"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材　计算机系列教材

离散数学习题解答

（第3版）

邓辉文　编著

清华大学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材　计算机系列教材

邓辉文　编著

离散数学习题解答
（第3版）

清华大学出版社
北京

内容简介

清华大学出版社出版的《离散数学(第3版)》(ISBN 978-7-302-32827-8)是一本介绍离散数学经典内容的教材，全书共分8章，分别介绍集合、映射与运算，关系，命题逻辑，谓词逻辑，代数结构，图论，以及几类特殊的图及组合计数. 每节后面都有精选习题，本书是其教学辅导用书，对教材中的每个题目都给出了详尽的解答.

本书适合于选用清华大学出版社出版的《离散数学(第3版)》的广大师生作为辅导用书，也可供计算机专业考研学生、程序员及相关专业技术人员参考. 目前，已经完成14套考试用题.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解答/邓辉文编著. —3版. —北京：清华大学出版社，2013
计算机系列教材
ISBN 978-7-302-33113-1

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①邓… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－题解 Ⅳ. ①O158-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第155723号

责任编辑：汪汉友
封面设计：傅瑞学
责任校对：白 蕾
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：12 **字 数**：289千字
版 次：2006年9月第1版 2014年1月第3版 **印 次**：2014年1月第1次印刷
印 数：1～2000
定 价：24.00元

产品编号：053597-01

前　言

离散数学是计算机及相关专业的核心课程，是教育部2009年“高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案”研究中8门核心课程之一，在专业教学体系中起着重要的基础理论支撑作用，学好离散数学对于与计算机有关的其他专业课程的学习起着事半功倍的作用.

《离散数学》自出版以来被多所高校选用，已连续多次印刷，2012年被荣幸评为首批“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材. 根据教育部通知要求，入选教材应继续修订完善，及时补充反映最新知识、技术和成果的内容，与时俱进. 根据IEEE-CS/ACM Computing Curricula 2005，在原书的基础之上将初等数论知识融入在第1章和第2章，增加组合计数一章，同时加强了内容的历史发展和进一步待思考问题的概要说明，并做了如下改动：

(1) 在第1章中加入了数论中的基本内容，如素数、素因数分解、模运算、最大公因数、最小公倍数和欧拉函数等. 同时还给出了常见的证明方法：直接法、举反例法、数学归纳法和反证法等.

(2) 在第2章中，将整数集合 **Z** 上的整除、模同余关系作为 **Z** 上的关系很自然地引入，同时还介绍了线性同余方程或线性同余方程组.

(3) 由于教学时数和多数学校的教学现状，精简了代数结构内容.

(4) 由于组合计数在算法分析和设计中的重要性，并且是离散数学课程实施方案中的核心知识单元，属于必学内容，因此增加“组合计数”一章.

(5) 新增每章小结内容.

(6) 为检验学习效果，每章新增自测题及参考答案.

为了掌握离散数学理论知识，培养计算思维能力，一方面要深刻理解其有关概念，掌握重要结论，另一方面要多做练习以加深对离散数学内容的学习，这对于在计算机相关专业课程的学习中熟练应用有关离散数学知识是至关重要的.

虽然作者编写的《离散数学(第3版)》教材附录中有习题参考答案，但缺少具体的解答，使用过程中多有不便. 本书在教材的基础上，对其中的每个题目都进行了详尽的解答，希望能便于大家做完练习后参考，能起到举一反三、加深对课本内容学习和理解的作用，也为自学者提供方便.

本书适合于选用上述教材的所有师生，由于教材内容均是经典内容，也可供所有学习离散数学的学生、计算机程序员和计算机等级考试应试者作为参考用书.

希望本书能成为广大读者的学好离散数学的有力支撑. 作者虽尽心努力，但由于水平有限，对于书中的疏漏和不足之处，欢迎大家批评指正，特此致谢.

