

权威 实用 经典



2014 年

赠：全套习题详解

考研数学 高分复习全书(数学三)

主编 / 黄先开 曹显兵

- ✓ 一线名师授课底本，经典讲解全新奉上
- ✓ 全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然
- ✓ 总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘
- ✓ 归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣
- ✓ 每章配精编习题，有针对性地演练、温习



中国人民大学出版社

2014^年

考研数学

高分复习全书(数学三)

主 编/黄先开 曹显兵

副主编/胡立清 刘喜波

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2014 年考研数学高分复习全书. 数学三/黄先开, 曹显兵主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2013. 1

ISBN 978-7-300-16992-7

I. ①2… II. ①黄…②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 013886 号

2014 年考研数学高分复习全书 (数学三)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 胡立清 刘喜波

2014 Nian Kaoyan Shuxue Gaofen Fuxi Quanshu (Shuxue San)

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

规 格 185mm×260mm 16 开本

版 次 2013 年 1 月第 1 版

印 张 49.5

印 次 2013 年 1 月第 1 次印刷

字 数 1 145 000

定 价 68.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

前言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础,结合作者对历年考题、命题趋势的研究以及数学的内在规律倾心编写而成的,目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容,取得优异成绩,并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础,让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下:

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求,才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解,并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论(补充注释与重要结论)——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释,并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论,特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后,一见到此类问题,就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点,从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题,达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力,对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说,题目是无穷的,但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型,使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型,并逐一进行分析,给出了解题方法和规律。另外,借助于许多重要经典例题的评注,本书能够帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸,从而使读者能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与详细解答——选题最典型

要想真正掌握一门课程内容并通过相关考试,做一定数量的习题是必不可少的。为此,作者按照填空题、选择题和解答题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题,供读者模拟练习之用,希望读者尽可能独立地完成习题。

为满足考生需求,本书特别附赠全套习题详解,请考生持正版书到购书书店领取或登录中国1考网(www.1kao.com.cn)下载。

由于作者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

2012 年 12 月于北京

目 录

类型十一	定积分不等式的证明	177
类型十二	定积分的几何应用	177
类型十三	微分方程	180
习题精选四		183
习题精选四参考答案		185
第五章	多元函数微分学	186
知识要点精讲		186
类型一	多元函数的偏导数	186
类型二	多元函数的极值	186
类型三	多元函数的微分	186
类型四	多元函数的应用	186
类型五	多元函数的微分	186
类型六	多元函数的微分	186
类型七	多元函数的微分	186
类型八	多元函数的微分	186
类型九	多元函数的微分	186
类型十	多元函数的微分	186
习题精选一		186
习题精选一参考答案		186
第六章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选二		186
习题精选二参考答案		186
第七章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选三		186
习题精选三参考答案		186
第八章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选四		186
习题精选四参考答案		186
第九章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选五		186
习题精选五参考答案		186
第十章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选六		186
习题精选六参考答案		186
第十一章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选七		186
习题精选七参考答案		186
第十二章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选八		186
习题精选八参考答案		186
第十三章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选九		186
习题精选九参考答案		186
第十四章	微分方程	186
知识要点精讲		186
类型一	微分方程的定义	186
类型二	微分方程的解法	186
类型三	微分方程的应用	186
类型四	微分方程的解法	186
类型五	微分方程的解法	186
类型六	微分方程的解法	186
类型七	微分方程的解法	186
类型八	微分方程的解法	186
类型九	微分方程的解法	186
类型十	微分方程的解法	186
习题精选十		186
习题精选十参考答案		186

第三章 微分中值定理与导数的应用 75

§1 知识要点精讲 75

§2 典型题型与例题分析 84

题型一 证明存在 ξ , 使 $f(\xi) = 0$ 84题型二 证明存在 ξ , 使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 86题型三 证明存在 ξ , 使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots) = 0$ 88

题型四 直接用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明 91

题型五 双介值问题, 要证存在 ξ, η 使 $G(f'(\xi), f'(\eta), \dots) = 0$ 93题型六 证明存在 ξ , 使得 $f^{(n)}(\xi) = k(k \neq 0)$ 95

