微积分

主 编 杨 丽◎

$$F(u,v,y)=\int_v^u f(x,y)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p).$$

北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

微　积　分

主　编　杨　丽
副主编　曲子芳　王洪芹　于咏梅　王国辉
　　　　李海玲
编　委　姜　新　衣淑玉　马玉妮　牟志凤
　　　　宁　剑

北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书共7章，内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及其应用、常微分方程、多元函数微积分和无穷级数。本书由浅入深，循序渐进，以“联系实际、深化概念、加强计算、注重应用、适度论证、重视创新、提高素质”为特色。书中各节均有习题，各章还有复习题，全书配有习题答案。通过本书的学习，不仅可以掌握微积分的基本概念和基本理论，还可以培育理性思维品格和思辨能力，开发潜在能动性和创造力，从而提高数学素养。

本书既可作为应用型本科院校理工类、经济管理类大学生的微积分教材，也可作为成人教育及自学考试的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分/杨丽主编．—北京：北京交通大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-5121-1766-2

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①杨…　Ⅲ．①微积分-高等学校-教材　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第317681号

策划编辑：刘建明　郝建芳　　责任编辑：郝建芳　李运文　　特邀编辑：吕　宏
出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414
地　　址：北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京时代华都印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　　印张：15.5　　字数：347千字
版　　次：2014年1月第1版　　2014年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5121-1766-2/O·128
印　　数：1～2 200册　　定价：31.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　　言

本书以“联系实际、深化概念、加强计算、注重应用、适度论证、重视创新、提高素质”为特色，深入浅出，难点分散，论证简明，系统完整，易于教，便于学。归纳起来，本书有以下特色。

(1) 定位准确，针对性强。以本科数学的培养目标为依据，以适用、够用、好用为指导思想，在体现教学思想为主的前提下删繁就简，深入浅出，做到既注重高等数学的基础性，又适当保持其学科的科学性与系统性，同时更突出它的工具性。

(2) 内容安排层次分明，重点突出。微积分是高等数学的重要内容，是现代工程技术的主要数学支撑，有利于实施弹性模式教学，扩大本书的适应性。

(3) 理论联系实际，突出数学的应用思想。书中概念的引入、定理的证明等尽可能地从实际背景入手，除了介绍微积分在物理、几何方面的应用外，还增加了在经济中的应用，以拓宽学生的知识面，提高应用数学知识解决实际问题的能力。

(4) 加大了例题的示范性，使学生较快掌握解题法。例题的选择具有代表性，习题的配备类型合理，难易适中，具有一定梯度。

(5) 教材与辅导材料融为一体，便于自学与复习。

本书第一章由杨丽、于咏梅、王洪芹等人编写；第二章由杨丽、李海玲、王国辉、曲子芳等人编写；第三章由杨丽、曲子芳、王洪芹等人编写；第四章由杨丽、曲子芳、王国辉等人编写；第五章由杨丽、王洪芹、李海玲、宁剑等人编写。

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编者

2013 年 12 月

目　　录

第1章　极限与连续……………………………………………………………………（1）
1.1　初等函数 ……………………………………………………………………（1）
1.2　数列的极限…………………………………………………………………（11）
1.3　函数的极限…………………………………………………………………（17）
1.4　无穷小与无穷大……………………………………………………………（23）
1.5　两个重要极限………………………………………………………………（27）
1.6　函数的连续性………………………………………………………………（32）

第2章　导数和微分 ……………………………………………………………（43）
2.1　导数的概念…………………………………………………………………（43）
2.2　函数的求导法则……………………………………………………………（49）
2.3　微分…………………………………………………………………………（60）

第3章　导数的应用 ……………………………………………………………（70）
3.1　微分中值定理………………………………………………………………（70）
3.2　不定式的洛必达法则………………………………………………………（75）
3.3　函数的单调性与极值………………………………………………………（80）
3.4　曲线的凹凸性和拐点………………………………………………………（87）
3.5　函数图形的描绘……………………………………………………………（90）
3.6　导数在经济中的应用案例…………………………………………………（94）

第4章　积分及其应用…………………………………………………………（101）
4.1　不定积分的概念与性质 …………………………………………………（101）
4.2　换元积分法 ………………………………………………………………（106）
4.3　分部积分法 ………………………………………………………………（116）
4.4　定积分的概念与性质 ……………………………………………………（119）
4.5　牛顿-莱布尼茨公式………………………………………………………（125）
4.6　定积分的换元积分法与分部积分法 ……………………………………（129）

