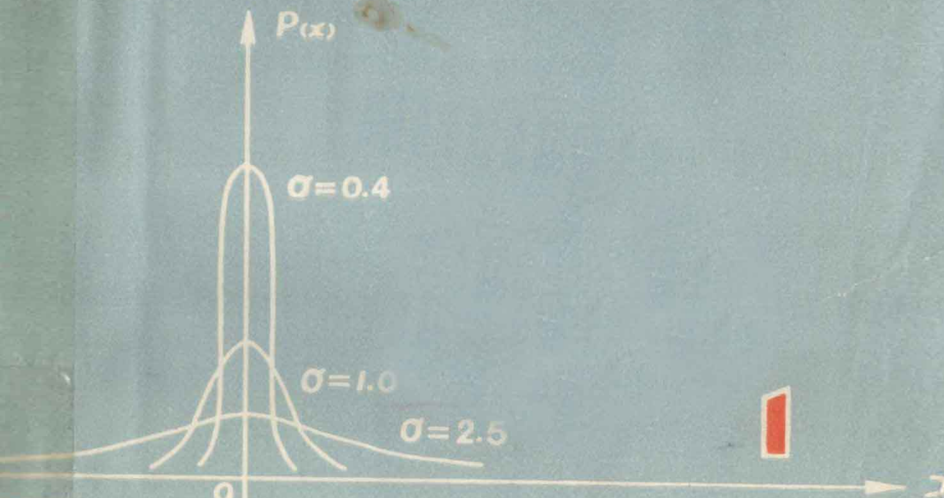
中学数学

参考资料



1

丽水师范专科学校

《参考资料》编写组编

中学数学

参考资料

（一）

丽水师范专科学校
《参考资料》编写组编

1979·浙江

前　　言

为了更好地贯彻执行党的教育方针，提高我地区中学数学教学质量，帮助青年教师掌握好中学数学新教材内容，我们准备编写一套《中学数学参考资料》。本册内容主要是介绍部编中学数学教学大纲（试行草案）规定新增内容（微积分除外）的有关知识。

在编写过程中，得到了兄弟院校和单位的热情帮助，丽水县印刷厂在印制方面也给我们以有力支持。在此，我们表示衷心感谢。第二章第五部分《统计初步》借用了我省师范协作教材有关章节内容，特此说明。

限于我们的水平，加之时间仓促，缺点和错误一定不少。恳请广大教师批评指正。

丽水师范专科学校
《参考资料》编写组

1979年1月8日

目　　录

第一章　集合基本知识

集合的概念是现代数学最基本的概念之一，很难找到哪一门现代数学分支是不需要集合的概念的。不但理论科学如此，而且不少应用科学和技术科学都离不开集合的概念。另外，中学数学中的某些内容，如不等式、函数、轨迹等，应用集合的知识来研究，有助于我们对它的加深理解和掌握。卫编新大纲指出："把集合、对应等思想渗透到教材中去，这样，有助于加深理解有关教材，同时也为进一步学习作准备。"

一、集合的基本概念

（一）集合及其元素

集合及其元素的概念在数学中往往作为不加定义的基本概念，因此我们只能给予描述。先看下百的一些例子。

例1　高二(1)班全体学生组成一个集合，元素就是这个班里每一个学生。

例2　一个教室里的所有课桌组成一个集合，元素就是这个教室里每一张课桌。

例3　电影院里所有座位组成一个集合。

例4　小于6的正整数的全体组成一个集合。

通过上百的例子，现在我们对集合及其元素可以作如下描述：

具有一定共同特征的一类事物的全体叫做集合，组成集合的

每一个个体叫做这个集合的元素。

例如上百例4中，这个集合里的“事物”是数，这类事物的共同特征是：它们都是小于6的正整数。

要注意，集合中的事物是确定的，即可以确定地判断一个事物是或者不是这个集合的元素。

例5 “中百公司里好看的花布”就不成为一个集合，因为拿出一种布来，没有确定的标准说它是“好看”还是“不好看”。

例6 “一个班级里数学优秀的学生”也不成为一个集合，因为在“优秀”与“不优秀”之间没有确定的界限。但是，如果这个班规定上学期学期成绩在90分以上为优秀，哪么“数学优秀的学生”就成了一个集合。

