火箭弹散布计算

二〇三研究所六室一组 编著

国防工业出版社

火箭弹散布计算

二〇三研究所六室一组　编著

国防工业出版社

V413-2
2

内容提要

本书为新编制的火箭弹散布函数表，表前简要地说明了用此表计算火箭弹散布的方法。由于表中取值位数多，变量间隔小，因此，在工程计算时方便准确。

本书可供外弹道学工作者、火箭工程技术人员，以及大专院校有关专业师生使用参考。

火箭弹散布计算

二〇三研究所六室一组　编著

*

国防工业出版社　出版

国防工业出版社印刷厂印装　　内部发行

*

787×1092 1/16　印张15　插页2　820千字

1980年6月第一版　1980年6月第一次印刷　印数：0,001-1,000册

统一书号：N15034·1900　　定价：3.10元

前　　言

本书是《火箭弹散布和稳定性理论》(杨绍卿等编著）一书的配套书。

《火箭弹散布和稳定性理论》一书，较全面系统地论述了火箭弹散布的基本理论，给出了分析计算火箭弹散布的基本方法。为便于工程计算，本书依据这些基本理论，新编制了散布函数表，并简要地说明了表的用法。

本书主要适用于尾翼式旋转火箭弹（包括野战尾翼弹和尾翼涡轮弹）及涡轮式火箭弹的散布计算。对于航空火箭弹和反坦克火箭增程弹一般不需要查表，可直接进行计算。

参加本书编著工作的有：陈道灼、杨绍卿、朱坤保、马素珍、程湫玉、张迅、赵子华、董亮、姜雅琴和李奉昌同志。

在本书编著过程中，不少单位和个人给予很多帮助，在此向他们表示衷心感谢。

由于时间仓促，加之编者水平有限，缺点错误在所难免，希望使用者提出宝贵意见。

目　　录

§1 主要符号表

Φ	复摆动角，即理想弹道切线到弹轴间的夹角。
ψ	复偏角，指理想弹道切线到速度矢量间的夹角。
ψ^*	偏角的特征函数。
ψ_1	偏角的铅直分量。
ψ_2	偏角的横向分量，即速度矢量与射击面之间的夹角。
Δ	复攻角，指速度矢量到弹轴间的夹角。
θ	理想弹道倾角。
v	火箭弹几何中心的速度，即弹的速度。
v_0	火箭弹后定心部离轨时的速度，简称初速。
v_K	主动段终点速度。
a	火箭弹的平均推力加速度。
$\dot{\gamma}$	轴向角速度，简称转速。
m	火箭弹的质量。
A	火箭弹赤道转动惯量。
C	火箭弹极转动惯量。
c	弹道系数。
K	赤道转动惯量半径，$K=\sqrt{\dfrac{A}{m}}$。
k	极转动惯量半径，$k=\sqrt{\dfrac{C}{m}}$。
s_M	弹的最大横截面积。
l	弹长。
l_p	弹的喷喉中心至质心的距离。
d	弹径。
c_{x_0}	零阻力系数。
c_y'	升力系数对攻角的偏导数，$c_y'=\dfrac{\partial c_y}{\partial \delta}$。
m_z'	稳定力矩系数对攻角的偏导数，$m_z'=\dfrac{\partial m_z}{\partial \delta}$。
m_{zoh}'	赤道阻尼力矩系数对$\dfrac{l\dot{\varphi}}{v}$的偏导数，$m_{zoh}'=\dfrac{\partial m_{zoh}}{\partial\left(\dfrac{l\dot{\varphi}}{v}\right)}$。
ρ	空气密度。

$a_x=\dfrac{\rho s_M c_{x_0}}{2m}$。

$a_N=\dfrac{\rho s_M c_y'}{2m}$。

$a_m=\frac{\rho s_M l m_z'}{2A}$。

$a_D=\frac{\rho s_M l^2 m_{zch}'}{2A}$。

s　　有效弧长，$s=\frac{v^2}{2a}$。

s_0　　有效定向器长度，$s_0=\frac{v_0^2}{2a}$。

y　　相对弧长，$y=\frac{s}{\lambda}$。

λ　　攻角波长，尾翼弹为$\lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{a_m}}$；涡轮弹为$\lambda=\frac{2\pi A}{C\varkappa}\tau$。

