初中

新编

# 数学奥林匹克竞赛精典题解

上册

中外试题荟萃

名家分析指导

谭祖春 编著

# 初中数学
# 奥林匹克竞赛
# 精典题解

（上册）

谭祖春　编著

奥林匹克出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学奥林匹克竞赛精典题解/谭祖春编著.-北京:奥林匹克出版社,1998.8

Ⅰ.初… Ⅱ.谭… Ⅲ.数学课-初中-习题 Ⅳ.G633.605

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第19186号

**初中数学奥林匹克竞赛精典题解**

**(上册)**

谭祖春 编著

奥林匹克出版社出版发行

北京印刷三厂印刷 新华书店经销

1999年1月第2版 1999年1月第1次印刷

开本:787×1092毫米 1/32 印张:18.75

字数:420千字

ISBN 7-80067-368-5

G·258全两册定价:18.00元

# 前　　言

为了提高中学生数学爱好者分析和解决问题的能力，适应他们参加初中数学竞赛的要求，本书在编写时注意到了初中数学教学内容与初中数学竞赛大纲的衔接，以近几年来国内外初中数学竞赛试题为依据，以解题思想为主线，内容覆盖了国内外初中数学竞赛所涉及的基本知识及一些常见的解题方法与技巧，在取材上力求新颖，在选例上力求典型，在分析上力求透彻，在行文上力求浅显。编者力图通过数量有限的例题精讲，体现出相应某类问题的主要特征，使读者提高数学修养和解决实际问题的能力。

全书共分二十四讲，各讲既保持了相对的独立性，又注意了整体上的统一性，这样既便于辅导老师根据实际情况备课选用，又便于青少年数学爱好者在自学中自由选读。同时，在每讲之后都配备了相应的练习题，并在书末附有与初中数学竞赛有关的附录及练习题答案或者提示，便于读者自我练习。在题目的选择上，有一定的难度，起点为中考之难题，但避免

怪、生、涩等偏题，具有较强的实用性、针对性和科学性。编者祈望本书能成为初中数学爱好者、参加全国初中数学竞赛的选手以及广大中学数学教师的一本有益的参考书。

在编写此书的过程中，得到了东北师大附中数学组刘见闻老师(特级教师)、郭奕津、史亮老师(高级教师、数学组组长)等的悉心指点和帮助，在此表示衷心的感谢。鉴于时间和水平有限，本书疏漏或不足之处是不可避免的，恳请读者朋友批评指正。

编者

一九九九年一月

# 目　　录

## （上册）

# 第一讲　整数的分类

整数理论是数学学科的重要基础理论，其中的整数的分类既是数论的基础知识，也是研究问题的基本方法和出发点，它把无穷无尽的整数分成具有某种特性的、有限的几个类，这样便于对整数的有关问题进行讨论，因此是解决某些数学竞赛题的有效方法之一．本讲以整除性为主线讨论以下几种整数的分类．

## 一、利用奇数和偶数分类

整数按奇偶性分为两部分，其中能被 2 整除的整数称为偶数，通常表示成 $2k$ 的形式；不能被 2 整除的整数称为奇数，通常表示成 $2k\pm1$ 的形式，其中 $k$ 为整数．(以后凡是这样的 $k$ 都是整数．)关于奇数、偶数有如下一些简单而又重要的性质：