总之，集合的一个重要特点是：给出了一个个体，总可以确定这个个体是或者不是它的元素。

习惯上用大写字母A、B、C、M、N、…表示集合，用小写字母a、b、c、m、n、…表示集合的元素。

如果一个个体a是集合A的一个元素，就说a属于A，记作$a\in A$；如果b不是A的元素，就说b不属于A，记作$b\overline{\in}A$。

由上可知，任何元素，对于一个集合而言，或者属于这个集合，或者不属于这个集合。两者必居其一，但不可得兼。

（二）集合的表示法

通常，表示集合的方法有以下两种：

1. 列举法：就是把集合中的元素一一列举出来。如上百例4小于6的正整数集合，这个集合的元素为1、2、3、4、5。除了这五个元素外，再没有别的元素了。如果用A表示这个集合，可以写成

$$A=\{1,2,3,4,5\}.$$

也可以象图1那样，把所有元素用一条曲线包围成一个图形，以直观地表示这个集合。

2．描述法：就是用语言或某种记号描述出集合的元素的共同特征来表示这个集合。例如，可以把上述集合写成 $A=\{x \mid x\text{是小于6的正整数}\}$ 或者有时简单地写成 $A=\{\text{小于6的正整数}\}$

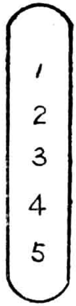


图 1

以上两种表示法本质上是不同的。比较这两种方法，可以看出，列举法的好处是可以具体看清集合的元素；描述法则刻划出了集合元素的共同特征。究竟采用哪一种表示方法，要根据具体问题来确定。比如，有无限多个元素的集合(如整数集合)一般不用列举法表示。例如方程 $x^2-5x+4=0$ 所有根作成一个集合，我们用B表示，写成

$$B=\{x \mid x^2-5x+4=0\}$$

在没有求出这个方程的根以前，只好这样表示。求出这个方程的根以后，B也可以用列举法表示，实际上

$$B=\{1,\ 4\}.$$

（三）集合间的包含关系

定义1．如果集合A的每一个元素都属于集合B，就把集合A叫做集合B的子集，记作 $A\subseteq B$（读作A被包含于B）或 $B\supseteq A$（读作B包含A)；特别地，如果A是B的子集，并且B中至少包含一个不属于A的元素，就把集合A叫做集合B的真子集，记作 $A\subset B$。

例1 设

$A=\{\text{高二(1)班男学生}\}$， $B=\{\text{高二(1)班学生}\}$，

则
$$A\subseteq B;$$

如果这个班至少有一个女学生，她不属于A，则A为B的真子集即
$$A\subset B.$$

例2 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$， $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，

则 $$A \subset B.$$

注意，记号“$\in$”表示元素与集合的从属关系，而记号“$\subseteq$”或“$\subset$”则表示集合之间的包含关系，在使用时不能混淆。

在某种特定环境中，有时会碰到没有某种事物的情况，例如，在实数范围内，方程 $x^2+1=0$ 没有实数根，那么，该方程的实数根的集合叫做什么呢？为了研究问题的需要，我们引进

定义 2．不包含任何元素的集合，叫做空集合，用$\varnothing$表示。

例 3 $\{x \mid x^2+1=0, x \in R\} = \varnothing$ （这里R为实数集）

例 4 平面上二条平行直线的交点的集合为空集$\varnothing$。

定理 1．空集被包含于任意集， 即 $\varnothing \subseteq A$.

证明：用反证法，如果 $\varnothing \not\subseteq A$ （表示$\varnothing$不被A包含），则在$\varnothing$中至少有一个元素 $a \bar{\in} A$。但因$\varnothing$是空集，不可能有这样的元素a，因此， $\varnothing \subseteq A$.

类似地还有：

定理 2．每个集合都包含在它自身之中，即 $A \subseteq A$.