感谢重庆市2013年高等学校教学改革研究项目(编号：133013)资助。

编　者

2013年9月

目录

第1章 集合、映射与运算

1.1 集合的有关概念

【习题1.1】

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2-5x+6=0\}$；

(2) $\{2x \mid x \in \mathbf{N}\}$.

解 (1) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$.

(2) $\{2x \mid x \in \mathbf{N}\}=\{0,2,4,6,\cdots,2x,\cdots\}$.

2. 写出35的所有因数集合及D_{35}.

解 35的所有因数集合为$\{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$，$D_{35}=\{1, 5, 7, 35\}$.

3. 比较集合$\varnothing$，$\{\varnothing\}$和$\{\{\varnothing\}\}$的不同之处.

解 $\varnothing$是空集，它里面没有元素；$\{\varnothing\}$是由空集$\varnothing$组成的集合，它里面有一个元素$\varnothing$；$\{\{\varnothing\}\}$里面有一个元素为$\{\varnothing\}$，但$\{\varnothing\}$与$\varnothing$是不同的.

4. 判定下列断言是否成立，说明理由：

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$；

(2) $\varnothing \in \varnothing$；

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$；

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

解 (1) 成立，因为空集是任意集合的子集.

(2) 不成立，因为空集中不含任意元素.

(3) 成立，因为空集是任意集合的子集.

(4) 成立，因为$\{\varnothing\}$含有元素$\varnothing$.

5. 设A和B是集合，试举出使$A \in B$且$A \subseteq B$同时成立的例子.

解 例如$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,\{a,b\},c\}$，这时$A \in B$且$A \subseteq B$同时成立.

6. 对于任意集合A,B,C，判定下列断言是否成立，说明理由：

(1) 若$A \subseteq B$且$B \in C$，则$A \notin C$；

(2) 若$A \subseteq B$且$B \in C$，则$A \subseteq C$；

(3) 若$A \in B$且$B \in C$，则$A \in C$；

(4) 若$A \in B$且$B \in C$，则$A \subseteq C$.

解 (1) 不成立. 例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{a,b,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，这时有$A \subseteq B$且$B \in C$，而$A \in C$.

(2) 不成立. 例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{b,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，这时有$A \subseteq B$且$B \in C$，而$A \subseteq C$不成立.

(3) 不成立. 例如, $A=\{a,b\}$, $B=\{\{a,b\},c\}$, $C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$, 这时有 $A\in B$ 且 $B\in C$, 而 $A\notin C$.

(4) 不成立. 例如, $A=\{a,b\}$, $B=\{\{a,b\},c\}$, $C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$, 这时有 $A\in B$ 且 $B\in C$, 而 $A\subseteq C$ 不成立.

7. 分别计算:

(1) $P(P(\varnothing))$;

(2) $P(\{a, b, c\})$;

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})$.

解 (1) 因为 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, 所以 $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(2) $P(\{a, b, c\})=\{\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})=\{\varnothing, \{\{a,b,c\}\}\}$.

8. 试用乘法原理证明主教材定理 1-4.

证 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 对于 S 的任意子集 A, S 中的元素 x_1 可以属于 A, 也可以不属于 A, 有 2 种选取方式; 同样, 在元素 x_1 定下来以后, 再考虑 S 中的元素 x_2, 它可以属于 A, 也可以不属于 A, 有 2 种选取方式; …一直下去, 对于 S 中的最后一个元素 x_n, 它可以属于 A, 也可以不属于 A, 有 2 种选取方式. 于是, 根据乘法原理知, S 的子集共有 $\overbrace{2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2}^{n个}=2^n$ 个.

9. 证明主教材定理 1-5.

证 根据笛卡儿积的定义知, $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$. 由于这样的有序对 (x,y) 的第一位置元素 $x\in A$ 有 m 种选取方式, 第二位置元素 $y\in B$ 有 n 种选取方式, 因此根据乘法原理, $A\times B$ 中的有序对共有 mn 个, 所以 $|A\times B|=mn$.