$\varkappa$　　转速比 $\varkappa=\frac{\dot{\gamma}}{v}$。

$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{S}}}$。

S　　陀螺稳定因子 $S=\frac{C^2\varkappa^2}{4A^2a_m}$。

$c_N=1+2a_N\lambda y_0$。

$m_1=2\pi(\sqrt{S+1}+\sqrt{S})$。

$m_2=2\pi(\sqrt{S+1}-\sqrt{S})$。

$m_{\text{I}}=\pi(\tau+1)$。

$m_{\text{II}}=\pi(\tau-1)$。

$H_1=\varkappa\lambda-m_1$。

$H_2=\varkappa\lambda+m_2$。

$H_{\text{I}}=\varkappa\lambda-m_{\text{I}}$。

$H_{\text{II}}=\varkappa\lambda-m_{\text{II}}$。

$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_0$　　初始摆动角速度。

$\boldsymbol{\Phi}_0$　　初始摆动角。

$\boldsymbol{\Psi}_0$　　初始偏角。

$\boldsymbol{W}_\perp$　　垂直于理想弹道的风。

$\boldsymbol{h}_M$　　推力偏心矢量，亦称推力臂。

$\boldsymbol{h}_0$　　质量偏心矢量。

$\boldsymbol{\beta}_M$　　推力偏心角。

$\boldsymbol{\beta}_D$　　动不平衡角。

$\boldsymbol{\beta}_a$　　气动偏心角。

$\boldsymbol{\Psi}_{\dot{\Phi}_0}$　　由扰动因素$\dot{\Phi}_0$引起的偏角。如将脚标换为其它扰动因素，则表示相应的扰动因素所引起的偏角。

E_x　　表示随机变量x的中间偏差。

$E(\psi)$　　表示偏角在任一方向上投影的中间偏差，称为角散布。

X　　全射程。

§ 2　火箭弹的落点散布

实践证明，火箭弹的落点坐标作为平面上的二维随机变量，满足正态分布律。如果选择坐标轴与扩散主轴重合，则火箭弹落点坐标(x， z)有如下的分布律

$$f(x,z)=\frac{\rho^2}{\pi E_x\cdot E_z}e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{z^2}{E_z^2}\right)} \tag{2.1}$$

而 E_x、E_z 与均方差有如下关系

$$E_x=\rho\sqrt{2}\,\sigma_x \tag{2.2}$$

$$E_z=\rho\sqrt{2}\,\sigma_z \tag{2.3}$$

其中

$\rho\approx0.477$，为一常数；

E_x 为射程散布，即射程中间偏差；

E_z 为方向散布，即方向中间偏差。E_x、E_z 均与射程X有关，为此引入相对量 E_x/X、E_z/X 来描述散布。令

$$r_x=\frac{E_x}{X} \tag{2.4}$$

$$r_z=\frac{E_z}{X} \tag{2.5}$$

则 r_x、r_z 称为相对射程散布与相对方向散布，习惯上简称为射程散布与方向散布。

由于火箭弹的整个方向散布主要由主动段所引起，故火箭弹的方向散布和主动段末的方向角散布有如下关系

$$E_z=X\cdot\frac{E(\psi_{2K})}{\cos\theta_K} \tag{2.6}$$

或

$$r_z=\frac{E_z}{X}=\frac{E(\psi_{2K})}{\cos\theta_K} \tag{2.7}$$

式中　$E(\psi_{2K})$为主动段终点的方向角散布。

对于主动段不太长的火箭弹，可认为它的被动段飞行距离即为全射程X。这样，X近似为下面之函数：

$$X\approx f(c,v_K,\theta_K)$$

其中

c 为被动段的弹道系数；

θ_K 为主动段终点的弹道倾角。

射程中间偏差为

$$E_x=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2\cdot E_c^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v_K}\right)^2 E_{v_K}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta_K}\right)^2\cdot E_{\theta_K}^2} \tag{2.8}$$

式中　E_c、E_{v_K}、E_{θ_K} 分别表示 c 、v_K、θ_K 的中间偏差。

若不考虑弹道系数和速度的变化，则可得到倾角变化所引起的射程的中间偏差

$$E_x=\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_K}\right|\cdot E_{\theta_K} \tag{2.9}$$

由于主动段较短，故

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_K}\approx\frac{\partial f}{\partial \theta_0}$$

$$E_{\theta_K}\approx E(\psi_{1K})$$

于是

$$E_x=\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\right|\cdot E(\psi_{1K}) \tag{2.10}$$

这种情况下的射程散布为

$$\frac{E_x}{X}=\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\right|\cdot\frac{E(\psi_{1K})}{X} \tag{2.11}$$

式中 $\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\right|$ 称为射程对射角的修正系数。对于火箭弹的被动段，可将其视为普通炮弹，因而 $\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\right|$ 可由地面火炮外弹道表(下册)Q_{θ_0} 表查得。此时只须将 c、v_K、θ_K 视为 c、v_0、θ_0 即可，表中值为射角变化1分时的射程变化量；