题型七 有关介值的不等式证明 97

题型八 隐含介值问题 98

题型九 不等式的证明 100

题型十 利用导数证明函数恒等式 111

题型十一 利用导数判别函数的单调性 112

题型十二 利用导数研究函数的极值与最值 113

题型十三 曲线的凹凸性与拐点 114

题型十四 求曲线的渐近线 115

题型十五 函数作图 116

题型十六 综合题 118

习题精选三 120

习题精选三参考答案 122

第四章 一元函数积分学 123

§1 知识要点精讲 123

§2 重要公式与结论 143

§3 典型题型与例题分析 144

题型一 计算不定积分 144

题型二 不定积分综合题 148

题型三 有关定积分的概念与性质的问题 152

题型四 利用基本方法(牛顿-莱布尼茨公式, 换元积分法, 分部积分法) 计算

定积分 155

题型五 对称区间上的积分 158

题型六 涉及变限积分的问题 160

题型七 定积分循环计算法 164

题型八 几类特殊积分问题 165

题型九 反常(广义) 积分的计算 168

题型十 定积分等式的证明 172

题型十一 定积分不等式的证明	174
题型十二 定积分的几何应用	177
题型十三 综合题	180
习题精选四	183
习题精选四参考答案	185
第五章 多元函数微分学	186
§1 知识要点精讲及主要公式与结论	186
§2 典型题型与例题分析	193
题型一 基本概念题	193
题型二 求复合函数的偏导数或全微分	196
题型三 求隐函数的偏导数或全微分	198
题型四 已知偏导数,反求函数关系	200
题型五 多元函数的极值和最值问题	202
题型六 综合题	206
习题精选五	207
习题精选五参考答案	209
第六章 二重积分	210
§1 知识要点精讲	210
§2 重要公式与结论	213
§3 典型题型与例题分析	214
题型一 考查二重积分的基本概念与性质	214
题型二 二重积分的基本计算方法	215
题型三 利用重积分的对称性简化计算	218
题型四 交换积分次序	220
题型五 分区域函数的二重积分	221
题型六 反常(广义)二重积分	222
题型七 综合题	223
习题精选六	224
习题精选六参考答案	226
第七章 无穷级数	227
§1 知识要点精讲	227
§2 重要公式与结论	234
§3 典型题型与例题分析	235
题型一 判定常数项级数的收敛性	235
题型二 求幂级数的收敛半径和收敛区间	237

题型三 求常数项级数的和及幂级数的和函数	239
题型四 幂级数的展开	240
题型五 综合题	242
习题精选七	243
习题精选七参考答案	245

第八章 常微分方程与差分方程 247

§1 知识要点精讲	247
§2 基本方法	253
§3 典型题型与例题分析	254
题型一 求解一阶线性微分方程	254
题型二 二阶常系数线性微分方程的求解	258
题型三 求解差分方程	261
题型四 微分方程与差分方程的应用	263
题型五 综合题	264
习题精选八	265
习题精选八参考答案	267

第九章 经济应用专题 269

§1 知识要点精讲	269
§2 重要公式与结论	270
§3 典型题型与例题分析	272
题型一 微分在经济上的应用	272
题型二 积分在经济上的应用	276
题型三 多元函数微分学在经济上的应用	278
题型四 微分方程、差分方程在经济上的应用	280
题型五 线性代数在经济上的应用	281
题型六 概率统计在经济上的应用	283

第二部分 线性代数

第一章 行列式 287

§1 知识要点精讲	287
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	291
§3 典型题型与例题分析	294
题型一 利用行列式的性质与行(列)展开定理计算行列式	294
题型二 按行(列)展开公式求代数余子式	295
题型三 利用多项式分解因式计算行列式	296

题型四 抽象行列式的计算或证明	297
题型五 n 阶行列式的计算	299
题型六 利用特征值计算行列式	304
题型七 综合题	305
习题精选一	307
习题精选一参考答案	309
第二章 矩阵	310
§1 知识要点精讲	310
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	319
§3 典型题型与例题分析	322
题型一 求数值型矩阵的逆矩阵	322
题型二 A 为抽象矩阵, 讨论 A 的可逆性	325
题型三 考查矩阵运算的特殊性	326
题型四 解矩阵方程	328
题型五 求方阵 A 的高次幂 A^n	331
题型六 利用伴随矩阵 A^* 进行计算或证明	332
题型七 有关初等矩阵的问题	334
题型八 求矩阵的秩	335
题型九 综合题	338
习题精选二	339
习题精选二参考答案	342
第三章 向量	344
§1 知识要点精讲	344
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	353
§3 典型题型与例题分析	355
题型一 判定向量组的线性相关性	355
题型二 把一个向量用一组向量线性表示	361
题型三 求向量组的秩	367
题型四 有关矩阵秩的命题	370
题型五 有关正交矩阵的命题	371
题型六 综合题	371
习题精选三	373
习题精选三参考答案	375
第四章 线性方程组	376
§1 知识要点精讲	376

§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	381
§3 典型题型与例题分析	383
题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)	383
题型二 含有参数的线性方程组的求解	385
题型三 抽象线性方程组求解	393
题型四 讨论两个方程组的公共解	395
题型五 讨论两个方程组解之间的关系	399
题型六 已知方程组的解,反求系数矩阵或系数矩阵中的参数	400
题型七 有关基础解系的讨论	402
题型八 有关 $AB = 0$ 的应用	405
题型九 综合题	406
习题精选四	413
习题精选四参考答案	416
第五章 特征值与特征向量	418
§1 知识要点精讲	418
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	424
§3 典型题型与例题分析	426
题型一 数值型矩阵特征值、特征向量的计算	426
题型二 计算抽象矩阵的特征值	428
题型三 特征值、特征向量的逆问题	432
题型四 矩形相似与对角化的讨论	436
题型五 有关实对称矩阵的命题	442
题型六 特征值、特征向量与相似矩阵的应用问题	444
题型七 有关特征值、特征向量的证明问题	449
题型八 综合题	451
习题精选五	456
习题精选五参考答案	459
第六章 二次型	461
§1 知识要点精讲	461
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	468
§3 典型题型与例题分析	469
题型一 基本概念题(二次型的矩阵、秩、正负惯性指数)	469
题型二 化二次型为标准形	470
题型三 有关正定二次型(正定矩阵)命题的证明	477
题型四 综合题	481
习题精选六	484