10. 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$, 试分别计算:

$$A\times A, A\times B, B\times A, A\times B\times A, (A\times B)\times A.$$

解 计算结果分别为

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$,

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$,

$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$,

$A\times B\times A=\{(a,1,a),(a,1,b),(a,2,a),(a,2,b),(a,3,a),(a,3,b),$
$(b,1,a),(b,1,b),(b,2,a),(b,2,b),(b,3,a),(b,3,b)\}$,

$(A\times B)\times A=\{((a,1),a),((a,1),b),((a,2),a),((a,2),b),((a,3),a),((a,3),b),$
$((b,1),a),((b,1),b),((b,2),a),((b,2),b),((b,3),a),((b,3),b)\}$.

11. 对于任意集合 A,B,C, 由 $A\times B=A\times C$ 能否得出 $B=C$, 为什么? 若 $A\neq\varnothing$ 呢?

解 若 $A=\varnothing$, 取 $B=\{a,b\}$, $C=\{c,d\}$, 根据笛卡儿积的定义知 $A\times B=\varnothing$ 且 $A\times C=\varnothing$, 这时 $A\times B=A\times C$, 但 $B\neq C$.

若 $A\neq\varnothing$, 则存在元素 $a\in A$, 这时由 $A\times B=A\times C$ 可以得出 $B=C$; 对于任意 $x\in B$, 因为 $(a,x)\in A\times B$, 所以 $(a,x)\in A\times C$, 根据笛卡儿积的定义知 $x\in C$, 即有 $B\subseteq C$. 同理可得 $C\subseteq B$. 故 $B=C$.

12. 设$|S|=n$,给出一种列出 S 的所有子集的方法.

解 设$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,将 S 的所有子集 A 用长度为 n 的 0,1 字符串表示,其中字符串的第 i 位取 1 的充要条件是 $x_i \in A$.

于是,可以按从小到大的顺序列出所有长度为 n 的 0,1 字符串,再写出对应的子集,就可以将 S 的所有子集 A 列举出来.

注:此方法可用计算机实现.

1.2 映射的有关概念

【习题 1.2】

1. 分别计算$\lceil 1.5\rceil$,$\lceil -1\rceil$,$\lceil -1.5\rceil$,$\lfloor 1.5\rfloor$,$\lfloor -1\rfloor$,$\lfloor -1.5\rfloor$.

解 $\lceil 1.5\rceil=2$,$\lceil -1\rceil=-1$,$\lceil -1.5\rceil=-1$,$\lfloor 1.5\rfloor=1$,$\lfloor -1\rfloor=-1$,$\lfloor -1.5\rfloor=-2$.

2. 下列映射中,哪些是双射? 说明理由.

(1) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}, f(x)=3x$;

(2) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}, f(x)=|x|+1$;

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+1$;

(4) $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1$;

(5) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}, f(x)=(x,x+1)$.

解 (1) 对于任意对 $x_1,x_2\in\mathbf{Z}$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $3x_1=3x_2$,于是 $x_1=x_2$,所以 f 是单射.由于对任意 $x\in\mathbf{Z}$,$f(x)\neq 2\in\mathbf{Z}$,因此 f 不是满射,进而 f 不是双射.

(2) 由于 $2,-2\in\mathbf{Z}$ 且 $f(2)=f(-2)=3$,因此 f 不是单射.又由于 $0\in\mathbf{N}$,而任意 $x\in\mathbf{Z}$ 均有 $f(x)=|x|+1\neq 0$,于是 f 不是满射.显然,f 不是双射.

(3) 对于任意对 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1^3+1=x_2^3+1$,于是 $x_1=x_2$,所以 f 是单射.对于任意 $y\in\mathbf{R}$,取 $x=(y-1)^{1/3}$,这时

$$f(x)=x^3+1=[(y-1)^{1/3}]^3+1=(y-1)+1=y$$

所以 f 是满射.进而 f 是双射.

(4) 由于$(1,2),(2,1)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 且$(1,2)\neq(2,1)$,而 $f(1,2)=f(2,1)=4$,因此 f 不是单射.又由于 $0\in\mathbf{N}$,而任意$(x_1,x_2)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 均有 $f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1\neq 0$,于是 f 不是满射.显然,f 就不是双射.

