

上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 41



加权的矩阵 Padé - 型逼近 及其在控制论中应用

- 作者：吴蓓蓓
- 专业：计算数学
- 导师：顾传青



上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文



加权的矩阵 Padé - 型逼近 及其在控制论中应用

- 作者：吴蓓蓓
- 专业：计算数学
- 导师：顾传青



图书在版编目(CIP)数据

2006 年上海大学博士学位论文. 第 1 辑/博士学位论文编辑部编. —上海: 上海大学出版社, 2009. 12

ISBN 978-7-81118-511-9

I. 2... II. 博... III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2006 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162521 号

2006 年上海大学博士学位论文

——第 1 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人: 姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 264.75 字数 7 376 千

2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—400

ISBN 978-7-81118-511-9/G·513 定价: 1000.00 元(50 册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2006)

Weighted Matrix Padé-type Approximation and Its Applications in Control Theory

Candidate: Wu Beibei

Major: Computational Mathematics

Supervisor: Gu Chuanqing

Shanghai University Press

• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

主任:	蒋尔雄	教授,上海大学数学系	200444
委员:	苏仰铎	教授,复旦大学数学系	200433
	薛军工	教授,复旦大学数学系	200433
	马和平	教授,上海大学数学系	200444
	李春景	副教授,同济大学数学系	200092
导师:	顾传青	教授,上海大学数学系	200444

评阅人名单:

蒋尔雄	教授, 上海大学数学系	200444
梁学章	教授, 吉林大学数学研究所	130012
王国荣	教授, 上海师范大学数学系	200234

评议人名单:

冯玉瑜	教授, 中国科学技术大学数学系	230026
李春景	副教授, 同济大学数学系	200092

答辩委员会对论文的评语

吴蓓蓓同学的“加权的矩阵 Padé-型逼近及其在控制论中应用”，是一篇将有理函数逼近的理论研究和实际应用相结合的博士论文，是属于当前非线性逼近理论研究及应用的重要课题。

该论文研究的主要内容包括：

1. 完善了顾传青教授所提出的基于矩阵直接内积空间上的矩阵 Padé-型逼近的理论和方法，给出了逼近的递推公式以及两项和三项的递推恒等式，而且证明当系数矩阵满足特定条件时，矩阵 Padé-型逼近转化为矩阵 Padé 逼近。

2. 建立了赋范型矩阵 Padé-型逼近，并给出了计算它的行列式公式和递推算法。这种逼近方法具有计算简单、灵活的特点。

3. 分析了 H-表和矩阵 Padé-型表的块状结构，揭示出了两者之间的内在联系。

4. 引入数量权因子，构造了加权的矩阵 Padé-型逼近，这不仅降低了生成多项式选取的难度，且通过权因子的选择可以提高逼近效果。文章给出了权因子的选择标准和确定最佳权因子的方法。

5. 研究了矩阵 Padé-型逼近方法在控制论模型简化中的应用，给出了五种模型简化算法，并通过计算实例说明了每种简化算法的有效性。

答辩委员会表决结果

答辩委员会经过认真审议并经过无记名投票,一致通过吴蓓蓓同学的博士论文答辩,并认为这是一篇优秀博士学位论文. 建议授予吴蓓蓓同学理学博士学位.

答辩委员会主席: **蒋尔雄**

2006 年 5 月 31 日

摘 要

本文完善和推广了在矩阵内积空间上的矩阵 Padé-型逼近的理论和方法. 建立了赋范型矩阵 Padé-型逼近, 给出了它的行列式公式和结构分析. 构造了加权的矩阵 Padé-型逼近, 特别给出了确定加权的矩阵 Padé-型逼近 $(m/l)_F^w(z)$ 的最佳权因子的方法. 同时, 本文讨论了矩阵 Padé-型逼近方法在矩阵指数计算和控制论中模型简化问题上的应用.

文章内容主要分成三部分:

第一部分通过引入一种新的线性映射“ Λ ”, 建立了赋范型矩阵 Padé-型逼近, 给出了它的行列式公式. 利用赋范型行列式公式求矩阵 Padé-型逼近, 可以取不同的范数, 具有计算简单、灵活、并适应于大规模矩阵计算的优点. 而且给出了赋范型行列式公式的递推算法, 分析了 H-表和矩阵 Padé-型表的结构.

第二部分对生成多项式 $v(z)$ 引入数量权因子 $\{\omega_k\}$, 构造了加权的矩阵 Padé-型逼近, 并给出了它的三种行列式公式. 讨论了权因子的选择标准, 具体介绍了确定加权的矩阵 Padé-型逼近 $(m/l)_F^w(z)$ 的最佳权因子的方法, 并且研究了加权的矩阵 Padé-型逼近的高阶逼近和局部逼近. 通过选取适当的权因子, 对矩阵指数函数 e^{Az} 用加权的矩阵 Padé-型逼近可以达到很好的逼近效果.

