至 $t+\Delta t$ 内受到一次呼唤的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, 求在 $(0, S)$ 这段时间内受到呼唤次数的分布.

解: 设在 $(0, S)$ 内受到 K 次呼唤的概率为 $P_K(S)$,

$$\text{则 } P_K(S+\Delta S) = P_K(S)\{1-\lambda\Delta S+o(\Delta S)\} + P_{K-1}(S)\{\lambda\Delta S+o(\Delta S)\} + o(\Delta S)^2 \quad (K \geq 1)$$

$$\frac{P_K(S+\Delta S) - P_K(S)}{\Delta S} = \lambda(P_{K-1}(S) - P_K(S)) + o(1),$$

$$(K \geq 1)$$

$$\text{当 } \Delta S \rightarrow 0 \text{ 有 } P'_K(S) = \lambda(P_{K-1}(S) - P_K(S)), \quad (K \geq 1) \quad (*)$$

$$\text{又 } K=0 \text{ 时有 } P'_0(S) = -\lambda P_0(S), \quad P_0(0) = 1.$$

$$\therefore P_0(S) = e^{-\lambda S} \quad \text{由 } (*), \text{ 得 } P_K(0) = 0, \text{ 得}$$

$$P_K(S) = e^{-\lambda S} \frac{(\lambda S)^K}{K!}, \quad K = 1, 2, \dots$$

15. 设细菌分裂繁殖时(分裂为二), 一个细菌在 Δt 一段时间内分裂的概率等于 $\alpha \Delta t + o(\Delta t)$, 并且与以前分裂次数及已有细菌个数无关, 试求如在时刻 0 有一个细菌, 则在时刻 t 细菌个数的分布.

解: 该时刻 t 有 K 个细菌分裂的概率为 $P_K(t)$

$$\text{则 } P_K(t+\Delta t) = P_K(t)[1-\alpha\Delta t+o(\Delta t)]^K + C_{K-1}^1 P_{K-1}(t)[1-\alpha\Delta t+o(\Delta t)]^{K-2} \times \{\alpha\Delta t+o(\Delta t)\} + o(\Delta t)^2, \\ K \geq 2$$

$$\frac{P_K(t+\Delta t) - P_K(t)}{\Delta t} = -K\alpha P_K(t) + (K-1)\alpha P_{K-1}(t) + o(1),$$

$$K \geq 2$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ 得: } P'_K(t) = -K\alpha P_K(t) + (K-1)\alpha P_{K-1}(t),$$

$$K \geq 2, (*)$$

$$\text{又 } P'_1(t) = -\alpha P_1(t), \quad P_1(0) = 1, \quad \therefore P_1(t) = e^{-\alpha t}$$

由 (*) 式, 即 $P_K(0) = 0, \quad (K \geq 2)$ 得:

$$P_K(t) = e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t})^{K-1}, \quad K = 2, 3, \dots$$

16. 从一副扑克中抽取6张. 造R. V. 描述此试验, 并求R. V. 的分布

解: 令 $Z_1 = \{6 \text{ 张黑桃数}\}$, $Z_2 = \{6 \text{ 张梅花数}\}$,
 $Z_3 = \{6 \text{ 张红桃数}\}$ 则 $6 - Z_1 - Z_2 - Z_3$ 为方块数.

(Z_1, Z_2, Z_3) 取值为 $0 \leq Z_1 \leq 6, 0 \leq Z_2 \leq 6,$
 $0 \leq Z_3 \leq 6, 0 \leq \sum_{k=1}^3 Z_k \leq 6$, 且仅取整数

$$P\{Z_1 = K, Z_2 = L, Z_3 = M\} = \frac{C_{13}^K C_{13}^L C_{13}^M C_{13}^{6-K-L-M}}{C_{52}^6}$$

$$0 \leq L + K + M \leq 6$$

$$0 \leq K, 0 \leq L, 0 \leq M \quad (\text{整数})$$

17. 车东生产轴承, 产品直径超过容许上限的概率为0.06, 超过容许下限的概率为0.02. 现生产100件产品, 问有 X_1, X_2 件分别超过容许上限和下限的概率是多少?

解: 100件中有 X_1 件超过上限, X_2 件超过下限,

$100 - X_1 - X_2$ 件适中.

超上限概率0.06, 超下限概率0.02, 适中概率 $1 - 0.06 - 0.02 = 0.92$ 故依多项分布, 100件中恰有 X_1 件超过上限, X_2 件超过下限的概率为:

$$\frac{100!}{X_1! X_2! (100 - X_1 - X_2)!} (0.06)^{X_1} (0.02)^{X_2} (0.92)^{100 - X_1 - X_2}$$

$$0 \leq X_1 + X_2 \leq 100, 0 \leq X_1 \leq 100, 0 \leq X_2 \leq 100 \quad \text{为整数}$$

18. 气象工作者将年降水量分为五级, 特多, 偏多, 正常, 偏少, 特少, 并从历史资料统计出各级出现的概率分别为 $1/8, 2/8, 3/8, 2/8, 1/8$ 试求100年中特多年数 X_1 , 偏多年数 X_2 , 偏少年数 X_3 , 特少年数 X_4 的概率分布.

解: 依多项分布100年中恰有 X_1 年特多, X_2 年偏多, X_3 年偏少, X_4 年特少的概率为: