# 数学解题教学论

## ——数学思维教学新探

滕发祥　编著

四川教育出版社

# 数学解题教学论

## ——数学思维教学新探

滕发祥　编著

四川教育出版社
一九九二年·成都

（川）新登字005号

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵
技术设计：路 客

# 数学解题教学论

## ——数学思维教学新探

滕发祥 编著

四川教育出版社出版发行 （成都盐道街三号）
四川省新华书店经销 都江堰市印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张5 插页2 字数100千
1992年3月第一版 1992年3月第一次印刷
印数：1—2000 册

ISBN7—5408—1659—7/G·1615定价：1.75元

# 序

“解题教学——美国当前数学教学的新动向”，这是1987年上海国际教育讨论会上美国J.P.贝克教授的交流论文。苏联现代数学教育家A.A.斯托利亚尔在他的《数学教育学》中也指出：“怎样教学生解问题？显然，这是最复杂的教学问题之一。”本书探讨这一复杂的教学问题，提出了数学教学论的一个分支——数学解题教学论。

现代数学教育理论的特点，在于力求控制教学过程，以促进学生思维的发展。本书从这一基本观点出发，运用目标管理科学，结合我国中学数学教学实际，探索如何把解题教学放到数学教学的中心地位，从而把整个教学过程控制成一个不断地发现问题、解决问题的创造性思维过程，以克服“题海战术”等传统教学形式忽视思维发展的弊病。

第一章数学解题教学新探，在《数学通报》1988年第6期上发表，是全书的总论，它依据解题教学在数学教学中的地位和作用，提出了一种符合现代数学教育理论的数学教学新系统。根据这个新系统，可以将数学教学转换为解题教学来进行，使数学教学目标借助于解题教学目标管理来实现。因此，本书探讨的“解题教学”，不仅是“怎样教学生解题”，而且还是数学教学的一种新形式。

本书是重庆市科研项目“数学解题教学”的成果总结。参加本项目工作的还有渝州教育学院孙泽平老师。

本书仅仅是对数学解题教学的初步探索，加之水平所限，错误和片面性难免，期待从事数学教育工作的同行指正。

感谢西南师范大学陈重穆教授的指导，陈先生在百忙中详细审阅了初稿的主要部分并批注了具体的修改建议。

本书可供中学数学教师、教研人员、高师院校数学专业师生参考，也可作为教育学院中学数学教师继续教育的培训材料。

滕发祥

1990.11

# 目　录

# 第一章　数学解题教学新探

阅读提要：本章是全书的总论。根据解题教学在数学中的地位和作用，提出了一种符合现代数学教育理论的数学教学新系统。根据这个新系统，数学教学可以转换为解题教学来进行，数学教学目标也可以借助于解题教学目标管理来实现。

## §1.1　解题教学的地位和作用

### 一、数学教学的基本目标

数学教学是一个复杂过程，其基本目标是：使学生掌握必要的数学理论知识，形成一定的数学技能、技巧，发展学生的思维，特别是数学思维（数学思维经常表现出所谓数学能力）。

在数学教学改革的大量课题中，如何发展学生的思维是一个十分重要的课题。传统教学认为，数学是思维活动的结果，数学教学主要是数学理论知识的教学和数学技能、技巧的培养。因此，只要把基本目标的前两条实现了，发展学生的思维便会在教学中自然地实现。区别于传统教学，现代数学教育理论认为，数学是思维活动的过程，数学教学主要是思维活动的教学，数学知识只是进行思维训练的结构材料。因此，现代数学教育理论的特点，在于力求控制教学过程，

以促进学生思维的发展。著名控制论学者〔苏〕A.A.费里鲍姆指出：在教学过程中，积累知识起着不小作用，但决非是决定性的作用。一个人可能会忘记不少具体的事实，而他的思维水平曾是在这些事实的基础上发展完善的。但是，如果他的思维水平是高的，那么他便能解决一些极为复杂的问题，这就意味着他的文化程度已达到高水平（即思维水平）。

## 二、解题教学的地位和作用

数学教学中，我们把通过解题的形式来实现某种教学目标的教学活动称为解题教学。因为解题在建立和发展数学知识结构，形成和增进思维能力，培养和造就创造性精神等方面都起着其他形式不可取代的作用。所以，解题教学不仅能实现数学教学的基本目标，而且对学生今后在现代化建设中，从事实践活动有着良好影响。要培养具有现代人素质的、适应新时代要求的智能型人才，就必须使学生在数学知识、数学思维、数学素质（包括兴趣、态度、意志等非智力因素）等方面得到充分的发展，以促进良好品格结构的形成。

学生在解一些按照教学目标精心安排的题目的时候，他们不仅在独立地掌握数学知识内容，同时也在创造性地发展思维能力。这些能力表现为：善于运用某种方法、手段而改变问题情境；善于构思新的手段和解题方法；善于区分和积累可能有益的资料；善于在原有题目的基础上构出新的题目；善于自我测验以及对解题进行讨论等等。

例 有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件、乙7件、丙1件，共需3.15元；若购甲4件、乙10件、丙1件，共需

4.20元。现购甲、乙、丙各1件共需多少元？

思考：设购甲、乙、丙各1件分别需$x$、$y$、$z$元，根据题意得

$$\begin{cases}3x+7y+z=3.15, \\ 4x+10y+z=4.20。\end{cases}$$

这是一个不定方程组，要单独求出$x$、$y$、$z$的值是不容易的。

若学生明确题目要求的是$(x+y+z)$的值，而无需单独求出$x$、$y$、$z$的值，就不难发现方程组中两个方程的左边通过适当变形就可化为

$$\begin{cases}2(x+3y)+(x+y+z)=3.15, \\ 3(x+3y)+(x+y+z)=4.20。\end{cases}$$

把$x+3y$、$x+y+z$看成两个新的未知数，则原方程组便转化成了关于新的未知数的二元一次方程组。这就容易解得$x+y+z=1.05$。即购甲、乙、丙各1件共需1.05元。

教学中，如果能够引导学生经历上述的思维过程，那么学生不仅是在掌握数学知识，而且也在获得思维的独创性。

学生的思维发展与他们学习过程中的思维方法的形成是密切相关的，这些思维方法（分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等）同样也是科学工作的特定方法，这些方法在解题过程中特别明显、突出。所以，数学解题教学，最能影响学生思维的发展。

为了促进学生思维的发展，就必须让解题教学在数学教学中占据中心地位，并以此来决定教学的方式和方法。实际上，现代兴起的“启发式教学法”、“问题教学法”、“研究

法”、“发现法”、“程序教学法”等先进教学方法，无不反映了解题教学在数学教学中的中心地位。著名的数学教育家G·波利亚指出：“掌握数学意味着什么呢？这就是说善于解题。不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题。”现代数学教育学认为：假如把任何练习题和有待证明或研究的命题都列入“题”之列，假如把建立所研究的数学概念的各种性质以及从中选择出能说明性质的例子都称作是“题”，也就是说，更加广义地理解“题”这个术语，那么“掌握数学就意味着解题”。

因此，必须重视解题教学的目标管理，把解题教学控制成让学生独立地、创造性地掌握数学内容①、发展思维能力的过程。

当前，中学数学教学中背离解题教学目标管理的主要倾向是“题海战术”。

“题海战术”是在片面追求升学率的过程中应运而生的。因为升学考试主要是解题，所以就产生了以“题型＋方法”的解题教学形式——题海战术。

“题海战术”以解题为目的，片面追求多种题型，把题型与解题方法对号，什么样的题就用什么样的方法解。为此，教师就在题海中进行大量的示范讲解，学生就在题海中进行反复的对号练习。这种教学形式缺乏对解题过程思维活动的教学，严重地禁固了学生思维的发展。

题型是解题的模式，教师的示范是解题教学的重要方

①数学内容是指数学理论知识及其在发生、应用、发展过程中所反映的数学思想、方法和技能、技巧。

面。适当地利用题型进行示范讲解，可以提高学生的模式识别能力，积累解题经验，提高学生的解题能力。但是，“题海战术”认为给学生概括的题型越新越好，模式越具体越好，讲解越细越好，练习越多越好。使学生处于疲于识别题型、死套模式、机械练习这种比较低级的学习形式之中。学生缺乏在教师启发下独立探索新问题的实践，也难以掌握探索数学问题的方法。一旦要他独立解决不熟悉的问题时，便会感到束手无策。

“题海战术”为了讲解各式各样题型的解法，展示各种解题的技能、技巧，加大学生的练习量，就常常草率从事，提前结束新课。将解题教学游离于整个数学教学过程之外，这样作，实际上是削弱了“双基”教学。