$E(\psi_{1K})$为射程角散布。有关 $E(\psi_{1K})$的计算将在后面给出。

在小射角时，$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\right|$ 具有较大的值，因而角散布对射程散布起重要作用。可认为此时火箭弹的射程散布主要产生在主动段。但在最大射程角附近时，$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\right|$ 是很小的，故角散布对射程散布的影响较小。因此，一般不能认为射程散布完全产生于主动段。

§3 尾翼式旋转火箭弹的角散布

§3.1 初始扰动引起的角散布

一、初始摆动角速度$\dot{\Phi}_0$引起的角散布

从《火箭弹散布和稳定性理论》一书可知，由 $\dot{\Phi}_0$ 引起的偏角 $\Psi_{\dot{\Phi}_0}$ 为

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}=-\frac{i\dot{\Phi}_0}{4\pi\sqrt{S+1}}\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\int_{y_0}^{y}\frac{(1+2a_N\lambda y)e^{-\frac{\lambda}{2}(a_N+a_D)(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}\times\left[e^{im_1(y-y_0)}-e^{-im_2(y-y_0)}\right]dy \tag{3.1.1}$$

令

$$(1+2a_N\lambda y)e^{-\frac{\lambda}{2}(a_N+a_D)(y-y_0)}\approx 1+2a_N\lambda y_0=c_N$$

由此，(3.1.1)式变为

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}=-\frac{i\dot{\Phi}_0 c_N}{4\pi\sqrt{S+1}}\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\left[\int_{y_0}^{y}\frac{e^{im_1(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}dy-\int_{y_0}^{y}\frac{e^{-im_2(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}dy\right] \tag{3.1.2}$$

令 $u=\int_{y_0}^{y}\frac{e^{im(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}dy$，并做变量变换：

$$z=my$$

则

$$u=\sqrt{m}\int_{z_0}^{z}\frac{e^{i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz$$

而其共轭复数为

$$\overline{u}=\int_{y_0}^{y}\frac{e^{-im(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}dy=\sqrt{m}\int_{z_0}^{z}\frac{e^{-i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz$$

又令

$$D(z_0,z)=\int_{z_0}^{z}\frac{e^{i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz$$

$$\overline{D}(z_0,z)=\int_{z_0}^{z}\frac{e^{-i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz$$

$\overline{D}$ 为D的共轭复数。于是(3.1.2)式变为

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}=-\frac{ic_N\dot{\Phi}_0}{4\pi\sqrt{S+1}}\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\left[\sqrt{m_1}D(z_{10},z_1)-\sqrt{m_2}\overline{D}(z_{20},z_2)\right] \tag{3.1.3}$$

式中

$$z_{10}=m_1y_0,\qquad z_1=m_1y;$$

$$z_{20}=m_2y_0,\qquad z_2=m_2y。$$

这里，$D(z_0,z)$称为散布函数。显然它是二个实变元z_0、z的函数。现已将$D(z_0,z)$编成函数表，其实部以R示之，其虚部以I示之。

令 $\dot{\Phi}_0=1$，得偏角的特征函数

$$\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}=-\frac{ic_N}{4\pi\sqrt{S+1}}\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\left[\sqrt{m_1}D(z_{10},z_1)-\sqrt{m_2}\overline{D}(z_{20},z_2)\right] \tag{3.1.4}$$

若 $\dot{\Phi}_0$ 服从圆正态分布律，则有

$$E_{\dot{\varphi}_{01}}=E_{\dot{\varphi}_{02}}=E_{\dot{\varphi}_0}$$

而

$$E(\psi_1)=E(\psi_2)=E(\psi_{\dot{\varphi}_0})$$

所以角散布为

$$E(\psi_{\dot{\varphi}_0})=E_{\dot{\varphi}_0}\cdot|\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}| \tag{3.1.5}$$

其中 $|\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}|$ 表示 $\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}$ 的模。

(3.1.5)式就是我们所要求的由 $\dot{\Phi}_0$ 引起的方向与射程角散布公式。

二、初始摆动角Φ_0(或 Δ_0)引起的角散布

由 Φ_0 引起的偏角为

$$\Psi_{\Phi_0}=-\frac{im_1v_0\Phi_0}{\lambda}\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}+c_N\sqrt{z_{10}}\Phi_0D(z_{10},z_1) \tag{3.1.6}$$

其特征函数为

$$\psi^*_{\Phi_0}=-\frac{im_1v_0}{\lambda}\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}+c_N\sqrt{z_{10}}D(z_{10},z_1) \tag{3.1.7}$$