第三部分介绍了矩阵 Padé-型逼近方法在控制论模型简化中的应用. 给出了关于矩阵 Padé-型逼近的五种模型简化算法:
1. 矩阵 Padé-型简化算法; 2. Modal~Padé-型混合简化算法;

3. 占优极点 $\sim$ Padé-型混合简化算法;4. 部分分式 $\sim$ Padé-型混合简化算法;5. Routh $\sim$ Padé-型混合简化算法. 文中实例表明了这些方法的有效性.

关键词 矩阵 Padé-型逼近, 权因子, H-表, 矩阵 Padé-型表, 模型简化

Abstract

In this paper, theory and method of matrix Padé-type approximation are improved and generalized in the inner product space. The explicit determinant formula with matrix norm elements of matrix Padé-type approximation is introduced. The structure of matrix Padé-type table is given. Weighted matrix Padé-type approximation is constructed. Specially, the method of determining the best weight factors for $(m/1)_F^G(z)$ is presented. Moreover the applications of matrix Padé-type approximation to matrix exponent computation and model reduction in control theory are given.

This paper consists of three parts:

In the first part, the explicit determinant formula with matrix norm elements of matrix Padé-type approximation is presented by exploiting a linear mapping Λ . It is simple and flexible to compute matrix Padé-type approximation by choosing different matrix norms. It is also adaptive to compute large-scale matrix. The recursive formula is given. H-table and the structure of matrix Padé-type table are obtained.

In the second part, weighted matrix Padé-type approximation by introducing a set of scalar weights $\{\omega_k\}$ for the generating polynomial $v(z)$ is presented. Three explicit

determinant formulas are given. The method of determining the best weight factors for $(m/1)_F^w(z)$ is presented. And higher order approximation and local approximation of weighted matrix Padé-type approximation are studied. A good approximation to e^{Az} can be obtained by choosing the appropriate weight factors.

In the third part, the applications of matrix Padé-type approximation to model reduction in control theory are introduced. Based on the concept of matrix Padé-type approximation, some model reduction methods are given including matrix Padé-type method, Modal-Padé type method, dominant pole-Padé type method, partial fraction-Padé type method and Routh-Padé type method. It is shown that the methods are efficient.

Key words Matrix Padé-type approximation, Weight factors, H-table, Matrix Padé-type table, Model reduction

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景和已有成果	1
1.2 本文所做的主要工作	10
第二章 矩阵 Padé-型逼近	12
2.1 矩阵 Padé-型逼近的定义和误差公式	12
2.2 矩阵 Padé-型逼近的递推公式	19
2.3 矩阵 Padé-型逼近的代数性质	21
2.4 矩阵 Padé-型逼近的恒等式	27
2.5 矩阵 Padé-型逼近的图像分析	31
第三章 矩阵 Padé-型逼近的行列式公式和结构	34
3.1 矩阵 Padé-型逼近的内积型行列式公式	34
3.2 矩阵 Padé-型逼近的赋范型行列式公式	42
3.3 矩阵 Padé-型逼近转化成矩阵 Padé 逼近的条件	50
3.4 矩阵 Padé-型逼近的行列式递推公式	57
3.5 矩阵 Padé-型表的结构分析	61
第四章 加权的矩阵 Padé-型逼近	75
4.1 加权的矩阵 Padé-型逼近的定义	75
4.2 加权的矩阵 Padé-型逼近的行列式公式	79
4.3 加权的矩阵 Padé-型逼近的高阶逼近	87
4.4 加权的矩阵 Padé-型逼近的最佳权因子	103

4.5	加权的矩阵 Padé-型逼近的局部逼近·····	108
4.6	加权的矩阵 Padé-型逼近的收敛性定理·····	114
第五章 矩阵 Padé-型方法在控制论模型简化问题中的应用 ·····		120
5.1	矩阵 Padé-型简化算法·····	121
5.2	部分分式~Padé-型混合简化算法 ·····	127
5.3	Routh~Padé-型混合简化算法 ·····	132
参考文献 ·····		136
致谢 ·····		149

第一章 绪 论

1.1 研究背景和已有成果

有理函数逼近作为非线性数值逼近的一个重要组成部分,愈来愈引起了人们的充分关注,研究工作十分活跃,应用范围日趋广泛^[1-9,14,15,18,19,31,32,35].这是因为,一方面有理函数仍属于简单函数类,在计算机上可提供实际可行的算法;另一方面,用它来近似表示函数时,虽然比多项式表示复杂,却比用多项式更加的灵活、有效,且能反映函数的一些固有特性,如奇性等.