□奇数≠偶数；

□偶数±偶数＝偶数；奇数±奇数＝偶数；

偶数±奇数＝奇数；偶数×偶数＝偶数；

奇数×奇数＝奇数；偶数×奇数＝偶数．

□若干偶数的和、差、积仍是偶数；若干个奇数之积仍是奇数；奇数个奇数的和、差仍为奇数；偶数个奇数的和、差是偶数．

□相邻二整数之和为奇数；积为偶数．

□若干个整数之积为奇数⇔每个因子都为奇数；若干个整数之积为偶数⇔至少有一个因子为偶数．

□若 $a$、$b$ 为整数，则 $a$ 与 $|a|$，$a+b$ 与 $a-b$ 具有相同的奇偶性．

□$n$ 个偶数之积一定是 $2^n$ 的倍数．

□奇数的平方可表示为 $8k+1$ 的形式；偶数的平方可表示为 $8k$ 或 $8k+4$ 的形式．

只要我们灵活巧妙地运用这些性质，再加上正确地分析，就可以解决许多复杂的问题，这种方法就是奇偶分析．

1．判别奇偶性

**例 1**　有一列数：1，2，3，…，1997，从中去掉任意 71 个连续的自然数后，剩下的自然数的任意代数和是 奇数 (用“奇数”和“偶数”填空)．

$\boxed{\text{分析}}$ 显然 $1+2+3+\cdots+1997$ 为奇数．故本题的关键是判断去掉的 71 个数之和的奇偶性．而这 71 个连续自然数中既可能是 35(奇数)个奇数和 36(偶数)个偶数，还可能是 35(奇数)个偶数和 36(偶数)个奇数．弄清了这一点，问题就迎刃而解了．

**例 2**　设 $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，其中 $a$、$b$ 为相邻整数，$c=ab$，则 $m$ 是 奇 ．(要求同例 1)

$\boxed{\text{分析}}$ $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a-b)^2+2ab+a^2b^2}=\sqrt{(ab+1)^2}=|ab+1|$，由于 $a$、$b$ 为相邻整数，故 $ab$ 为偶数，$ab$

 $a^2b^2+2ab+1$　$bb+1$

$+1$ 为奇数，从而 $m$ 也为奇数．

**例 3**　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列（$n$ 是奇数），试证：$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 是偶数．

假设法

$\boxed{\text{分析}}$　假设 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 为奇数，则 $a_1-1$，$a_2-2,\cdots,a_n-n$ 都是奇数．由于 $n$ 是奇数，则 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)$ 是奇数，而

奇数　奇数

$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=(a_1,a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)=0$，为偶数，显然是矛盾的．

因此，$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 为偶数．

说明：

①本题采用了反证法，本题还可采用抽屉原则来证明．

②用奇偶性解题，常需从变化角度来考察问题．本题通过化积的奇偶性为和的奇偶性，降低了问题的难度．

2. 判别整除

**例 1**　有 $n$ 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们中每一个数均为 $+1$ 或 $-1$ 之一，若 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1=0$，试证：$4|n$.

证明：易知：$x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_nx_1$ 中任一数为 $+1$ 或 $-1$，由于它们的和为 0，故其中 $+1$ 与 $-1$ 的个数相等，设都为 $k$ 个，则 $n=2k$.

又 $\because x_1x_2\cdot x_2x_3\cdot\cdots\cdot x_nx_1=x_1^2x_2^2\cdot\cdots\cdot x_n^2=1=(-1)^k$

$\therefore k=2m$ 从而 $n=4m$ 即 $4|n$.

说明：本题抓住符号变化的次数，是证明 $k$ 为偶数的关键.

**例 2**　设 $a,b$ 为自然数，且 $123456789=(11111+a)$ 偶 $(11111-b)$ 奇 偶．试证：$a-b$ 是 4 的倍数．

证明：由已知得 $123456789=123454321+11111(a-b)-ab$，

即 $11111(a-b)=ab+2468=ab+4\times 617$

要证 $a-b$ 为 4 的倍数，只需证 $ab$ 为 4 的倍数．

由已知 123456789 为奇数，故 $11111+a$ 与 $11111+b$ 都为奇数，从而 $a$ 与 $b$ 都为偶数，$\therefore 2^2|ab$，即 $4|ab$，证毕．

3．判别方程的整数根

非奇 非偶

**例 1**　求证：方程 $x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+\cdots+P_{n-1}x+P_n=0$ 无整数根．（其中 $P_n$ 为奇数，$P_1+P_2+\cdots+P_n$ 为偶数．）