若 Φ_0 亦满足圆正态分布律，则有

$$E(\psi_1)=E(\psi_2)=E(\psi_{\varphi_0})$$

所以

$$E(\psi_{\varphi_0}) = E_{\varphi_0}\cdot|\Psi^*_{\Phi_0}| \tag{3.1.8}$$

三、初始偏角 Ψ_0 引起的角散布

Ψ_0 引起的偏角为

$$\Psi_{\Psi_0} = \Psi_0(1-\Psi^*_{\Phi_0}) \tag{3.1.9}$$

其特征函数为

$$\Psi^*_{\Psi_0} = 1-\Psi^*_{\Phi_0} \tag{3.1.10}$$

设 Ψ_0 满足圆正态分布律，则方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\Psi_0}) = E_{\Psi_0}\cdot|\Psi_{\Psi_0}| \tag{3.1.11}$$

§3.2 推力偏心引起的角散布

为了克服推力偏心的影响，应使火箭弹具有不太小的炮口转速$\dot{\gamma}_0$，并令 $\varkappa_0=\dfrac{\dot{\gamma}_0}{v_0}$，则当 $\varkappa_0\lambda$ 的量值$\sim 10^2$ 或大于 10^2 时，由推力偏心所引起的偏角可以简单地表示为

$$\Psi_{h_M} \approx -\frac{iah_M}{K^2\dot{\gamma}_0\left(1+\dfrac{m_2}{\varkappa\lambda}\right)}\Psi^{\cdot *}_{\Phi_0} \tag{3.2.1}$$

当 $\boldsymbol{h}_M=1$ 时，得偏角的特征函数

$$\Psi^*_{h_M} \approx -\frac{ia}{K^2\dot{\gamma}_0\left(1+\dfrac{m_2}{\varkappa\lambda}\right)}\Psi^{\cdot *}_{\Phi_0} \tag{3.2.2}$$

由于推力偏心满足圆正态分布律，则方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{h_M}) = E_{h_M}\cdot|\Psi^*_{h_M}| \tag{3.2.3}$$

在此需要指出两点：①计算时不论转速规律如何，均应将(3.2.2)式中的 $\varkappa$ 取为炮口处的值；②(3.2.3) 式中的 $E_{h_M}=E_{\beta_M}\cdot l_p$，$E_{\beta_M}$ 为推力偏心角的中间偏差，l_p 为喷喉中心至质心的距离。

§3.3 风引起的角散布

风所引起的偏角公式为

$$\Psi_{W_\perp} = \boldsymbol{W}_\perp\frac{\Psi^*_{\Phi_0}}{v_0} - \boldsymbol{W}_\perp\left(\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}\right) \tag{3.3.1}$$

其特征函数为

$$\Psi^*_{W_\perp} = \frac{\Psi^*_{\Phi_0}}{v_0} - \left(\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}\right) \tag{3.3.2}$$

注意，上面两式中之 v 均是考虑了阻力影响的速度。

由§3.1知

$$\Psi^*_{\Phi_0} = -\frac{im_1v_0}{\lambda}\Psi^{\cdot *}_{\Phi_0} + c_N\sqrt{z_{10}}D(z_{10},z_1)$$

将上式代入(3.3.2)式得

$$\Psi^*_{W_\perp} = -\frac{im_1}{\lambda}\Psi^{\cdot *}_{\Phi_0} + \frac{c_N\sqrt{z_{10}}}{v_0}D(z_{10},z_1) - \left(\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}\right) \tag{3.3.3}$$

在比较平坦的地形上，水平面内的随机风可认为满足圆正态分布律．这时角散布为

$$E(\psi_{W_1})=E_W\sqrt{\psi_{W_1}^{*2}\sin^2\theta+\psi_{W_2}^{*2}} \tag{3.3.4}$$

$$E(\psi_{W_2})=E_W\sqrt{\psi_{W_2}^{*2}\sin^2\theta+\psi_{W_1}^{*2}} \tag{3.3.5}$$

在(3.3.4)式与(3.3.5)式中，$E(\psi_{W_1})$为由风引起的射程散布，$E(\psi_{W_2})$为风所引起的方向散布，$\psi_{W_1}^*$、$\psi_{W_2}^*$分别表示$\Psi_{W_\perp}^*$的实部与虚部。由上两式可知，$E(\psi_{W_1})\neq E(\psi_{W_2})$。这与初始扰动、推力偏心的情况不同，在计算散布时务必注意。另外，计算特征函数$\Psi_{W_\perp}^*$时，用公式(3.3.2)与用公式(3.3.3)是一样的，应视方便而定。

§3.4 气动偏心引起的角散布

由气动偏心引起的偏角为

$$\Psi_{\beta_a}\approx\frac{i(4\pi^2+i\varkappa\lambda^2a_N)}{H_2}\beta_a\sqrt{\frac{2a}{\lambda}}\left(\sqrt{y_0}+\frac{i}{2H_2\sqrt{y_0}}\right)\Psi_{\dot\Phi_0}^* \tag{3.4.1}$$