4.7　无穷区间上的广义积分 ……………………………………………… (133)
4.8　定积分的应用案例 ……………………………………………………… (136)

第5章　常微分方程 ……………………………………………………… (147)
5.1　常微分方程的基本概念 ……………………………………………… (147)
5.2　一阶微分方程的解法 ………………………………………………… (150)
5.3　二阶线性微分方程解的结构 ………………………………………… (154)
5.4　二阶常系数线性微分方程的解法 …………………………………… (157)

第6章　多元函数微积分 ………………………………………………… (163)
6.1　多元函数的概念 ……………………………………………………… (163)
6.2　偏导数 ………………………………………………………………… (169)
6.3　全微分 ………………………………………………………………… (173)
6.4　复合函数的求导法则 ………………………………………………… (176)
6.5　多元函数的极值与最值 ……………………………………………… (179)
6.6　多元函数积分学 ……………………………………………………… (184)

第7章　无穷级数 ………………………………………………………… (199)
7.1　数项级数的概念与性质 ……………………………………………… (199)
7.2　数项级数的审敛法 …………………………………………………… (201)
7.3　幂级数 ………………………………………………………………… (204)
7.4　函数的幂级数展开 …………………………………………………… (208)
7.5　傅里叶级数 …………………………………………………………… (211)

习题答案 ………………………………………………………………… (218)

参考文献 ………………………………………………………………… (242)

第 1 章　极限与连续

微积分的研究对象是函数，研究函数的主要工具是导数和积分，即微积分. 尽管微积分的思想很早就在人类的生产实践中产生了，但作为一门完整的学科体系却是建立在极限的基础之上的. 本章将在对函数概念进行复习的基础上介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性.

1.1　初等函数

1.1.1　区间与邻域

在一元函数微积分中，通常用 **N** 表示自然数集，**Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集. 区间和邻域都是实数集 **R** 的特殊子集，可以用集合的方式表示，形式如下：

开区间：$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

闭区间：$[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$

半开半闭区间：$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$，$[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$

无穷区间：$(a, +\infty)=\{x \mid x>a\}$，$[a, +\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$，

$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty, b]=\{x \mid x\leqslant b\}$，

$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$

邻域：设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ **邻域**，记做 $U(a, \delta)$，即 $U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，称 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径.

将 a 的 δ 邻域中心 a 去掉后得 a 的 δ **空心邻域**，记做 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

点 a 的 δ 邻域及点 a 的 δ 空心邻域有时又分别简记做 $U(a)$ 与 $\mathring{U}(a)$.

1.1.2　函数的有关概念

1. 函数的定义

定义 1-1　设 D 是一个数集. 如果对属于 D 的每一个数 x，按照某种对应关系 f，都

有确定的数值 y 和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记做 $y=f(x)$. x 叫做**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记做 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 $M=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 叫做函数值的**值域**.

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 与它对应，那么这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 如果无特别说明，那么以后研究的函数都是指单值函数.

2. 函数的定义域

研究函数时，必须注意函数的定义域. 在实际问题中，应根据问题的实际意义来确定定义域. 对于用数学式子表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，若要使运算有意义，一般应考虑以下 6 点.

(1) 在分式中，分母不能为零.

(2) 在根式中，负数不能开偶次方根.

(3) 在对数式中，真数不能取零和负数，底数大于零且不等于 1.

(4) 在三角函数式中，$k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 不能取正切，$k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 不能取余切.

(5) 在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域.

(6) 如果函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

例 1-1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$ (2) $y=\lg\dfrac{x}{x-1}$ (3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$

解 (1) 要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

解得 $x>-2$ 且 $x\neq 2$.

所以，函数的定义域为 $(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$.

(2) 要使函数有意义，必须满足

$$\frac{x}{x-1}>0$$

解得 $x>1$ 或 $x<0$.

所以，函数的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$.

(3) 要使函数有意义，必须满足

$$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant 1$$

解得 $-3\leqslant x+1\leqslant 3$，即 $-4\leqslant x\leqslant 2$.

所以，函数的定义域为 $[-4, 2]$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才被认为是相同的.

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，是两个相同的函数.

又如，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，是两个不同的函数.

3. 函数的表示法

常用的函数表示法，有公式法（解析法）、表格法和图像法 3 种.

有时，会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数.

在定义域的不同范围内用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

例 1-2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

如图 1-1 所示，该分段函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$. 由符号函数的定义，对任意实数 x，都有 $x=|x|\operatorname{sgn} x$.