证明：设 $x_0$ 为原方程的整数根，则有

$x_0^n+P_1x_0^{n-1}+P_2x_0^{n-2}+\cdots+P_{n-1}x_0+P_n=0$.（※）

若 $x_0$ 为偶数，则（※）式左边前 $n$ 项之和为偶数，而 $P_n$ 为奇数，这与（※）式右边为 0（偶数）矛盾．故 $x_0$ 为奇数，则 $x_0^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为奇数．

易知 $P_1+P_2+\cdots+P_{n-1}$ 为奇数，故 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ 中有奇数个奇数，从而 $P_1x_0^{n-1},P_2x_0^{n-2},\cdots,P_{n-1}x^0$ 中也有奇数个奇数．故（※）式左边为奇数，这与（※）式右边为 0（偶数）矛盾，所以 $x_0$ 也不为奇数．

综上所述，原方程无整数根．

**例 2**　一个正整数，若加上 100 和 168，则分别得到两个完全平方数，求这个正整数．

解：设所求的正整数为 $x$，则依题意得

$$\begin{cases} x+100=m^2, \\ x+168=n^2. \end{cases} \Rightarrow n^2-m^2=68$$

即 $(n+m)(n-m)=68=1\times 68=2\times 34$（为偶数）

由于 $n+m$ 与 $n-m$ 有相同的奇偶性，且 $m+n>n-m$

$$\therefore \begin{cases} n+m=34, \\ n-m=2. \end{cases} \quad \text{解得 } n=18, m=16 \quad \text{从而 } x=156.$$

说明：

若 $(n+m)(n-m)$ 为偶数，则一定有 $4|(n+m)(n-m)$.

**例 3**　对给定的自然数 $a,b$，有方程 $a^2+b^2+x^2=y^2$，试证：若 $ab$ 是偶数，则原方程有自然数解；若 $ab$ 为奇数，则原方程无自然数解．

证明：(1)若 $ab$ 是偶数，则 $a,b$ 中至少有一个偶数．

当 $a$、$b$ 中一个为奇数，另一个为偶数时，$a^2+b^2$ 为奇数，不妨设 $a^2+b^2=2k+1$，则 $a^2+b^2+x^2=2k+1+x$，只要使 $x=k$，就有 $a^2+b^2+x^2=2k+1+k^2=(k+1)^2$，故此时 $x=k$，$y=k+1$．

当 $a$、$b$ 都为偶数时，$a^2+b^2$ 为 4 的倍数，不妨设 $a^2+b^2=4m+4$，则 $a^2+b^2+x^2=4m+4+x^2$，只要使 $x=m$，就有 $a^2+b^2+x^2=4m+4+m^2=(m+2)^2$，此时 $x=m$，$y=m+2$．

(2) 若 $ab$ 为奇数，则 $a$、$b$ 都为奇数，设 $a=2t+1$，$b=2s+1$，则 $a^2+b^2=4(t^2+t+s^2+s)+2=4n+2$，设有自然数 $x,y$，使得 $a^2+b^2+x^2=y^2$，则 $a^2+b^2=(y-x)(y+x)=4n+2$，由例 2 知，不存在这样的 $x,y$，使得上式成立，显然是矛盾的．

综上所述，原命题成立．

4. 判别其它问题

**例 1**　在一立方体的顶点标上 $+1$ 或 $-1$，面上标上一个数，它等于这个面上 4 个顶点处的数的乘积，问这样所标的 14 个数之和是否为 0？

**分析**　令这 14 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_{14}$ 之和为 $S$. 要 $S=0$，须有 7 个 $-1$ 和 7 个 $+1$. 考虑这 14 个数的积 $x_1,x_2,\cdots,x_{14}$，将每个面所标数写成 4 个顶点处的数之乘积，这样在 $x_1,x_2,\cdots,x_{14}$，每个顶点所标数将作为乘数出现 4 次，从而 $x_1,x_2,\cdots,x_{14}=1$，故 $x_1,x_2,\cdots,x_{14}$ 中 $-1$ 的个数为偶数个，故 $S\neq 0$.