习题精选六参考答案	486
-----------------	-----

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	489
-------------------	-----

§1 知识要点精讲	489
§2 补充注释与重要结论	494
§3 典型题型与例题分析	497
题型一 事件的表示和运算	497
题型二 有关概率基本性质的命题	498
题型三 古典概型与几何概型的概率计算	501
题型四 事件独立性的命题	505
题型五 条件概率与积事件概率的计算	507
题型六 全概率公式和贝叶斯公式概型	511
题型七 伯努利试验	515
题型八 综合题	516
习题精选一	518
习题精选一参考答案	520

第二章 随机变量及其分布	521
--------------------	-----

§1 知识要点精讲	521
§2 补充注释与重要结论	524
§3 典型题型与例题分析	527
题型一 有关随机变量与分布的基本概念题	527
题型二 求随机变量的分布律与分布函数	531
题型三 已知事件发生的概率,反求事件中的未知参数	538
题型四 利用常见分布求相关事件的概率	539
题型五 求随机变量函数的分布	541
题型六 综合题	545
习题精选二	548
习题精选二参考答案	550

第三章 多维随机变量及其分布	551
----------------------	-----

§1 知识要点精讲	551
§2 补充注释与重要结论	556
§3 典型题型与例题分析	558
题型一 联合分布、边缘分布与条件分布的计算	558
题型二 已知部分分布律或边缘分布,求联合分布律或相关参数	566

题型三 利用已知分布求相关事件的概率	567
题型四 随机变量函数的分布	569
题型五 随机变量的独立性的讨论	577
题型六 综合题	578
习题精选三	579
习题精选三参考答案	581
第四章 随机变量的数字特征	584
§1 知识要点精讲	584
§2 补充注释与重要结论	587
§3 典型题型与例题分析	588
题型一 期望和方差的计算	588
题型二 随机变量函数的数学期望与方差	592
题型三 有关协方差、相关系数、独立性与相关性的命题	599
题型四 有关数字特征的应用题	604
题型五 综合题	607
习题精选四	609
习题精选四参考答案	611
第五章 大数定律和中心极限定理	612
§1 知识要点精讲	612
§2 典型题型与例题分析	614
题型一 有关切比雪夫不等式的命题	614
题型二 有关大数定律的命题	616
题型三 有关中心极限定理的命题	617
题型四 综合题	621
习题精选五	622
习题精选五参考答案	623
第六章 数理统计的基本概念	625
§1 知识要点精讲	625
§2 补充注释与重要结论	631
§3 典型题型与例题分析	632
题型一 求样本容量 n , 或与样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 有关的概率	632
题型二 求统计量的数字特征	633
题型三 求统计量的分布	636
习题精选六	638
习题精选六参考答案	639

第七章 参数估计	640
§1 知识要点精讲	640
§2 补充注释与重要结论	643
§3 典型题型与例题分析	644
题型一 求矩法估计和最大似然估计	644
* 题型二 估计量评选标准的讨论	651
* 题型三 参数的区间估计	655
* 题型四 综合题	657
习题精选七	658
习题精选七参考答案	660

第一部分 PART ONE

第一章 函数、极限与连续

微积分

知识要点精讲

表示法

变量(均在实数 $\mathbb{R}$ 内取值), D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 总有一个确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量, 通常用 $f(x)$ 称为函数 f 的值域. 表示法有: 公式法、表格法、图形法等.

中的两个要素:

(1) 表示 x 的取值范围, 由函数对应法则或实际问题的要求来确定.

(2) 表示给定 x 值, 求 y 值的方法.

的函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 才能说它们是相同的函数.

② 求定义域, 就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

一、有界性、单调性、周期性、奇偶性

在区间 I 上有定义, 如果存在正数 M , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$.

第一章 函数、极限与连续

§ 1 知识要点精讲

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

一 函数

1. 函数的概念及表示法

设 x 和 y 是两个变量(均在实数 $\mathbf{R}$ 内取值), D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则, 变量 y 总有一个确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量, 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域. 表示法有: 公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素:

- (1) 定义域 D : 它表示 x 的取值范围, 由函数对应法则或实际问题的要求来确定.
- (2) 对应法则 f : 它表示给定 x 值, 求 y 值的方法.

因此:

① 对于两个给定的函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 才能说它们是相同的函数, 否则它们就是不同的函数.

② 求函数 f 的定义域, 就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

2. 函数的性态 —— 有界性, 单调性, 周期性, 奇偶性

(I) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在正数 M , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$,