例 1-3　设分段函数

$$y=\begin{cases}x^2-1, & x\in[-1, 0)\\ 2x, & x\in[0, 1)\\ -2x+4, & x\in[1, 2)\\ 0, & x\in[2, 3]\end{cases}$$

整个函数定义在 $[-1, 3]$ 上，如图 1-2 所示.

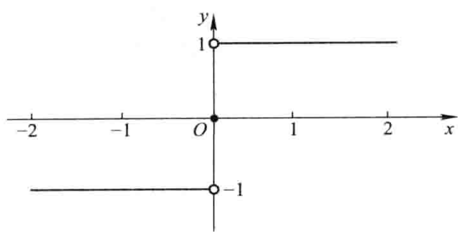


图 1-1

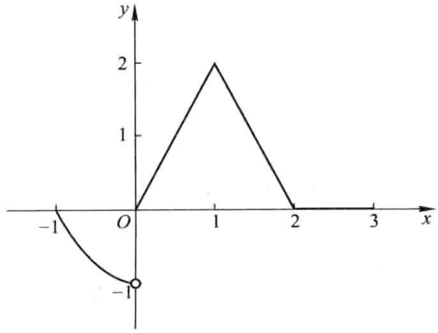
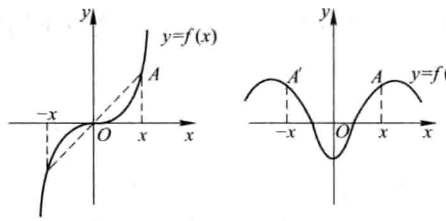
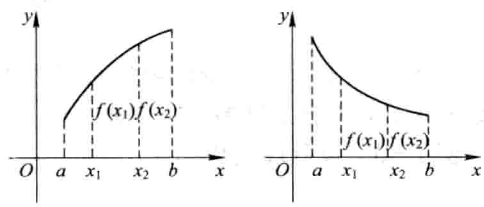
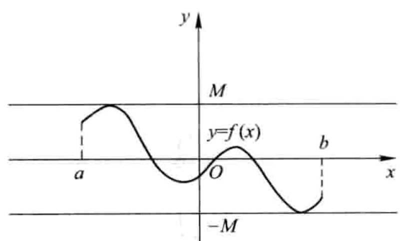


图 1-2

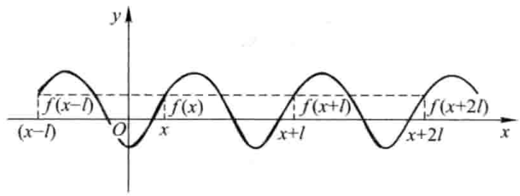
4. 函数的几种特性

在高中阶段已学过函数的 4 种特性，即奇偶性、单调性、有界性、周期性. 现将这 4 个特性进行归纳，如表 1－1 所示 .

表 1－1

特性	定　义	几何特性
奇偶性	函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意的 x， 如果 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为奇函数； 如果 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为偶函数	 奇函数的图形关于原点对称， 偶函数的图形关于 y 轴对称
单调性	对于任意的 x_1，$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$， 如果 $f(x_1)<f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加； 如果 $f(x_1)>f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少	 单调增函数图形沿 x 轴正向上升， 单调减函数图形沿 x 轴正向下降
有界性	对于任意的 $x\in(a,b)$，存在 $M>0$，有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界； 如果这样的数 M 不存在，那么 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界	 区间 (a,b) 内的有界函数的图形 全部夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间

续表

特性	定　义	几何特性
周期性	对于任意的 $x\in D$，存在正数 l，使 $f(x+l)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，l 叫做这个函数的周期	一个以 l 为周期的周期函数的图形在定义域内每隔长度为 l 的区间上有相同的形状

例 1－4　证明 $y=x^n$（n 为正整数）在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

证明　对任意 $x_1>x_2>0$，都有

$$\frac{x_1^n}{x_2^n}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n=\underbrace{\frac{x_1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_1}{x_2}}_{n个\frac{x_1}{x_2}}>\frac{x_1}{x_2}>1$$

即 $x_1^n>x_2^n$，所以，$y=x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

更一般的结论是：$y=x^{\mu}$（μ 为正实数）在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

1.1.3　反函数

定义 1－2　设函数 $y=f(x)$，它的定义域是 D，值域为 M，如果对值域 M 中任意一个值 y，都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 值与之对应，由此得到以 y 为自变量的函数叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$.