**例 2**　在圆周上有 1995 个点，若在这些点把圆周分成的 1995 段小弧中，有 665 段长度为 1，有 665 段长度为 2，其

余段长为 3. 求证：在这 1995 个点中必可找到两个点，它们是这圆的一条直径上的二端点．

**分析** 设找不到这样的两点满足条件，则弧长为 1 的端点与圆心连线必过那弧长为 3 的弧的三等分点．而这直径把圆平分成长度为 1995 的两个半圆弧，把这个长为 3 的弧中的端点和三等分点之间仅有的长为 1 的弧切开，则长为 1995－1 的弧上如有 $n$ 条长为 1 的弧，就必有 $665-n$ 条长为 3 的弧在这同一半圆中，剩下的 $m$ 条长为 2 的弧．从而 $n+3(665-n)+2m=1995-1$，即 $2(n-m)=1$，左边为偶数，右边为奇数，显然矛盾．故原命题成立．

**例 3** $n(n\geqslant 3)$个学生围成一圈，依某一确定的方向编号为 $1,2,\cdots,n$. 老师按下述规则点名：若某一次叫到第 $i$ 号，则下一次就叫第 $i$ 号后面的第 $i$ 个学生．试证：不论第一次叫到哪一号，至少有一个学生永远叫不到．

**分析** 设第 $i$ 后被叫到的下一个是第 $j$ 号，则

$j=\begin{cases}2i\,(2i<n),\\ 2i-n\,(2i>n).\end{cases}$ 因此，若 $i=n$，则 $j=n$，即被叫到的永远是第 $n$ 号学生，其余 $n-1$ 个学生叫不到．

若 $i\neq n$，则分两种情况讨论：

①若 $n$ 为奇数，由 $i\neq n$，$2i\neq n$，有 $2i-n\neq n$，于是 $j\neq n$，即第二次叫到的非第 $n$ 号，依次类推，第 $n$ 号学生永远叫不到.

②若 $n$ 为偶数，则第二次叫到的第 $j$ 号是偶数，且以后叫到的都是偶数号，由于 $n\geqslant 3$，故不管第一次叫到哪一号，至少有一个奇数号学生永远叫不到．

**例 4** 将正方形 $ABCD$ 分割成 $n^2$ 个相等的小方格，把相对顶点 $A$、$C$ 染成红色，$B$、$D$ 染成蓝色，其他交点任意染成红、蓝中的一种，试证：恰有三点同色的小方格的数目必为偶

数．

证明：用数表示颜色，将红色记为0，蓝色记为1，再将小方格编号：1，2，3，…，$n^2$；又记第$i$个小方格四个顶点数字之和为$A_i$若恰有三个顶点同色，则$A_i=1$或3为奇数，否则$A_i$为偶数．

现观察和$A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$，有如下事实：

原正方形内部各点，各加了4次；原正方形边上非端点的点，各加了2次；原正方形四个顶点，各加了1次，故$A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}=4\times$（内部点对应数之和）$+2\times$（边上非端点各点对应数之和）$+2=$偶数．

因此，$A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$中必有偶数个奇数，证毕．

说明：本题采用了奇偶分析中的“0，1”法．另外，本题还可采用“+1，−1法”以及染色法．有兴趣的同学可以去试一试．

另外，利用奇、偶性还可解决“打电话问题”、“握手问题”、“写信问题”、“翻杯子问题”和“格点问题”等实际问题．

## 二、利用余数分类

对于任意两个整数$a$和$b(b\neq 0)$，必有唯一的整数$q$和唯一的非负整数$r$，使得

$$a=qb+r,(0\leqslant r<|b|)$$

由此可知，一个整数$a$被正整数$b$除，所得余数$r$只能是0，1，2，…，$b-1$中的一个．特别地，当$r=0$时，$a$可以被$b$整除．

对于固定的除数$b$，全体整数能且仅能分为$b$个不同的类：$bk$，$bk+1$，$bk+2$，…，$bk+(b-1)$．对任何一个整数，必定属于且仅属于其中的一类．