当然，中学数学教学中也还存在另外一种背离解题教学目标管理的倾向，就是以加强“双基”为目的，削弱习题教学，贬低解题教学在知识发生过程中的作用。

显然，以上两种倾向都是将掌握数学内容与发展思维能力对立起来，忽视了知识应用与知识发生过程的统一性。

事实上，知识的应用过程与发生过程并不能截然分开。特别是知识体系高度系统化的数学中，旧知识应用的过程正是新知识孕育、发生的过程。从数学思维的观点来看，数学理论知识的教学与习题的教学并无本质的差异。它们都是发现问题、解决问题的过程，都遵循着共同的规律。而且在很多场合下，发现问题总是解决问题的基础，而解决问题的过程本身也是由发现问题的系列组成的。

基于以上认识，我们认为，理论知识教学与习题教学都是解题教学的组成都分，前者是核心与基础，后者是延伸与

发展。为了实现解题教学的目标管理，应当把整个数学教学过程控制成一个不断地发现问题、解决问题的创造性思维过程。

### 三、数学教学的新系统

根据数学教学的基本目标与解题教学的地位和作用，在数学教学中，如果教师能够先将理论知识教学与习题教学都确定出具体的教学目标(确定教学目标)；再分析实现教学目标的思维过程，并将其思维过程转换成一些对学生来说是有趣的、有待探索的数学问题系列(创设问题情境)。那么，数学教学目标，就可以借助于解题教学目标管理来加以实现。

由此，可以建立一种符合现代数学教育理论的数学教学新系统（图1－1）：

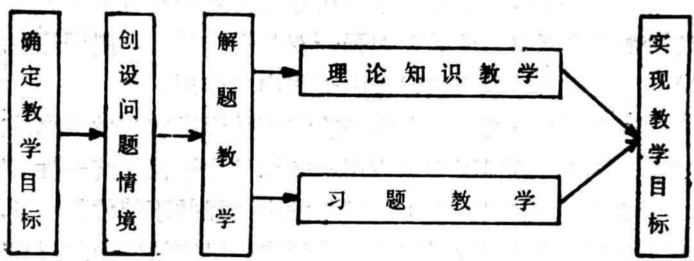


图1－1

根据这个新系统，数学教学就可以转换为解题教学来进行。

## §1.2 解题教学的目标管理

根据数学教学新系统，数学教学目标，可以通过创设问

题情境，借助于解题教学目标管理来加以实现。而解题教学目标管理，又是通过理论知识教学过程和习题教学过程的控制来实现的。因此，实现解题教学目标管理，就是要将理论知识教学过程和习题教学过程控制成一个不断发现问题、解决问题的创造性活动系列。

## 一、理论知识教学过程的控制

数学理论知识，即数学概念、定理、公式、法则等，这些都是典型的数学问题，是数学知识体系的主干与核心。在数学理论知识的建立过程中，使用了具有代表性的数学思想、方法和技能、技巧，而这些数学思想、方法和技能、技巧，正是数学思维的结晶，是有生命力的数学知识。因此，从本质上来说，数学理论知识的教学，是数学解题教学的重要组成部分，是解题教学的核心与基础。因而，在教学过程中，不应停留在介绍这些数学活动的成果上，而应充分揭示这些数学问题被发现、被解决的思维过程。

下面以等比数列为例，来说明如何创设问题情境，将理论知识的教学控制成不断发现问题、解决问题的创造性思维的活动过程。

### 1．提出问题——解决问题

等比数列是怎样定义的？如何求等比数列的通项公式？

（1）概念的引入与定义的理解

用实例引入等比数列的概念——给出概念的定义——按定义验证与构造等比数列。

从以上的教学过程发现，公比$q$反映了等比数列的本质属性。

（2）公比公式与通项公式

抓住等比数列的本质属性，发现等比数列的通项公式。

由公比的定义

$$q=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_n}{q\,a_{n-2}}=\frac{a_n}{q^2a_{n-3}}=\cdots=\frac{a_n}{q^{n-2}a_1},$$

