十二五 高职高专“十二五”规划教材

经济应用数学

（微积分）

APPLIED ECONOMIC MATHEMATICS

李艳梅 刘振云 ◎ 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

经济应用数学

（微积分）

高职高专“十二五”规划教材

经济应用数学(微积分)

主　编　李艳梅　刘振云
副主编　王鲁静　崔　媛
参　编　武玉婧　蒋风光
主　审　高文杰

机械工业出版社

本书的内容包括：函数的极限与应用、一元函数的微分与应用、一元函数的积分与应用、微分方程与应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学与应用、二重积分与应用，共七章。

本书可作为高职高专经管类各专业学生的数学教材，也可作为其他各专业学生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学. 微积分/李艳梅，刘振云主编. —北京：机械工业出版社，2011.8

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-35395-9

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①李…②刘… Ⅲ. ①经济数学—高等职业教育—教材②微积分—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 160267 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：王玉鑫 责任编辑：李大国
责任校对：张晓蓉 封面设计：王伟光
责任印制：乔 宇
北京铭成印刷有限公司印刷
2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 16.5 印张 · 404 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-35395-9
定价：30.00 元

前　　言

本书是在高职示范校建设理念指导下，在经管类数学课程体系设计的基础上，结合教学改革与实践经验编写而成的。

高等职业教育肩负着培养大批量技术应用型人才的使命，这就要求数学教育应重视应用能力的培养，适度淡化理论教学。因此，在本书的编写过程中，以“必需、够用”为原则，以提高学生的数学文化素质为主要宗旨。在教学内容的取舍上，不是片面地追求数学理论的系统性和完整性，而是从一些涉及专业或日常生活的实际问题出发，引出数学问题，并应用相关的数学方法进行求解，从而培养学生应用数学的意识和能力。在教学内容设计上，不是过分地强调形式化的数学概念及定理证明，而是更多地体现数学思想或用数学解决实际问题的具体方法、步骤，渗透数学建模的思想。

每章的最后一节为“数学实验”内容，介绍了数学软件 Mathematica 在本章的相关应用，并通过练习，提高学生利用现代计算工具的技能。穿插在各章中的“小资料”，可以使学生了解数学发展的历史，引导学生学习数学家的探索精神，激发学生学习数学的兴趣。书后附有相关的数学专业英语词汇，通过对相关专业词汇的介绍使学生深入理解一些数学记号的原始含义。

本书的内容包括：函数的极限与应用、一元函数的微分与应用、一元函数的积分与应用、微分方程与应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学与应用、二重积分与应用，共七章。其中，第一、二章由李艳梅编写；第三、六章由武玉婧、刘振云编写；第四章由崔媛编写；第五、七章由王鲁静编写，蒋风光编写了数学专业英语词汇部分。本书由李艳梅、刘振云任主编，王鲁静、崔媛任副主编。高文杰教授认真审阅了全稿，并提出了宝贵的建议。

在本书的编写过程中，参考了其他院校教师编写的相关教材，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，并提出宝贵的意见和建议。

编　者

目　录

第一章　函数的极限与应用

在经济活动、工程技术和自然现象中，往往会遇到几个变量，而且这些变量遵循一定的规律相互依赖．函数关系是变量之间最基本的一种依赖关系．本章将在回顾中学数学关于函数知识的基础上，进一步讨论函数的概念、性质、复合等问题，并介绍常用的几种经济函数．最后，给出微积分中一个重要的基本概念——极限，并讨论函数的极限以及函数的连续性等问题．

第一节　函　　数

一、问题的提出

案例 1　存款到期本息

银行一年定期的存款利率是 3.25%，如果以定期一年的方式存入一笔钱，到期后本息和是多少？

案例 2　个人所得税

2008 年 3 月起，个人所得税起征额是 2000 元/月．当个人薪金超过 2000 元时，超出的部分按表 1-1 中相应金额纳税．从业者应该如何纳税呢？

表 1-1

级　数	全月应纳所得税额	税率/(%)	速算扣除数/元
1	不超过 500 元的部分	5	0
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10	25
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15	125
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20	375
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25	1375
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30	3375
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35	6375
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40	10375
9	超出 100000 元部分	45	15375

二、函数的概念

（一）邻域

定义 1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为 $\cup(a,\delta)$，即

$$\cup(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为 $\cup(a,\delta)$ 的中心，δ 称为 $\cup(a,\delta)$ 的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 等价于 $-\delta<x-a<\delta$，所以点 a 的 δ 邻域还可以表示为开区间 $(a-\delta, a+\delta)$.

从数轴上看，点 a 的 δ 邻域表示了以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，如图 1-1 所示.

如果点 a 的 δ 邻域中去掉点 a，则称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\cup(\hat{a},\delta)$，即

$$\cup(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示了 $x\neq a$.

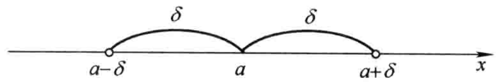

图 1-1

例 1 用不等式和开区间表示点 -2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域.

解 用不等式表示为 $|x+2|<\frac{1}{3}$；该不等式等价于 $-\frac{1}{3}<x+2<\frac{1}{3}$，即 $-\frac{7}{3}<x<-\frac{5}{3}$，所以用开区间表示为 $\left(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

(二) 函数的定义

在案例 1 中，设 x 元以定期的方式存入银行一年，到期后本息和为 y 元，则 $y=x(1+3.25\%)$.

由此发现，存入的金额不同，到期后的本息和也不同. 对于确定的数值 x(元)，y(元)总有确定的值与之对应. 变量与变量之间存在的这种相互对应关系，正是函数概念的实质.

定义 2 设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其取值范围内任取一个值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数(也称为一元函数)，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量；y 称为因变量；自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，常用 D 表示.

函数的定义域是使函数的表达式有意义的一切实数的集合. 在实际问题中，函数的定义域应根据实际意义加以确定.

在讨论函数关系时，常说函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 有定义，即当自变量取某个已知值 x_0 时，函数 y 就有确定的值 $f(x_0)$ 与之对应，$f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 函数值的全体称为函数的值域，常用 W 表示.

如果自变量在其定义域内任取一个确定的值，函数只有一个确定值与之对应，则称这种函数为单值函数；否则，称为多值函数. 对于这种多值函数的情形，可以通过限制其函数值的范围，使之成为单值函数后再进行研究.

例如，反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是多值函数. 当限制其函数值 y 的范围在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，它就是单值函数了.

从函数的定义可知，确定函数关系的两个主要因素是定义域和对应法则，两个函数只有这两个因素完全相同时，才表示它们是同一函数.

函数的表示方法主要有解析法、表格法和图像法.

(三) 分段函数

定义 3 若函数 $f(x)$ 在其定义域的不同区间内对应不同的函数关系，则该函数称为分段

函数.

例 2　在案例 2 中，如果已知天津新华大学孙教授每月薪金都不超过 6500 元(含税)，则其月薪金 x 与纳税金额 y 的函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000\\ 0.05\times(x-2000), & 2000<x\leqslant 2500\\ 0.1\times(x-2000)-25, & 2500<x\leqslant 4000\\ 0.15\times(x-2000)-125, & 4000<x\leqslant 6500\end{cases}.$$

这里，速算扣除数可计算如下：

$$25=500\times10\%-500\times5\%=50-25$$
$$125=2000\times15\%-1500\times10\%-500\times5\%=300-150-25$$
$$375=5000\times20\%-3000\times15\%-1500\times10\%-500\times5\%$$
$$1375=20000\times25\%-15000\times20\%-3000\times15\%-1500\times10\%-500\times5\%$$
$$\vdots$$

以此类推.

如果孙教授在 2010 年 3 月扣除保险及四金的月收入为 6120 元，孙教授缴纳税后，实际收入是多少呢？

$$应纳税=0.15\times(6120-2000)-125=493(元)$$
$$实际收入=6120-应纳税=6120-493=5627(元)$$

例 3　设 x 为任一实数，则函数

$$y=f(x)=[x]$$

称为取整函数. 其中，$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 W 为全体整数，其图形如图 1-2 所示. 此图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

例如，$\left[\frac{4}{5}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.6]=-4$.

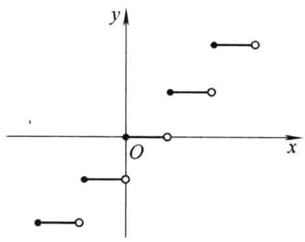

图 1-2

例 4　函数

$$f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{1,0,-1\}$. 其图形如图 1-3 所示.

(四) 隐函数

前面所遇到的一元函数多数是表示成 $y=f(x)$ 这种形式的，例如 $y=2x-3$. 事实上，关于 x，y 的二元方程 $2x-y-3=0$ 与一元函数 $y=2x-3$ 表示变量 x 和变量 y 之间相同的对应关系.

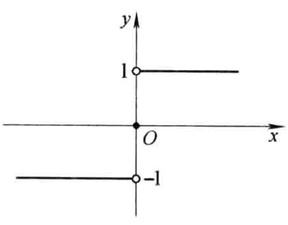

图 1-3

关于变量 x，y 的一个二元方程

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

在一定的条件下，就确定了 y 是 x 的函数.

定义 4 若对于某一区间内的任一确定的值 x，由方程(1)均有确定的值 y 与之对应，则这种隐含在方程(1)中的函数，称为隐函数.

与之对应，表示成 $y=f(x)$ 这种形式的函数称为显函数.

例如，函数 $y=x^{\alpha}$ 和 $y=e^{x}+\ln x$ 均为一元显函数，而由方程 $x^3+xy^2-1=0$ 确定的 y 是 x 的函数为一元隐函数.

有些方程所确定的隐函数很容易表示成显函数的形式. 即可以从方程(1)中解出 y 而得到显函数的表达形式.

例如，由方程 $x-2y-3=0$ 可以解出显函数 $y=\frac{1}{2}(x-3)$；由方程 $x^2+y^2-R^2=0$ 可以解出双值显函数 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

将一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化. 但是，隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的. 例如，方程 $e^x-e^y-xy=0$ 及方程 $y-x-3\sin y=0$ 都不能解出 y 来. 即由这两个方程确定的隐函数都不能表示成显函数的形式.

三、函数的性质

在初等数学中，学习了函数的单调性、奇偶性、周期性等性质，下面来介绍函数的有界性.

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 I 内有定义(区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分)，如果存在正数 M，使得对该区间 I 的任何一个自变量 x 的值，其对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在该区间 I 内有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在该区间 I 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都是有界的；函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是无界的，而在区间 $(\delta,+\infty)$ 内则是有界的，其中 δ 是某个确定的正数.

四、初等函数

初等函数是微积分研究的主要对象. 下面首先讨论基本初等函数.

(一) 基本初等函数

基本初等函数包括：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

1. 幂函数

函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)称为幂函数.

例如，$y=x$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$等都是幂函数. 这一类函数的定义域因 μ 的不同而不同. 但不论 μ 取何值，幂函数 $y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义. 部分幂函数的图形如图 1-4 所示.

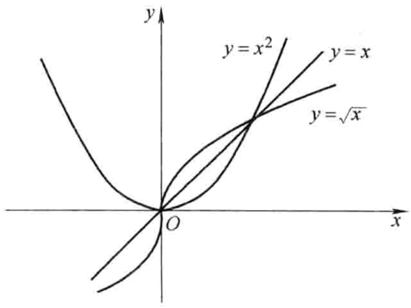

图 1-4

当 $\mu>0$ 时，幂函数的图形通过点(0,0)和点(1,1)，在 $(0,\infty)$ 内严格单调递增且无界.

2. 指数函数

函数 $y=a^x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$)称为指数函

数. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$. 当$a>1$时，函数严格单调递增且无界；当$0<a<1$时，函数严格单调递减且无界.

如图 1-5 所示，函数的图形都过点$(0,1)$，$y=a^x$与$y=a^{-x}$的图形关于y轴对称.

函数$y=e^x$是微积分及应用中常用的指数函数，其中常数$e=2.7182818\cdots$.

3. 对数函数

函数$y=\log_a x$（a为常数，且$a>0,a\neq1$）称为对数函数. 它是指数函数$y=a^x$的反函数. 其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 当$a>1$时，函数严格单调递增且无界；当$0<a<1$时，函数严格单调递减且无界. 函数的图形都过点$(1,0)$，如图 1-6 所示. 函数$y=\log_a x$与函数$y=\log_{\frac{1}{a}} x$的图形关于x轴对称.

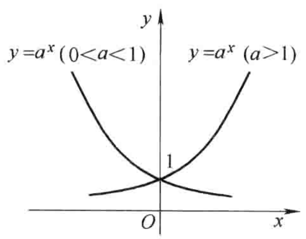

图 1-5

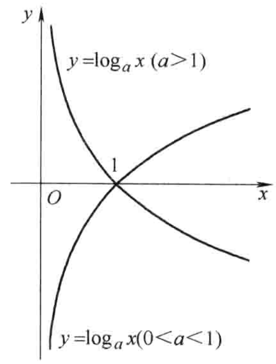

图 1-6

以 e 为底的对数称为自然对数，记为$y=\ln x$.

4. 三角函数

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数统称为三角函数. 正弦函数$y=\sin x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以2π为周期、有界的奇函数，如图 1-7 所示.

余弦函数$y=\cos x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以2π为周期、有界的偶函数，如图 1-8 所示.

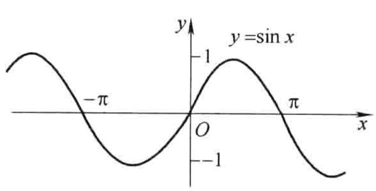

图 1-7

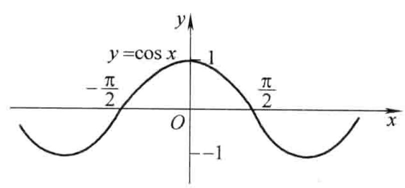

图 1-8

正切函数$y=\tan x$的定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以$\pi$为周期的无界函数，在每一个周期内函数是单调递增的，如图 1-9 所示.

余切函数$y=\cot x$的定义域为$x\in(k\pi,k\pi+\pi)$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以π为周期的无界函数，在每一个周期内函数是单调递减的，如图 1-10 所示.

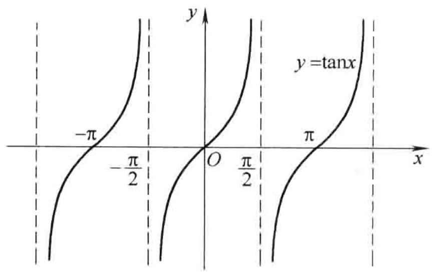

图 1-9

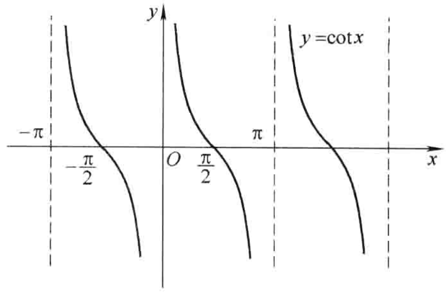

图 1-10

5. 反三角函数

反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数统称为反三角函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它是有界的、单调递增的奇函数，是正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，如图 1-11 所示.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，它是有界的、单调递减的函数，是余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$上的反函数，如图 1-12 所示.

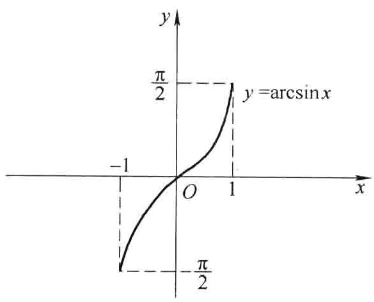

图 1-11

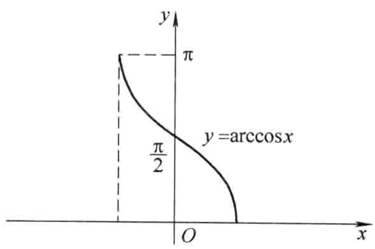

图 1-12

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它是有界的、单调递增的奇函数，是正切函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，如图 1-13 所示.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，它是有界的、单调递减的函数，是余切函数 $y=\tan x$，$x\in(0,\pi)$上的反函数，如图 1-14 所示.

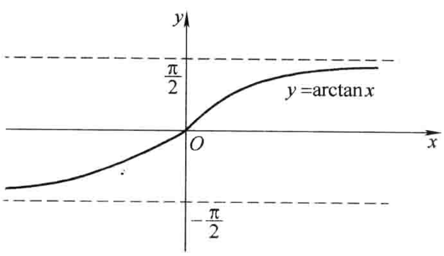

图 1-13

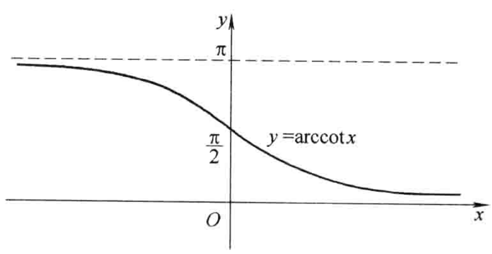

图 1-14

（二）复合函数

在同一函数中，两个变量之间的关系有时并不是直接的，而是通过另一个变量间接地联系起来.

定义 6　设函数 $y=f(u)$，定义域为 D_u，函数 $u=\varphi(x)$，定义域为 D_x，值域为 W_u，当函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 W_u 全部或部分落在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_u 时，称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数. 它是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，u 称为中间变量.

例如，有两个函数 $y=\sin u$，$u=3x+1$，且函数 $u=3x+1$ 的函数值全部落在函数 $y=\sin u$ 的定义域内，所以这两个函数复合而成的函数为 $y=\sin(3x+1)$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

又如，函数 $y=\sqrt{1-x}$ 可以看做由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x$ 复合而成的. 显然，函数 $u=1-x$ 的值域 $(-\infty,+\infty)$ 中，只有 $[0,+\infty)$ 部分落在函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内，所以这个复合函数的定义域为 $(-\infty,1]$.

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=x^2+2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[2,+\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，在 $u=x^2+2$ 中无论 x 取什么值，对应的 u 值都不属于区间 $[-1,1]$，因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成. 例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x^2}{8}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\tan\dfrac{x^2}{8}}$，这里 u 及 v 都是中间变量.

（三）初等函数的概念

定义 7　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成且用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\mathrm{e}^{\cos(2x+1)}$，$y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 等都是初等函数.

不满足此定义的函数均称为非初等函数. 一般地，分段函数不是初等函数.

五、常见的经济函数模型

（一）需求函数与成本函数

1. 需求函数

影响人们消费的因素多种多样，除了商品的价格因素外，还与人们的年龄、收入、偏好、区域、环境等诸多因素有关. 如果不考虑价格以外的其他因素，则商品价格越低，消费者的购买欲越强；商品价格越高，消费者的购买欲越弱.

需求函数：设 p 表示商品的价格，Q 表示需求量，则称 $Q=Q(p)$ 为需求函数.

常见的需求函数有如下类型：

线性需求函数：$Q=b-ap\quad(a,b>0)$

幂需求函数：$Q=kp^{-a}\quad(a,k>0)$

指数需求函数：$Q=a\mathrm{e}^{-bp}\quad(a,b>0)$

2. 供给函数

需求是对消费者而言的，供给则是对生产者而言的. 设商品的市场供给量为 S，除了要

满足一定消费群体的需求外，供给量也受到商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少.

供给函数：设 p 表示商品的价格，S 表示供给量，则称 $S=S(p)$ 为供给函数.

常见的供给函数有如下类型

线性供给函数：$S=ap-b \quad (a,b>0)$

幂供给函数：$S=kp^a \quad (a,k>0)$

指数供给函数：$S=ae^{bp} \quad (a,b>0)$

均衡价格：当市场上某种商品的需求量与供给量相等时，此时的商品价格 p_0 称为均衡价格.

例 5 一季度鸡蛋的供给量 S 与价格 p 的函数模型为 $S(p)=-3+10p$，需求量 Q 与价格 p 的函数模型为 $Q(p)=-2p+27$，求一季度鸡蛋的均衡价格 p_0.

解 由供需均衡条件，可得

$$-3+10p=-2p+27$$

解得 $p=2.5$，因此一季度鸡蛋的均衡价格 $p_0=2.5$.

(二) 总成本函数、收益函数和利润函数

1. 总成本函数

总成本包括固定成本和可变成本两部分. 固定成本与产量和销售量无关，包括设备的固定费用和其他管理费用；可变成本是随着产量(或销售量)的不同而发生变化.

总成本函数：设 C_0 为固定成本，q 表示产量(或销售量)，可变成本为 $C_1(q)$，则称 $C(q)=C_0+C_1(q)$ 为总成本函数，简称成本函数.

平均成本函数可表示为：$\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$.

例 6 棘花食用油加工厂加工菜籽油，日产能力为 60t，固定成本为 6000 元，每加工 1t 食用油成本增加 200 元，求出每日成本与日产量的函数关系，并求出当日产量分别是 30t、40t 时的总成本及平均成本.

解 设每日成本为 C，日产量为 q，则每日的成本与日产量的函数关系为

$$C(q)=6000+200q \quad (0\leqslant q\leqslant 60)$$

当日产量 $q=30$t 时，$C(30)=6000+200\times 30=12000$(元)

平均单位成本 $\overline{C}(30)=\dfrac{C(30)}{30}=400$(元)

当日产量 $q=40$t 时，$C(40)=6000+200\times 40=14000$(元)

平均单位成本 $\overline{C}(40)=\dfrac{C(40)}{40}=350$(元)

所以，在一定范围内，日产量越大，平均单位成本越低.

2. 收益函数

收益函数是描述收入、销售价格和销售量之间关系的表达式. 设 q 表示销售量，p 表示价格，R 表示收益，则收益函数可表示为

$$R=qp$$

若销售量 q 是价格的函数，即 $q=q(p)$，则收益函数可表示为

$$R=q(p)p$$

例 7　LX3 无线鼠标的销售价格为 80 元时，月销售量为 5000 个，销售价格每提高 2 元，月销售量会减少 100 个. 在不考虑降价及其他因素时，求：1)这种商品月销售量与价格之间的函数关系；2)当价格提高多少元时，这种商品会卖不出去；3)月销售量与价格之间的函数关系的定义域.

解　(1) 设无线鼠标的价格为 p 元/个，月销售量为 q 个，则

$$q=5000-100\left(\frac{p-80}{2}\right)=5000-50p+4000=9000-50p$$

(2) 当无线鼠标卖不出去时，$q=0$，即

$$9000-50p=0，解得\ p=180$$

(3) 月销售量与价格之间的函数关系的定义域 $D=[80,180]$. 从理论上讲，当价格提高到 180 元时，这种商品就会卖不出去.

3. 利润函数

在经济学中，收益与成本之差称为利润.

利润函数：当产量等于销售量时，利润 L 可以表示为产量 q 的函数，即

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

(三) 关于利息的函数模型

在金融业务中，常用的两种计息方式：单利和复利.

1. 单利方式

单利是指仅计算本金利息，每一个计息期的利息都是固定不变的.

单利方式：设 P_0 为本金，r 为计息期的利率，n 为计息期，则第 n 个计息期满后的本利和为

$$P=P_0+P_0rn=P_0(1+rn)$$

2. 复利方式

复利是指不仅本金计算利息，利息也同样生息.

复利方式：设 P_0 为本金，r 为计息期的利率，n 为计息期，则第 n 个计息期满后的本利和为

$$P_n=P_0(1+r)^n$$

如果每年计息 m 次，则一年后的本利和为 $P_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$.

例 8　王女士存入银行 20000 元人民币，年利率为 3.6%，存期一年. 用复利方法分别计算本利和与利息：(1)年计息一次；(2)半年计息一次；(3)3 个月计息一次.

解　已知本金 $P_0=20000$ 元，$r=3.6\%$，计息期 $n=1$ 年.

(1) 若一年计息一次，则一年的本利和与利息分别为

$$P_1=20000\times(1+3.6\%)=20720$$
$$I=20720-20000=720$$

(2) 若半年计息一次，则每期利率为 $\frac{3.6\%}{2}$，计息次数为 2，则 1 年的本利和与利息分别为

$$P_2=20000\times\left(1+\frac{3.6\%}{2}\right)^2=20726.48$$
$$I=20726-20000=726.48$$

(3) 若三个月计息一次，则每期利率为$\frac{3.6\%}{4}$，计息次数为4，则1年的本利和与利息分别为

$$P_3 = 20000 \times \left(1 + \frac{3.6\%}{4}\right)^4 = 20729.78$$

$$I = 20729.78 - 20000 = 729.78$$

因此，在金融业务允许的情况下，结算次数越多，利息发生额越大.

训练任务 1.1

1. 用区间和不等式表示 -5 的$\frac{1}{3}$邻域.

2. 解答$\cup\left(\hat{2}, \frac{1}{2}\right)$的含义，并用不等式表示.