特征函数为

$$\Psi_{\beta_a}^*\approx\frac{i(4\pi^2+i\varkappa\lambda^2a_N)}{H_2}\sqrt{\frac{2a}{\lambda}}\left(\sqrt{y_0}+\frac{i}{2H_2\sqrt{y_0}}\right)\Psi_{\dot\Phi_0}^* \tag{3.4.2}$$

因为气动偏心β_a亦满足圆正态分布律，因此由β_a引起的方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\beta_a})=E_{\beta_a}\cdot|\Psi_{\beta_a}^*| \tag{3.4.3}$$

§3.5 动不平衡引起的角散布

由动不平衡引起的偏角为

$$\Psi_{\beta_D}\approx\frac{i\left(1-\frac{k^2}{K^2}\right)\dot\gamma_0}{1+\frac{m_2}{\varkappa\lambda}}\beta_D\cdot\Psi_{\dot\Phi_0}^* \tag{3.5.1}$$

偏角的特征函数

$$\Psi_{\beta_D}^*=\frac{i\left(1-\frac{k^2}{K^2}\right)\dot\gamma_0}{1+\frac{m_2}{\varkappa\lambda}}\Psi_{\dot\Phi_0}^* \tag{3.5.2}$$

由于β_D满足圆正态分布律，则方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\beta_D})=E_{\beta_D}\cdot|\Psi_{\beta_D}^*| \tag{3.5.3}$$

§3.6 质量偏心引起的角散布

对于不旋转的尾翼弹，质量偏心产生的角散布可化为推力偏心的影响，即此时如果推力偏心是相对于质心而言的话，则推力偏心产生的散布实际上已经包括了质量偏心的影响。但对于旋转尾翼弹而言，情况就较为复杂些。这时，质量偏心可化为推力偏心、气动偏心和初始偏角三者同时存在的情况。

由《火箭弹散布和稳定性理论》一书可知，由质量偏心所引起的偏角为

$$\Psi_{h_0}\approx-h_0(\Psi_{h_M}^*-i\varkappa\Psi_{\Psi_0}^*) \tag{3.6.1}$$

偏角的特征函数为

$$\Psi_{h_0}^*=-\Psi_{h_M}^*+i\varkappa\Psi_{\Psi_0}^* \tag{3.6.2}$$

由于质量偏心 h_0 满足圆正态分布律，所以方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{h_0})=E_{h_0}\cdot|\Psi^*_{h_0}| \tag{3.6.3}$$

§3.7 火箭弹总的角散布公式

依线性方程的理论，火箭弹由诸扰动因素所引起的总偏角由下式表示

$$\Psi_\Sigma=\Psi_{\dot\Phi_0}+\Psi_{\Phi_0}+\Psi_{\Psi_0}+\Psi_{h_M}+\Psi_{W_\perp}+\Psi_{\beta_a}+\Psi_{\beta_D}+\Psi_{h_0} \tag{3.7.1}$$

并假定诸扰动因素为互不相关的随机量，则火箭弹总的角散布为：

（a）总的射程角散布

$$E(\psi_{\Sigma_1})=\sqrt{E^2(\psi_{\dot\varphi_0})+E^2(\psi_{\varphi_0})+E^2(\psi_{\psi_0})+E^2(\psi_{h_M})+E^2(\psi_{W_1})+E^2(\psi_{\beta_a})+E^2(\psi_{\beta_D})+E^2(\psi_{h_0})} \tag{3.7.2}$$

（b）总的方向角散布

$$E(\psi_{\Sigma_2})=\sqrt{E^2(\psi_{\dot\varphi_0})+E^2(\psi_{\varphi_0})+E^2(\psi_{\varphi_0})+E^2(\psi_{h_M})+E^2(\psi_{W_2})+E^2(\psi_{\beta_a})+E^2(\psi_{\beta_D})+E^2(\psi_{h_0})} \tag{3.7.3}$$

本书中所有计算均采用工程单位制，即把力、长度、时间作为基本单位，其余都为导出单位。而力的单位是公斤，长度单位是米，时间单位是秒。为书写方便，书中一般将单位予以省略。

这里还应指出，计算尾翼式火箭弹的散布时，整个主动段的转速比 $\varkappa$ 均可取为炮口处的值 $\varkappa_0$。关于这一点，请参阅《火箭弹散布和稳定性理论》一书。