因此,在这一研究领域内,国际上许多著名的数学家发展起来了一系列数值有理逼近的理论和方法,如连分式方法、有理插值方法、有理样条函数方法、Padé逼近方法等. Padé-型逼近作为 Padé逼近的一种推广形式,也是其中比较典型的、应用较广泛的一种数值有理逼近方法.

从1979年开始,法国数学家 C. Brezinski 研究了数量 Padé-型逼近^[47-49]. Padé-型逼近的形成是与生成多项式紧密相关的,其基本思想是预先选取有理分式的极点,然后确定其分母和分子,使得该有理分式函数的形式幂级数与被逼近函数的形式幂级数有尽可能多的项重合.

此后,许多数学工作者将 Padé-型逼近加以发展、应用,并取得了不少的成绩^[27,28,30,67,95-97,109,112,114,138,139].

1983年 Draux 将 Padé-型逼近从数量的情形推广到非交换代数的情形^[67]. 并且提出了矩阵 Padé-型逼近概念,由于矩阵一般不满足乘法交换律,所以分成左、右矩阵 Padé-型逼近进行研究.

1999 年, Salam 将 Padé - 型逼近推广到向量的情形^[114]. 与 Graves - Morris 和 Roberts 将 Padé 逼近从向量的情形推广到矩阵的情形^[78]一样, Salam 的向量 Padé - 型逼近是借助于 Clifford 代数的方法来定义的, 也就是利用向量与矩阵之间的同构方式来定义的. 这种方法在具体计算上是很难实现的.

2004 年, 顾传青引入了一种从多项式空间到矩阵空间的广义线性泛函^[95], 从而在矩阵直接内积的基础上定义了矩阵 Padé - 型逼近.

矩阵 Padé - 型逼近是数量 Padé - 型逼近和矩阵 Padé 逼近的推广. 它在理论物理、网格模型、系统控制理论和数值分析中都有着广泛应用^[6, 95, 96, 138].

目前, 矩阵 Padé - 型逼近主要存在两种不同类型的定义: 一种是分母为矩阵多项式的矩阵 Padé - 型逼近, 另一种是分母为数量多项式的矩阵 Padé - 型逼近.

1.1.1 分母为矩阵多项式的矩阵 Padé - 型逼近的定义^[67, 138]

设 $f(t)$ 是 $d \times d$ 阶的矩阵函数, 可以展成幂级数为

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_i \in \mathbb{C}^{d \times d}, \quad t \in \mathbb{C}$$

在多项式矩阵空间上定义两个线性算子 C_L, C_R :

$$C_L(\lambda x^i) = \lambda C_i, \quad C_R(\lambda x^i) = C_i \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^{d \times d}$$

则

$$\begin{aligned} C_L((1 - xt)^{-1} I) &= C_R((1 - xt)^{-1} I) \\ &= C_R(I + xt I + (xt)^2 I + \cdots) \\ &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots = f(t) \end{aligned}$$

其中 C_L 和 C_R 作用在 x 上, t 看成参数.

设 $V_n(t)$ 是任意给定的 n 次矩阵多项式

$$V_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i, \quad b_i \in \mathbb{C}^{d \times d}$$

其中 b_n 可逆.

令

$$W_L(t) = C_L \left(\frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t} \right)$$

$$W_R(t) = C_R \left(\frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t} \right)$$

定义

$$\tilde{W}_L(t) = t^{n-1} W_L(t^{-1})$$

$$\tilde{W}_R(t) = t^{n-1} W_R(t^{-1})$$

$$\tilde{V}_n(t) = t^n V_n(t^{-1})$$

这里, $\tilde{W}_L(t)$, $\tilde{W}_R(t)$ 都是 $n-1$ 次的矩阵多项式.

定义 1.1 称 $[\tilde{V}_n(t)]^{-1} \tilde{W}_L(t)$ 为矩阵函数 $f(t)$ 的 $(n-1, n)$ 阶左矩阵 Padé-型逼近 (LMPTA), 记为 $(n-1/n)_f^L(t)$. 称 $\tilde{W}_R(t) [\tilde{V}_n(t)]^{-1}$ 为矩阵函数 $f(t)$ 的 $(n-1, n)$ 阶右矩阵 Padé-型逼近 (RMPTA), 记为 $(n-1/n)_f^R(t)$.

$f(t)$ 的 (m, n) 阶左、右矩阵 Padé-型逼近可以写成

$$(m/n)_f^L(t) = \sum_{i=0}^{m-n} c_i t^i + t^{m-n+1} [\tilde{V}_n(t)]^{-1} \tilde{W}_L(t)$$

$$(m/n)_f^R(t) = \sum_{i=0}^{m-n} c_i t^i + t^{m-n+1} \tilde{W}_R(t) [\tilde{V}_n(t)]^{-1}$$

式中