3. 判断下列函数在指定区间内是否有界:

(1) $f(x) = \tan x$，$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$，$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$； (2) $f(x) = \frac{1}{x-1}$，$(2,3)$，$(1,2)$；

(3) $f(x) = x^3$，$(-\infty, +\infty)$，$[-3,3]$； (4) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$，$(-\infty, +\infty)$.

4. 判断函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ $(a>0$ 且 $a \neq 1)$； (2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$.

5. 下列函数是初等函数吗？并指出函数的定义域、值域，画出简图.

(1) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ x^2+4, & x<0 \end{cases}$； (2) $f(x) = 2 - |x+1|$.

6. 将 y 表示成 x 的复合函数:

(1) $y = u^2$，$u = 1+\sqrt{v}$，$v = x^2+2$； (2) $y = \arctan u$，$u = 5^v$，$v = \sin x$.

7. 指出下列各复合函数的复合过程:

(1) $y = \sin(1-3x)$； (2) $y = 5^{\ln\sin x}$； (3) $y = 2^{\tan^3 x}$；

(4) $y = \sqrt{\log_5 \sqrt{1-x}}$； (5) $y = (\arcsin\sqrt{x})^2$； (6) $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$.

8. 日日新服装加工厂的生产能力为1000件/天，固定成本为30000元. 每加工1件服装，成本增加2元，求出每日的成本与日产量的函数关系，并求出当日产量分别为600件、800件时的总成本及平均单位成本.

9. 当休闲裤的销售价格为100元时，月销售量为4000件，销售价格每提高2元，月销售量会减少50件. 在不考虑其他因素时，求：(1)求休闲裤月销售量与价格之间的函数关系；(2)当价格提高到多少元时，休闲裤会卖不出去？(3)求月销售量与价格之间的函数关系的定义域.

10. 生产卡通表的固定成本为1000元，每件卡通表的可变费用为12元，如果这种表的

销售价为 17 元/件，求：(1)盈亏转折点的产量；(2)盈亏转折量.

11. 当小麦收购价为 3 元/kg 时，某收购站每月能收购 5×10^6kg，若收购价每千克提高 0.1 元，则收购量可增加 40000kg，求小麦的线性供给函数.

12. 自动铅笔的供给函数和需求函数分别为

$$S(p)=-3+10p,\ Q(p)=-2p+21$$

求商品的均衡价格 p_0.

第二节　极　　限

一、问题的提出

案例 1　水温的变化趋势

将一盆 80℃的热水放在一间室温为 20℃的房间里，水的温度将逐渐降低，随着时间的推移，水温会越来越接近室温 20℃.

案例 2　人影长度

考虑当一个人沿直线走向路灯的正下方时，其影子的长度. 由常识可知，当此人越来越接近目标时，其影子的长度越来越短，趋近于零.

案例 3　“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的涵义

中国古代思想家庄周(约公元前 369—公元前 286 年)在《庄子 · 天下篇》中引述惠施的话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”这句话的意思是指一尺的木棒，第一天取它的一半，即$\frac{1}{2}$尺；第二天再取剩下的一半，即$\frac{1}{4}$尺；第三天再取第二天剩下的一半，即$\frac{1}{8}$尺……可以一天天地这样取下去，而木棒是永远也取不完的.

将每天剩余的木棒长度写出来就是：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$. 当 n 很大时，$\frac{1}{2^n}$很小；当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$无限接近于 0.

案例 4　圆面积的计算——割圆术

“割圆术”求圆面积的做法和思路：设圆半径为 r，先做圆的内接正三边形，把它的面积记作 A_1，再做内接正六边形，其面积记作 A_2，再做内接正十二边形，其面积记作 A_3，…，照此下去，圆的内接正 $3\times2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$边形的面积 A_n，构成的数列为

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

当 n 无限增大时，A_n 无限地接近圆的面积.

案例 5　曲边三角形的面积

计算由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x=0$，$x=1$ 围成的曲边三角形的面积.

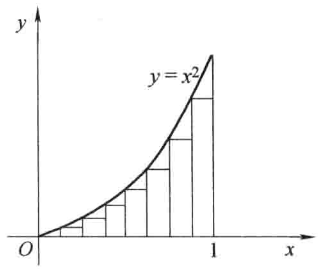

图 1-15

如图 1-15 所示，用 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$，1 把区间[0,1]分成 n 等份，每个小区间的长度为$\frac{1}{n}$，过各分点作垂直于 x 轴的