证明：任取一个 $a \in A$（指左方的A），则 $a \in A$（指右方的A），所以 $A \subseteq A$。

定义 3．包括全部元素的集合,叫做完全集合,用 I 表示。

例 5 设 $$A = \{1, 2, 3\},$$
则A的子集包括

$\varnothing$、$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$.

这个例子中，完全集合 $I = \{1, 2, 3\}$， 它共包含 $2^3=8$ 个子集，其中有 $8-1=7$ 个真子集。

现在进一步讨论两个集合的相等。

定义 4．如果两个集合A与B满足 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，就说这两个集合是相等的，记作 $A = B$.

例6 设

$$A=\{1, 2, 3\},$$
$$B=\{1, 3, 2\},$$
$$C=\{1, 2, 3, 4\},$$
$$D=\{x \mid x\text{是小于4的正整数}\},$$

则 $A=B$， $A\neq C$， $A=D$。

关于包含关系还有下百性质：

定理3. 设 A，B，C都是集合，

若 $A\subseteq B$， $B\subseteq C$，

则 $A\subseteq C$。

证明：设 $x\in A$，由$A\subseteq B$，则 $x\in B$；再由$B\subseteq C$，又有 $x\in C$。根据定义1 $A\subseteq C$。

这个定理说明集合的包含关系具有传递性。

例7 {自然数}⊂{有理数}⊂{实数}，

{等边三角形}⊂{等腰三角形}⊂{三角形}，

{高二(1)男学生}⊆{高二(1)学生}⊂{高二学生}。

练 习 一

1. 以下哪些是集合，哪些不是？

(1) 丽水汽车运输公司所有的汽车；

(2) 高二(1)班所有共青团员；

(3) 高二(1)班所有高个子学生；

(4) 20以内的所有素数；

(5) 方程$3x^2-1=0$的一切实数根。

(6) 一切奇数。

2. 设已知下列各个集：

$A=\{x\mid x<10\}$，　　$B=\{x\mid x>3\}$，

$C=\{x\mid x$ 是一个字母$\}$，

$D=\{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5\}$，

试在空白中填上一个适当的元素：

(1)______$\in A$，______$\in D$；(2)______$\in A$，但$\bar{\in} D$；

(3)______$\in C$，同时$\in D$；　(4)______$\in A$同时$\in B$；

(5)______$\in B$但$\bar{\in} A$；　(6)______$\in B$但$\bar{\in} C$；

(7)______$\in A$同时$\in B$，但$\bar{\in} D$。

3．下列各集合之间是什么关系？

(1)｛无理数｝与｛无限不循环小数｝；

(2)｛矩形｝与｛正方形｝；

(3)｛小于5的素数｝与$\{x\mid x^2-5x+6=0\}$；

(4)｛单项式｝、｛整式｝、｛代数式｝；

(5)｛自然数｝、｛整数｝、｛有理数｝、｛实数｝、｛复数｝。

4．下列集合哪些是空集、哪些不是，为什么？

(1)　$\{P\mid P$是三角形，P之三内角之和为$190^0\}$；

(2)　$\{x\mid x$为实数且$x^2-2=0\}$；

(3)　$\{x\mid x$为有理数且$x^2-2=0\}$。

5．用适当的符号$\subseteq$、$\in$、$\bar{\in}$填充以下空白：

(1)　a ______｛所有字母｝；

(2)　$\{a\}$ ______｛所有字母｝；

(3)　高一(1)学生吴大海______｛高二(1)班学生｝；

(4)　｛高二(1)班共青团员｝______｛高二(1)班学生｝。

6．设$I=\{a, b, c, d\}$，试写出它的一切子集，共有几个？其中有几个是真子集？

二、集合的运算

在近代数学中，经常要将集合按照需要作各种各样的合并与分解，这就要进行集合的运算。

（一）并集

定义6．设A、B是两个集合，由属于集合A或属于集合B（或属于二者）的所有元素组成的集合C，叫做A与B的并集，记为 $C=A\cup B$， 或 $C=A+B$。

这个定义，可解释为两个集合的“相加”，就是把两个集合的元素“加”在一起，组成一个新的集合。如果某一元素出现在两个集合中，则在并集中只出现一次。

由定义6知 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{或} x\in B\}$.