可得

$$q=\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{1}$$

$$a_n=a_1q^{n-1}, \tag{2}$$

若$a_r$与$a_k$是等比数列的任意两项，怎样求公比$q$？

类比公式（1），容易发现并推出如下公式：

$$q=\left(\frac{a_k}{a_r}\right)^{\frac{1}{k-r}}, \tag{3}$$

从而

$$a_k=a_rq^{k-r}。 \tag{4}$$

显然，（1）、（2）分别是（3）、（4）当$r=1$时的特殊情形。用公式（3）、（4）解某些习题可以带来方便。

例如，课本上有这样的习题：在等比数列中，$a_5=4$，$a_7=6$，求$a_9$。

本题的常规解法是，应用公式（1）、（2）组成方程组，先求出$a_1$和$q$，解答自然显得繁琐。如果应用公式(3)、（4），可以直接解答：

$$a_9=a_7q^{9-7}=a_7\left[\left(\frac{a_7}{a_5}\right)^{\frac{1}{7-5}}\right]^{9-7}=6\times\frac{6}{4}=9。$$

在这个“提出问题——解决问题”的过程中看到：解决问题的过程，就是抓住问题的本质属性，对问题进行分析、转换或变通的发现过程。因此，我们说解决问题的能力就是发现新问题的能力。在数学解题教学中，不是要学生掌握寻出答案的固定招式，而是要培养发现问题的能力。

2．再提出问题——解决问题

如何求等比数列的前$n$项的和$S_n$？

（1）求和方法的探求

由公式$q$的定义：$q=\dfrac{a_k}{a_{k-1}}$，（$k=2$，$3\cdots$，$n$），有

$$a_k-qa_{k-1}=0。$$

由此，发现等比数列的第$k$项与第$k-1$项的$q$倍的差等于常数零($k=2$，$3$，$\cdots$，$n$)，所以用“$q$倍错项相减”法，可以消去$n-1$个项，将求$n$项之和转化为求两项之和。

（2）求和公式的推导

$$s_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1},$$

$$qs_n=a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}+a_1q^n。$$

两式相减，得

$$(1-q)s_n=a_1-a_1q^n,$$

$$s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\quad(q\neq 1)\qquad(5)$$

（3）发现能力的进一步训练

在等比数列中，已知$n$、$q$和任意一项$a_r$，怎样求$s_n$？

由于　$a_1=a_rq^{1-r}$，

代入公式（5），得

$$s_n = \frac{a_r q^{1-r}(1-q^n)}{1-q}。 \quad (6)$$

显然，公式（6）比公式（5）更具有一般性。

3．小　结

（1）在以上活动中，你发现了什么？知识上的发现有：

① 等比数列的定义；

② 公比公式；

③ 通项公式；

④ 前$n$项和的公式。

数学思想、方法和技能、技巧上的发现有：

① 公比$q$反映了等比数列的本质属性；

② 数学探求要抓住数学对象的本质属性；

③ 类比推理是导致数学发现的一种方法；

④ “$q$倍错项相减”是等比数列求和的有效转换方法；

⑤ 将研究对象的某些元素一般化，可能发现更一般的数学结论。

（2）从思维训练的角度看，发现问题、解决问题的过程，就是创造性思维的发展过程。

## 二、习题教学过程的控制

从知识体系的建立过程来看，例题、习题的教学不仅是理论知识的巩固和深化，而且是它的补充和延伸。从思维训练的角度来看，完成习题的过程，不仅是简单的知识应用过程，而且是创造性的发展过程。因此，应该把习题教学过程

控制成让学生进行独立的、创造性的思维活动过程，使它成为理论知识教学的补充和延伸。

基于这种要求，在学习等比数列的基本知识的基础上，除了对学生进行课本上的基本例题、习题（主要是巩固知识和应用知识）的教学外，还应加强习题的教学，对学生进行发现问题、解决问题的创造性思维训练。例如，下面的习题教学就可以这样控制。

题 1　求数列

$$a,\ aa,\ aaa,\ \cdots \tag{1}$$

的通项公式与前$n$项和的公式，其中$a$为大于零小于 10 的整数。

（1）求通项公式

观察数列（1）的规律，发现 $a_1=a$，$a_2=10a_1+a$，$\cdots$，$a_n=10a_{n-1}+a$，具体写出一些项：

$$a_1=a,$$

$$a_2=10a_1+a=10a+a,$$

$$a_3=10a_2+a=10^2a+10a+a,$$

$$a_4=10a_3+a=10^3a+10^2a+10a+a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

猜想：$a_n=10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+a$，

即 $$a_n=\frac{a}{9}(10^n-1)。\tag{2}$$

学生容易用数学归纳法证明猜想的正确性。

故公式（2）是数列（1）的通项公式。

思考题 1：你能否用其他方法求出$a_n$？