(5) 由于 $x_1,x_2\in\mathbf{N}$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则$(x_1,x_1+1)=(x_2,x_2+1)$,于是 $x_1=x_2$,因此 f 是单射.又由于$(0,0)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$,而任意 $x\in\mathbf{N}$ 均有 $f(x)=(x,x+1)\neq(0,0)$,于是 f 不是满射.因为 f 不是满射,所以 f 不是双射.

3. 对于有限集合 A 和 B,假定 $f:A\to B$ 且$|A|=|B|$,证明:f 是单射的充要条件是 f 是满射.对于无限集合,上述结论成立吗? 举例说明.

证 ($\Rightarrow$)因为 f 是单射,所以$|A|=|f(A)|$.由于$|A|=|B|$,所以$|f(A)|=|B|$.又因为 B 有限且 $f(A)\subseteq B$,故 $f(A)=B$,即 f 是满射.

($\Leftarrow$)若 f 是满射,则 $f(A)=B$.由于$|A|=|B|$,于是$|A|=|f(A)|$.又因为 A 和 B 是有限集合,因此 f 是单射.

对于无限集合,上述结论不成立.例如 f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,$f(x)=2x$,f 是单射,但 f 不是满射.

4. 设 $f:A\to B$,试证明:

(1) $f\circ I_B=f$;

(2) $I_A\circ f=f$.

特别地,若 $f:A\to A$,则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

证 (1) 对于任意 $x\in A$,由于 $f(x)\in B$,所以 $(f\circ I_B)(x)=I_B(f(x))=f(x)$,因此 $f\circ I_B=f$.

(2) 对于任意 $x\in A$,由于 $I_A(x)=x$,所以 $(I_A\circ f)(x)=f(I_A(x))=f(x)$,于是有 $I_A\circ f=f$.

由(1)和(2)知,若 $f:A\to A$,则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

5. 试举出一个例子说明 $f\circ f=f$ 成立,其中 $f:A\to A$ 且 $f\neq I_A$. 若 f 的逆映射存在,满足条件的 f 还存在吗?

解 令 $A=\{a,b,c\}$,$f(a)=f(b)=f(c)=a$,即对于任意 $x\in A$,$f(x)=a$,显然 $f:A\to A$ 且 $f\neq I_A$. 而对于任意 $x\in A$,有 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(a)=a$,因此 $f\circ f=f$.

若 $f\circ f=f$ 且 f 的逆映射 f^{-1} 存在,由第 4 题知 $f\circ f=f=f\circ I_A$,所以 $f^{-1}\circ(f\circ f)=f^{-1}\circ(f\circ I_A)$,于是利用主教材定理 1-12 有 $(f^{-1}\circ f)\circ f=(f^{-1}\circ f)\circ I_A$,进而 $I_A\circ f=I_A\circ I_A$,因此 $f=I_A$. 所以若 f 的逆映射存在,满足条件的 f 不存在.

6. 设 $f:A\to B$,$g:B\to C$. 若 f 和 g 是满射,则 $f\circ g$ 是满射,试证明.

证 因为 f 是满射,所以 $f(A)=B$. 又因为 g 是满射,所以 $g(B)=C$. 于是 $(f\circ g)(A)=g(f(A))=g(B)=C$,因此 $f\circ g$ 是 A 到 C 的满射.

另证 对于任意 $z\in C$,因为 g 是满射,于是存在 $y\in B$ 使得 $g(y)=z$. 又因为 f 是满射,存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$. 因此,$(f\circ g)(x)=g(f(x))=g(y)=z$,所以 $f\circ g$ 是 A 到 C 的满射.

7. 设 $f:A\to B$,$g:B\to C$. 试证明:若 $f\circ g$ 是单射,则 f 是单射. 试举例说明,这时 g 不一定是单射.