§4 涡轮式火箭弹的角散布

§4.1 初始扰动引起的角散布

一、初始摆动角速度 $\dot\Phi_0$ 引起的角散布

由 $\dot\Phi_0$ 所引起的偏角为

$$\Psi_{\dot\Phi_0}=-\frac{i}{2\pi}\dot\Phi_0\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\int_{y_0}^{y}\frac{(1+2a_N\lambda y)e^{-\frac{\lambda}{2}(a_N+a_D)(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}\left[e^{im_{\mathrm{I}}(y-y_0)}-e^{im_{\mathrm{I}}(y-y_0)}\right]dy \tag{4.1.1}$$

考虑到升力与阻尼力矩对涡轮弹偏角的影响是非常小的，完全可以忽略不计，故同上节一样，令

$$(1+2a_N\lambda y)e^{-\frac{\lambda}{2}(a_N+a_D)(y-y_0)}\approx 1+2a_N\lambda y_0=c_N$$

则

$$\Psi_{\dot\Phi_0}=-\frac{ic_N}{2\pi}\dot\Phi_0\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\int_{y_0}^{y}\frac{e^{im_{\mathrm{I}}(y-y_0)}-e^{im_{\mathrm{I}}(y-y_0)}}{2y\sqrt{y}}dy \tag{4.1.2}$$

式中　$\lambda=\dfrac{2\pi A}{C\varkappa}\tau$　为涡轮弹的攻角波长；

$\tau=\dfrac{1}{\sqrt{1-1/S}}$；

$S=\dfrac{C^2\varkappa^2}{4A^2a_m}$　为涡轮弹陀螺稳定因子；

$y=\dfrac{s}{\lambda}$ 为相对弧长；

$m_{\mathrm{I}}=\pi(\tau+1)$；

$m=\pi(\tau-1)$。

其余符号均与前面尾翼弹的相同。

令

$$my=z$$

$$D(z_0,z)=\int_{z_0}^{z}\frac{e^{i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz$$

则(4.1.2)式变为

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}=-\frac{ic_N}{2\pi}\dot{\Phi}_0\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\left[\sqrt{m_{\mathrm{I}}}D(z_{\mathrm{I}0},z_{\mathrm{I}})-\sqrt{m}D(z_{\mathrm{II}0},z_{\mathrm{II}})\right] \tag{4.1.3}$$

其中

$$z_{\mathrm{I}0}=m_{\mathrm{I}}y_0,\qquad z_{\mathrm{I}}=m_{\mathrm{I}}y;$$
$$z_{\mathrm{II}0}=m\,y_0,\qquad z_{\mathrm{II}}=m\,y。$$

偏角的特征函数为

$$\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}=-\frac{ic_N}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\left[\sqrt{m_{\mathrm{I}}}D(z_{\mathrm{I}0},z_{\mathrm{I}})-\sqrt{m}D(z_{\mathrm{II}0},z_{\mathrm{II}})\right] \tag{4.1.4}$$

与尾翼弹一样，$\dot{\Phi}_0$ 也服从圆正态分布律，所以其方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\dot{\Phi}_0})=E_{\dot{\Phi}_0}\cdot|\Psi^*_{\dot{\Phi}_0}| \tag{4.1.5}$$

二、初始摆角 Φ_0 引起的角散布

由 Φ_0 引起的偏角为

$$\Psi_{\Phi_0}=-\frac{c_N\Phi_0}{2\pi}\left[m_{\mathrm{II}}\sqrt{z_{\mathrm{I}0}}D(z_{\mathrm{I}0},z_{\mathrm{I}})-m_{\mathrm{I}}\sqrt{z_{\mathrm{II}0}}D(z_{\mathrm{II}0},z_{\mathrm{II}})\right] \tag{4.1.6}$$

其特征函数为

$$\Psi^*_{\Phi_0}=-\frac{c_N}{2\pi}\left[m_{\mathrm{II}}\sqrt{z_{\mathrm{I}0}}D(z_{\mathrm{I}0},z_{\mathrm{I}})-m_{\mathrm{I}}\sqrt{z_{\mathrm{II}0}}D(z_{\mathrm{II}0},z_{\mathrm{II}})\right] \tag{4.1.7}$$

由于 Φ_0 亦服从圆正态分布律，所以方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\varphi_0})=E_{\varphi_0}\cdot|\Psi^*_{\Phi_0}| \tag{4.1.8}$$

三、初始偏角 Ψ_0 引起的角散布

由 Ψ_0 引起的偏角为

$$\Psi_{\Psi_0}=\Psi_0(1-\Psi^*_{\Phi_0}) \tag{4.1.9}$$

其特征函数为

$$\Psi^*_{\Psi_0}=1-\Psi^*_{\Phi_0} \tag{4.1.10}$$

Ψ_0 服从圆正态分布律，故方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\Psi_0})=E_{\Psi_0}\cdot|\Psi^*_{\Psi_0}| \tag{4.1.11}$$