在习惯上，自变量用 x 表示，函数用 y 表示，所以又将它改写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

由定义可知，函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域. 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

例 1－5　求函数 $y=3x-2$ 的反函数.

解　由 $y=3x-2$ 解得 $x=\frac{y+2}{3}$，将 x 与 y 互换，得 $y=\frac{x+2}{3}$，所以 $y=3x-2(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $y=\frac{x+2}{3}$ $(x\in\mathbf{R})$.

另外，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

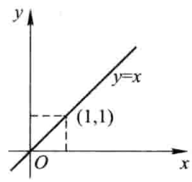
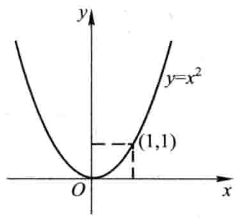
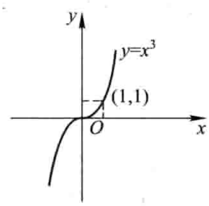
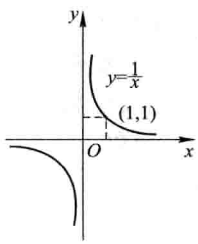
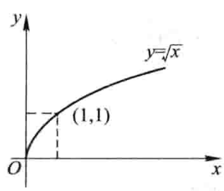
1.1.4　基本初等函数

幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$，指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq$

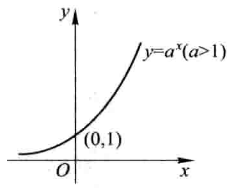
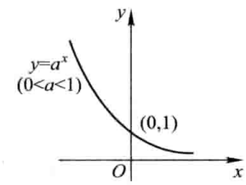
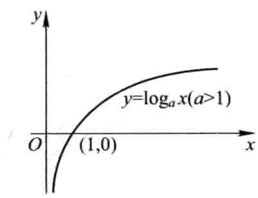
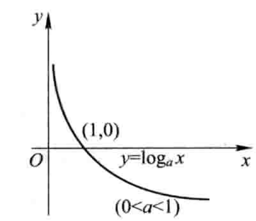
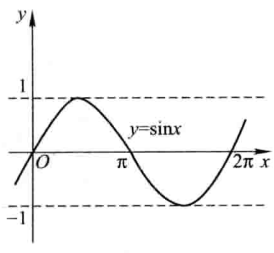
1)，三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性列表，如表 1－2 所示.

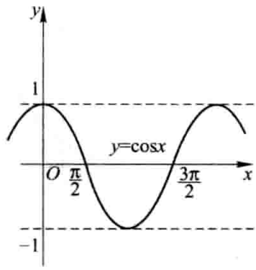
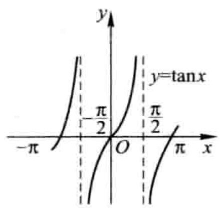
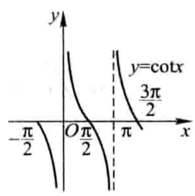
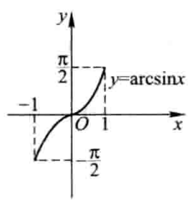
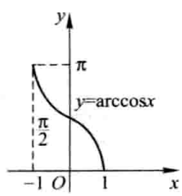
表 1－2

	函 数	定义域与值域	图 形	特 性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少； 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少； 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

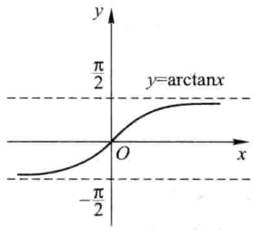
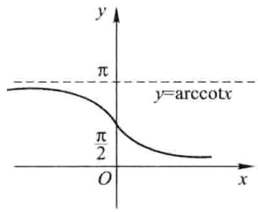
续表

	函　数	定义域与值域	图　形	特　性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in(0, +\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in(0, +\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0, +\infty)$ $y\in(-\infty, +\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0, +\infty)$ $y\in(-\infty, +\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[-1, 1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

	函　数	定义域与值域	图　形	特　性
三角函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in[-1,\ 1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少，有界

续表

	函　数	定义域与值域	图　形	特　性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

1.1.5　复合函数、初等函数

1. 复合函数

定义 1－3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$；而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其定义域为数集 A. 如果在数集 A 或 A 的子集上，对于 x 的每一个值所对应的 u 值，都能使函数 $y=f(u)$ 有定义，那么 y 就是 x 的函数. 这个函数叫做函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为 x 的**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量，其定义域为数集 A 或 A 的子集.