证 对于任意 $x_1,x_2\in A$,假定 $f(x_1)=f(x_2)$,则显然 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$,即 $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$. 因为 $f\circ g$ 是单射,所以 $x_1=x_2$,于是 f 是单射.

例如 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$,令 $f(a)=1$,$f(b)=2$,$g(1)=\alpha$,$g(2)=\beta$,$g(3)=\beta$,则显然有 $(f\circ g)(a)=g(f(a))=g(1)=\alpha$,$(f\circ g)(b)=g(f(b))=g(2)=\beta$,于是 $f\circ g$ 是 A 到 C 的单射,但 g 显然不是单射.

8. 设 $f:A\to B$,若存在 $g:B\to A$,使得 $f\circ g=I_A$ 且 $g\circ f=I_B$,试证明:f 是双射且 $f^{-1}=g$.

证 因为 $f\circ g=I_A$,而 I_A 是单射,所以 f 是单射. 又因为 $g\circ f=I_B$,而 I_B 是满射,所以 f 是满射. 因此 f 是双射.

由于 f 是双射,所以 f^{-1} 存在. 因为 $f\circ g=I_A$,于是 $f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I_A$. 而 $(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ I_A$ 且 $I_B\circ g=f^{-1}$,所以有 $f^{-1}=g$.

9. 设 $f:A\to B$,$g:B\to C$. 若 f 和 g 是双射,则 $f\circ g$ 是双射且 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

证 根据主教材中定理 1-10(1)(2)知,$f\circ g$ 是双射. 下证 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$. 因为

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=f\circ(g\circ g^{-1})\circ f^{-1}=f\circ I_B\circ f^{-1}=f\circ f^{-1}=I_A,$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=g^{-1}\circ(f^{-1}\circ f)\circ g=g^{-1}\circ I_B\circ g=g^{-1}\circ g=I_C,$$

在上面的推导中多次利用了主教材中定理 1-12. 由第 7 题知，$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

10. 设 G 是集合 A 到 A 的所有双射组成的集合，证明：

(1) 任意 $f,g\in G$，有 $f\circ g\in G$；

(2) 对于任意 $f,g,h\in G$，有 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$；

(3) $I_A\in G$ 且对于任意 $f\in G$，有 $I_A\circ f=f\circ I_A=f$；

(4) 对于任意 $f\in G$，有 $f^{-1}\in G$ 且 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$.

证 (1) 由主教材中定理 1-10.

(2) 由主教材中定理 1-12.

(3) 由第 4 题.

(4) 由主教材中定理 1-9.

11. 若 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，问 A 到 B 的满射、单射、双射各有多少个？试推广你的结论.

解 将 A 中的 3 个元素对应到 B 中的 2 个元素，相当于将 3 个元素分成 2 部分，共有 3 种分法；在计算 A 到 B 的满射个数时还需要将 B 中元素进行排列，共有 2 种排列方式，于是 A 到 B 的满射共有 $3\times2=6$ 个(请自己分别写出 A 到 B 的 6 个满射).

由于 $|A|=3$，$|B|=2$，所以 A 到 B 的单射没有，进而 A 到 B 的双射也没有.

假设 $|A|=m$，$|B|=n$.

(1) A 到 B 的满射　若 $m<n$，不存在满射；若 $m\geqslant n$，先将 m 个元素划分成 n 个块(参见 1.5 节)，共有 $S(m,n)$ 种方式；再将 B 中元素进行全排列，共有 $n!$ 种方式，于是 A 到 B 的满射共有 $S(m,n)\cdot n!$ 个.

(2) A 到 B 的单射　若 $m>n$，不存在单射；若 $m\leqslant n$，由于 B 中任意选取 m 个元素，再将其进行全排列都得到 A 到 B 的单射，故 A 到 B 的单射共有 $C_n^m\cdot m!$ 个.

(3) A 到 B 的双射　若 $m\neq n$，不存在双射；若 $m=n$，此时 B 中元素的任意一个排列均可得到一个 A 到 B 的双射，因此 A 到 B 的双射共有 $m!$ 个.