§4.2 推力偏心引起的角散布

推力偏心 $\boldsymbol{h}_{\mathrm{M}}$ 引起的偏角为

$$\Psi_{h_{\mathrm{M}}}\approx-\frac{ia\boldsymbol{h}_{\mathrm{M}}}{K^2\dot{\gamma}_0}\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} \tag{4.2.1}$$

其特征函数为

$$\Psi^*_{h_M} = -\frac{ia}{K^2\dot{\gamma}_0}\cdot\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} \tag{4.2.2}$$

推力偏心 $\boldsymbol{h}_M$ 服从圆正态分布律，于是由其引起的方向和射程角散布均为

$$E(\psi_{h_M}) = E_{h_M}\cdot|\Psi^*_{h_M}| \tag{4.2.3}$$

§4.3 风引起的角散布

与尾翼弹一样，涡轮弹由垂直风 $\boldsymbol{W}_\perp$ 引起的偏角为

$$\Psi_{W_\perp} = \frac{\boldsymbol{W}_\perp}{v_0}\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} - \boldsymbol{W}_\perp\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) \tag{4.3.1}$$

偏角的特征函数为

$$\Psi^*_{W_\perp} = \frac{1}{v_0}\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} - \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) \tag{4.3.2}$$

同样，上两式中之 v 均是考虑了阻力的影响的。

由于

$$\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} = -\frac{c_N}{2\pi}\left[m_{\mathrm{II}}\sqrt{z_{\mathrm{I}0}}D(z_{\mathrm{I}0}, z_{\mathrm{I}}) - m_{\mathrm{I}}\sqrt{z_{\mathrm{II}0}}D(z_{\mathrm{II}0}, z_{\mathrm{II}})\right]$$

所以偏角的特征函数又可表示为

$$\Psi^*_{W_\perp} = \frac{-c_N}{2\pi v_0}\left[m_{\mathrm{II}}\sqrt{z_{\mathrm{I}0}}D(z_{\mathrm{I}0}, z_{\mathrm{I}}) - m_{\mathrm{I}}\sqrt{z_{\mathrm{II}0}}D(z_{\mathrm{II}0}, z_{\mathrm{II}})\right] - \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) \tag{4.3.3}$$

公式（4.3.2）与（4.3.3）相同，使用时视方便而定。

在平坦地形上，水平面内的随机风可认为满足圆正态分布律，这时角散布为

$$E(\psi_{W_1}) = E_W\cdot\sqrt{\psi^{*2}_{W_1}\sin^2\theta + \psi^{*2}_{W_2}} \tag{4.3.4}$$

$$E(\psi_{W_2}) = E_W\cdot\sqrt{\psi^{*}_{W_2}\sin^2\theta + \psi^{*2}_{W_1}} \tag{4.3.5}$$

式中　$E(\psi_{W_1})$ 为射程角散布；$E(\psi_{W_2})$ 为方向角散布。

§4.4 动不平衡引起的角散布

由《火箭弹散布和稳定性理论》一书可得动不平衡 β_D 引起的偏角为

$$\Psi_{\beta_D} \approx i\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)\dot{\gamma}_0\beta_D\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} \tag{4.4.1}$$

其特征函数为

$$\Psi^*_{\beta_D} = i\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)\dot{\gamma}_0\cdot\Psi^*_{\dot{\Phi}_0} \tag{4.4.2}$$

由于 β_D 亦满足圆正态分布律，所以方向与射程角散布均为

$$E(\psi_{\beta_D}) = E_{\beta_D}\cdot|\Psi^*_{\beta_D}| \tag{4.4.3}$$

§4.5 质量偏心引起的角散布

与尾翼弹一样，由质量偏心 $\boldsymbol{h}_0$ 引起的偏角为

$$\Psi_{h_0} = -\boldsymbol{h}_0(\Psi^*_{h_M} - i\varkappa\Psi^*_{\Psi_0}) \tag{4.5.1}$$

偏角的特征函数为

$$\Psi^*_{h_0} = -\Psi^*_{h_M} + i\varkappa\Psi^*_{\Psi_0} \tag{4.5.2}$$

质偏 $\boldsymbol{h}_0$ 满足圆正态分布律，所以方向和射程角散布均为

$$E(\psi_{h_0}) = E_{h_0}\cdot|\Psi^*_{h_0}| \tag{4.5.3}$$

§5 火箭弹散布函数与D表

§5.1 概　要

由前几节知，旋转火箭弹（包括尾翼式旋转火箭弹和涡轮式火箭弹）的散布均用到了D函数，为此我们编制了火箭弹散布函数D表（简称D表）。利用本表可以计算旋转火箭弹的散布，使用方便，结果准确。

D表是用火箭弹散布函数

$$D(z_0, z)=\int_{z_0}^{z}\frac{e^{i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz$$