为了直观地了解集合间的关系，可把它表示成一种专门的直观图，叫做韦恩图（图2）。矩形表示完全集合，矩形里面的圈表示子集合，图2上两个集合A和B表示成带阴影的圈，这时整个带阴影的部分表示并集 $A\cup B$.

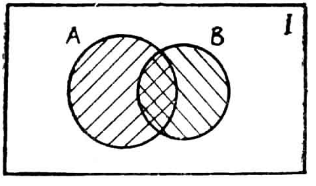


图 2

例1 设

$A=\{$高二（1）男生$\}$，$\{B=$高二（1）女生$\}$，

则 $A\cup B=\{$高二（1）学生$\}$.

例2 设

$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，

则 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 3 设

$A=\{$等腰三角形$\}$，$B=\{$直角三角形$\}$，

则 $A\cup B=\{$等腰的或直角的三角形$\}$。

（二）交集

定义7．设A、B是二个集合，由所有既属于集合A，又属于集合B的元素所组成的集合Q叫做A与B的交集，记作$Q=A\cap B$或$Q=A\cdot B$。

集合A与B的交集可理解为集合A与集合B的所有公共元素所组成的集合。

由定义7知 $A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$。

用韦恩图表示，图2中带双重阴影的部分就表示交集$A\cap B$。

例 4 设

$A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$，

$B=\{e, f, g, h, i\}$，

则 $A\cap B=\{e, f, g\}$。

例 5 设

$A=\{$直线L_1上的点$\}$，$B=\{$直线L_2上的点$\}$，

则 $A\cap B=\{$直线L_1与L_2的交点$\}$。

如果 L_1与L_2不相交， 则 $A\cap B=\varnothing$；

如果 L_1与L_2重合， 则 $A\cap B=A=B$。

定义8．完全集合I中，由不属于集合A的元素所组成的集合，叫做A的补集或余集，记作A'或$\overline{A}$。

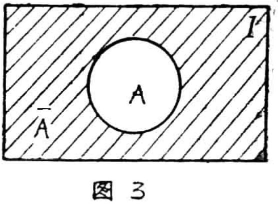


图 3

由定义8知

$A'=\{x\mid x\overline{\in}A\}$

若用矩形表示完全集合I，

则集合A的补集A′可用图3中的阴影部分表示。

例6 空集合的补集合是完全集合，完全集合的补集合是空集合，$\varnothing' = I$， $I' = \varnothing$.

例7 (1) 设 $I = \{$任意三角形$\}$，

如果 $A = \{$等腰三角形$\}$，

则 $A' = \{$不等腰三角形$\}$.

(2) 设 $I = \{$任意多边形$\}$，

如果 $A = \{$等腰三角形$\}$，

则 $A' = \{$三角形以外的多边形和不等腰三角形$\}$.

例8 设 $I = \{$自然数$\}$，

如果 $A = \{$偶数$\}$，

则 $A' = \{$奇数$\}$.

（四）集合的运算法则

集合的运算也有法则，但是，和数的运算法则不完全一样。下百我们给出集合的运算法则。

定理1. (1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

这和数的运算相似，叫做交换律。

定理2. (1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

这和数的运算相似，叫做结合律。

定理3. (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

这叫分配律。要注意，在集合运算里，分配法则不是一个而是以上两个。其中(2)在数的运算中，一般是不正确的。

定理4. (1) $A \cup \varnothing = A$ $A \cup I = I$

(2) $A \cap I = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

这叫$\varnothing$—I律。这里$\varnothing$和数0有相似的地方，I和数1也有点相似。但是，其中$A\cup I=I$在数的运算中是不正确的。这四个法则只要从空集与完全集合的意义去考虑，是很容易理解的。