本部分侧重对整除及剩余类（即将全体整数分为 $b$ 类，把具有相同余数的整数归为一类，这样的类称为关于 $b$ 的剩余数）予以阐述．

1．整除

整除具有以下一些性质：

□$a|b,b|c\Rightarrow a|c$（$a,b,c$ 都为整数）．

□$a|b_i(i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow a|(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)$（$a,x_i$，$b_i$ 都是整数）．

□$ac|bc\Leftrightarrow a|b$（$a,b,c$ 都为整数）．

□$b|a,c|a$ 且 $(b,c)=1\Rightarrow bc|a$．

□$n$ 个连续自然数的乘积能被 $n!$ 整除，其中 $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$．

下面我们利用这些性质，将与整除有关的问题的解题方法作一简单归类．

（1）直接利用性质解题．

**例 1**　若 $n|(ma-b)$，$n|(mc-d)$，则 $n|(ad-bc)$．

证明：$n|(ma-b)\Rightarrow n|(ma-b)c$，$n|(mc-d)\Rightarrow n|(mc-d)a$

$\therefore n|[(ma-b)c-(mc-d)a]$，即 $n|(ad-bc)$．

**例 2**　若 $x$、$y$、$z$ 为整数，且 $11|(7x+2y-5z)$，证明 $11|(3x-7y+12z)$．

证明：因 $4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)=11(3x-2y+3z)$，

且 $11|(7x+2y-5z)$，故 $11|4(3x-7y+12z)$．

又因 $(4,11)=1$，故 $11|(3x-7y+12z)$．

（2）利用数的整除特征．

要熟练掌握一些自然数分别被 2，5，3，9，11，4，8，25，125 整除的特征（即判别方法）．

**例 1**　已知 $n=\overline{13xy45z}$，且 $792\mid n$. 试确定数码 $x$、$y$、$z$.

解：$792=8\times9\times11$，且 $(8,9,11)=1$.

$792\mid n\Rightarrow8\mid n,9\mid n,11\mid n$.

$8\mid n\Rightarrow8\mid\overline{45z}\Rightarrow z=6$；$9\mid n\Rightarrow9\mid(1+3+x+y+4+5+6)\Rightarrow9\mid(19+x+y)\Rightarrow x+y=8$ 或 $x+y=17$；

$11\mid n\Rightarrow11\mid[(1+x+4+6)-(3+y+5)]\Rightarrow11\mid[3+(x-y)]\Rightarrow x-y=8$ 或 $x-y=-3$.

经检验，只有 $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=8.\end{cases}$ 才有符合条件的解 $\begin{cases}x=8,\\y=0.\end{cases}$

$\therefore x=8,y=0,z=6$.

**例 2**　已知自然数 $n$ 不能被 5 整除，证明：$n^4-1$ 能被 5 整除.

证明：因 $5\nmid n$，故 $n$ 的个位数字不为 0 和 5.

若 $n$ 的个位数字为 1,3,7,9，则 $n^4$ 的个位数总是 1，故 $n^4-1$ 的末位数字为 0.

若 $n$ 的个位数字为 2,4,6,8，则 $n^4$ 的个位数字总是 6，故 $n^4-1$ 的末位数字为 5.

$\therefore n^4-1$ 总能被 5 整除.

(3) 利用因式分解.

**例 1**　设 $n$ 是奇数，证明：$16\mid(n^4+4n^2+11)$.

证明：令 $n=2k+1$，则 $n^4+4n^2+11=(n^2-1)(n^2+5)+16=8(k^2+k)(2k^2+2k+3)+16=8k(k+1)(2k^2+2k+3)+16$.

由于 $k(k+1)$ 是 2 的倍数，故 $16\mid8k(k+1)(2k^2+2k+3)$，证毕.

**例 2**　证明 $\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{22\cdots2}_{n个2}$ 是二相邻整数之积.