经过电子计算机的计算得来的。

D表用z_0、z两个实变元为头标，其实部以R示之，其虚部以I示之。

z_0、z的取值范围及间隔如下表所示。

变　元	范　围	间　隔
z_0 (0.001～40)	0.001～0.01	0.001
	0.01～0.03	0.005
	0.03～1	0.01
	1～4.9	0.05
	4.9～10	0.1
	10～40	1
z (0.25～100)	0.25～2	0.05
	2～20	0.1
	20～50	0.5
	50～100	1

若需求D（z_0, z）时，首先计算出z_0、z的值，然后查D表可得，但由于z_0、z不一定是头标值，故一般均需用直线内插法求取，其方法简单介绍如下。

z_0 \ z	z_1	$\boxed{z}$	z_2
z_{01}	R_{11}	R_1	R_{12}
$\boxed{z_0}$		$\boxed{R}$	
z_{02}	R_{21}	R_2	R_{22}

我们需求的是z_0、z对应的R，但在D表中只能查得R_{11}、R_{12}、R_{21}、R_{22}，其中z_{01}、z_{02}为z_0的两个相邻的头标值，并且$z_{01}<z_0<z_{02}$；同样z_1、z_2为z的两个相邻的头标值，并有$z_1<z<z_2$，故有公式

$$R_1=R_{11}+\frac{R_{12}-R_{11}}{z_2-z_1}(z-z_1)$$

$$R_2=R_{21}+\frac{R_{22}-R_{21}}{z_2-z_1}(z-z_1)$$

$$R=R_1+\frac{R_2-R_1}{z_{02}-z_{01}}(z_0-z_{01})$$

具体计算过程见§6〔例1〕。

函数$\overline{D}(z_0, z)$是$D(z_0, z)$的共轭复数，即若

$$D(z_0, z) = \mathrm{R} + i\mathrm{I}$$

则

$$\overline{D}(z_0, z) = \mathrm{R} - i\mathrm{I}$$

因此，为求得$\overline{D}(z_0, z)$，只需先查得$D(z_0, z)$，然后将其I冠以负号即成。

§5.2　$D(z_0, z)$与$\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z)$、$\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z)$的关系

因为

$$D(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} \frac{e^{i(z-z_0)}}{2z\sqrt{z}}dz = \int_{z_0}^{z} \frac{\cos(z-z_0)}{2z\sqrt{z}}dz + i\int_{z_0}^{z} \frac{\sin(z-z_0)}{2z\sqrt{z}}dz$$

而已知函数

$$\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z) = 1 - \sqrt{z_0}\int_{z_0}^{z} \frac{\cos(z-z_0)}{2z\sqrt{z}}dz$$

初始扰动函数

$$\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{z} \frac{\sin(z-z_0)}{2z\sqrt{z}}dz$$

所以

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\cos(z-z_0)}{2z\sqrt{z}}dz = \frac{1-\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z)}{\sqrt{z_0}}$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\sin(z-z_0)}{2z\sqrt{z}}dz = \sqrt{2\pi}\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z)$$

于是

$$D(z_0, z) = \frac{1-\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z)}{\sqrt{z_0}} + i\sqrt{2\pi}\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z)$$

上式即是我们所要求的$D(z_0, z)$与$\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z)$、$\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z)$的关系式。由此，我们又可从$D(z_0, z)$反求得$\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z)$和$\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z)$

$$\hat{\psi}^*_{\dot{\psi}_0}(z_0, z) = 1 - \sqrt{z_0}\,\mathrm{R}$$

$$\mathrm{R}_{\dot{\varphi}_0}(z_0, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{I}$$

§6　角散布计算举例

〔例1〕　计算某尾翼式火箭弹由各扰动因素所引起的主动段终点的方向角散布及落点的方向散布。

已知：$d=0.18$,　$l=2.7$,　$l_p=1.0$,
$m=13.78$,　$\mathrm{A}=7$,　$\mathrm{C}=0.07$,
$v_0=50$,　$v_K=600$,　$a=500$,
$m'_z=2$,　$c'_y=10$,　$c_{x_0}=0.2$,
$\rho=0.125$,　$\dot{\gamma}_0=50$(弧度/秒),　$\theta_K=45°$。

并取：$E_{\dot{\varphi}_0}=0.05$,　$E_{\varphi_0}=0.7\times10^{-3}$,　$E_{\psi_0}=0.35\times10^{-3}$,
$E_W=0.7$,　$E_{\beta_M}=1.5\times10^{-3}$,　$E_{\beta_a}=1.75\times10^{-3}$,
$E_{h_0}=0.1\times10^{-3}$,　$E_{\beta_D}=0.3\times10^{-3}$。