例如，$y=\tan^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\tan x$ 复合而成的函数；函数 $y=\ln(x-1)$ 是由 $y=\ln u$ 与 $u=x-1$复合而成的函数，它们都是 x 的复合函数.

注意　（1）不是任何两个函数都可以复合成一个函数的，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$就不能复合成一个函数.

（2）复合函数也可以由两个以上的函数复合构成，如 $y=2^u$、$u=\sin v$、$v=\dfrac{1}{x}$，由这 3 个函数可得复合函数 $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$，这里 u 和 v 都是中间变量.

例 1－6 指出下列各复合函数的复合过程.

（1）$y=\sqrt{1+x^2}$ （2）$y=\arcsin(\ln x)$ （3）$y=e^{\sin x^2}$

解 （1）$y=\sqrt{1+x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$与 $u=1+x^2$复合而成.

（2）$y=\arcsin(\ln x)$ 是由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.

（3）$y=e^{\sin x^2}$ 是由 $y=e^u$、$u=\sin v$、$v=x^2$复合而成.

2. 初等函数

定义 1－4 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成的，并能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\ln\cos^2 x$，$y=\sqrt[3]{\tan x}$，$y=\dfrac{2x^3-1}{x^2+1}$，$y=e^{2x}\sin(2x+1)$ 都是初等函数.

在初等函数的定义中，明确指出是用一个式子表示的函数，如果一个函数必须用几个式子表示时，它就不是初等函数. 例如：

$$g(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

就不是初等函数，而称为非初等函数.

习题 1－1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同？为什么？

（1）$y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ （2）$y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$

（3）$y=2-x$ 和 $y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$ （4）$y=\ln\sqrt{x-1}$和 $y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{3x+4}$ （2）$y=\sqrt{1-|x|}$

（3）$y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$ （4）$y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

（5）$y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$ （6）$y=\arccos\sqrt{2x}$

3. 设 $f(x)=ax+b$，$f(0)=-2$，$f(3)=5$，求 $f(1)$ 和 $f(2)$.

4. 已知 $f(x-1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=x^4-2x^2+3$ （2）$g(x)=x^2\cos x$

（3）$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ （4）$g(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$

6. 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间（-1，0）内单调减少.

7. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数.

(1) $y=\sqrt{u}$，　$u=x^2-1$　　　(2) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\ln x$

8. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos\sqrt{3x+2}$　　　(2) $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$

(3) $y=\ln(\sin e^{x+1})$　　　(4) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$

9. 火车站收取行李费的规定为：当行李不超过 50 kg 时，按基本运费计算，每千克收费 0.15 元；当超过 50 kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费，试求运费 y（元）与重量 x(kg) 之间的函数关系式，并作出这个函数的图形.

10. 拟建一个容积为 8 000 m^3、深为 8 m 的长方体水池，池底造价比池壁造价贵一倍，假定池底每平方米的造价为 a 元，试将总造价表示成与池底的一边长的函数，并确定此函数的定义域.

1.2　数列的极限

极限是微积分中最重要、最基础的概念，它是在解决微积分的实际问题时产生的，在后面的连续、微分、积分等中都要用到极限的概念.

1.2.1　数列极限的定义

所谓数列，通俗地讲，就是将一系列的数排成一列（排）. 在数学中，可以这样来定义.

定义 1-5　数列是定义在自然数集上的函数，记为 $x_n=f(n)$，$n=1, 2, 3, \cdots$，由于全体自然数可以从小到大排成一列，因此数列的对应值也可以排成一列：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，这就是最常见的数列表现形式了，有时也简记为 $\{x_n\}$ 或数列 x_n. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为一般项或通项.

如　$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$

　　$1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

　　$2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

　　$2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \cdots, \dfrac{n+1}{n}, \cdots$

都是数列，其通项分别为 $\dfrac{1}{n}$，$(-1)^{n-1}$，$2n$，$\dfrac{n+1}{n}$.

注　在数轴上，数列的每一项都有相应的点对应它. 如果将 x_n 依次在数轴上描出点的位置，则是否能发现点的位置的变化趋势，显然 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是无限接近于 0 的；$\{2n\}$ 是无限增大的；$\{(-1)^{n-1}\}$ 的项是在 1 与 -1 两点跳动的，不接近于某一常数；$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 无限接近