定理5．(1)　$A\cup A'=I$　　　(2)　$A\cap A'=\varnothing$

这叫求补律。在数的运算中，找不到类似的法则。

定理6．(1)　$A\cup(A\cap B)=A$　(2)　$A\cap(A\cup B)=A$

这叫吸收律。在数的运算中，是没有的。

以上定理，都可以利用韦恩图来验证。

例如定理2(2)的正确性可用下百韦恩图来验证

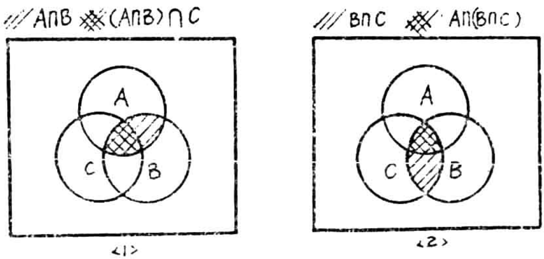


图　4

$\therefore\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

利用图5

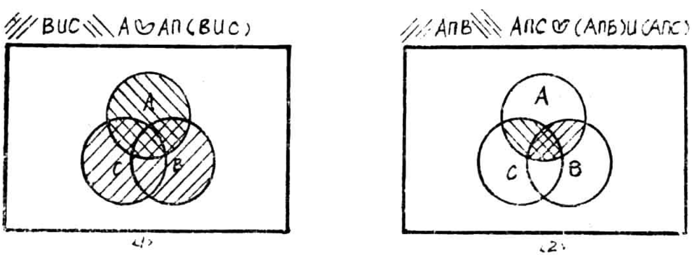


图　5

验证了定理3(1)

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

以上运算法则的严格证明都可以由并集、交集、补集的定义给出，作为例子，我们来证明定理3(1)

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

证明：　设

$$M_1=A\cap(B\cup C),$$

$$M_2=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

要证明$M_1=M_2$，只要证明$M_1\subseteq M_2$和$M_2\subseteq M_1$.

首先，设

$x\in M_1$，　即　$x\in A\cap(B\cup C)$，

则　$x\in A$.　且　$x\in(B\cup C)$.

由　$x\in(B\cup C)$，　知　$x\in B$或$x\in C$.

当$x\in B$时，由于$x\in A$，又有$x\in(A\cap B)$，当然必有

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

即　$x\in M_2$.

当$x\in C$时，由于$x\in A$，又有$x\in(A\cap C)$，当然必有

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

即　$x\in M_2$.

因此，由$x\in M_1$可以推得$x\in M_2$，就是说$M_1\subseteq M_2$.

其次，设

$$x\in M_2,$$

即　$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

则有　$x\in(A\cap B)$，　或　$x\in(A\cap C)$.

当　$x\in(A\cap B)$，　则　$x\in A$，　且　$x\in B$.

由　　$x \in B$，　　当然有　$x \in (B \cup C)$，

∴　$x \in A \cap (B \cup C)$，　即　$x \in M_1$。

当　$x \in (A \cap C)$，　则　$x \in A$，　且　$x \in C$，

由　$x \in C$，　　当然有　$x \in (B \cup C)$，

∴　$x \in A \cap (B \cup C)$，　即　$x \in M_1$。

这样，由$x \in M_2$又可推得$x \in M_1$，就是说$M_2 \subseteq M_1$。

由已得的两个关系式$M_1 \subseteq M_2$及$M_2 \subseteq M$，知$M_1 = M_2$。

或　$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)。$$

（证毕）

以上我们给出了集合的六组运算法则，利用这些运算法则就可以更方便地对集合进行运算。关于这方面内容这里不讨论了。

练　习　二

1.设　$A = \{$整数$\}$，　$B = \{$分数$\}$，　求$A \cup B$。

2.设　$C = \{$高二（1）班男学生$\}$，

　　$D = \{$高二（1）班团员$\}$，　求$C \cap D$。

3.以上二题中，

　(1)设　$I = \{$有理数$\}$，　求A'、B。

　(2)设　$I = \{$高二（1）班学生$\}$，　求C'、D。

4.试用韦恩图验证：

　(1)　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；

　(2)　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

5.设　$A = \{1,2,3,4\}$，

　　$B = \{2,4,6,8\}$，

　　$C = \{4,5,6,7\}$，

　求(1)　$(A \cup B) \cup C$，　$A \cup (B \cup C)$；