12. 设 A，B，C，D 是任意集合，f 是 A 到 B 的双射，g 是 C 到 D 的双射，令 $h:A\times C\to B\times D$，对任意 $(a,c)\in A\times C$，$h(a,c)=(f(a),g(c))$. 证明：h 是双射.

证 对于任意 $(a_1,c_1)\in A\times C$，$(a_2,c_2)\in A\times C$，假定 $h(a_1,c_1)=h(a_2,c_2)$，即 $(f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$，于是 $f(a_1)=f(a_2)$ 且 $g(c_1)=g(c_2)$，根据已知条件有 $a_1=a_2$ 且 $c_1=c_2$，进而 $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$，因此 h 是单射.

任意 $(b,d)\in B\times D$，则 $b\in B$，$d\in D$，由于 f 是 A 到 B 的双射且 g 是 C 到 D 的双射，于是存在 $a\in A$，$c\in C$ 使得 $f(a)=b$，$g(c)=d$，因此 $h(a,c)=(f(a),g(c))=(b,d)$，所以 h 是满射.

故 h 是双射.

13. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to A$. 证明：若 $f\circ g\circ h=I_A$，$g\circ h\circ f=I_B$，$h\circ f\circ g=I_C$，则 f，g，h 均可逆. 求出 f^{-1}，g^{-1}，h^{-1}.

证 因为恒等映射是双射，多次使用主教材中定理 1-12 即可得结论.

解 由于 $f\circ g\circ h=I_A$，所以 f 是单射且 h 是满射. 由于 $g\circ h\circ f=I_B$，所以 g 是单射且 f 是满射. 由于 $h\circ f\circ g=I_C$，所以 h 是单射且 g 是满射. 于是 f,g,h 是双射，因此 f,g,h 均可逆.

由于 $f\circ g\circ h=I_A$，所以 $f^{-1}=g\circ h$ 且 $h^{-1}=f\circ g$，进而 $g^{-1}=h\circ f$.

14. 已知阿克曼(Ackermann)函数 $A:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的定义为

(1) $A(0,n)=n+1, n\geqslant 0$;

(2) $A(m,0)=A(m-1,1), m>0$;

(3) $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1)), m>0, n>0$.

分别计算 $A(2,3)$ 和 $A(3,2)$.

解 由已知条件有 $A(0,1)=2, A(1,0)=A(0,1)=2$,于是

$$A(1,1)=A(0,A(1,0))=A(0,2)=2+1=3,$$
$$A(1,2)=A(0,A(1,1))=A(0,3)=3+1=4,$$

由此可进一步得出

$$A(1,n)=n+2,$$
$$A(2,0)=A(1,1)=3,$$
$$A(2,1)=A(1,A(2,0))=A(1,3)=3+2=5,$$
$$A(2,2)=A(1,A(2,1))=A(1,5)=5+2=7,$$
$$A(2,3)=A(1,A(2,2))=A(1,7)=7+2=9.$$

因此有

$$A(2,n)=2n+3,$$
$$A(3,0)=A(2,1)=2\cdot 1+3=5,$$
$$A(3,1)=A(2,A(3,0))=A(2,5)=2\cdot 5+3=13,$$
$$A(3,2)=A(2,A(2,2))=A(2,13)=2\cdot 13+3=29.$$

所以有 $A(2,3)=9, A(3,2)=29$.

1.3 运算的定义及性质

【习题 1.3】

1. 分别判定取绝对值运算 $\|$、加法运算 $+$、减法运算 $-$、取大运算 max、取小运算 min 是否为自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的代数运算.

解 因为对于任意 $x\in\mathbf{N}, |x|\in\mathbf{N}$,所以取绝对值运算 $\|$ 是 $\mathbf{N}$ 上的 1 元代数运算. 又因为对于任意 $x,y\in\mathbf{N}$,有 $x+y, \max(x,y), \min(x,y)\in\mathbf{N}$,因此加法运算 $+$、取大运算 max、取小运算 min 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代数运算.

而对于 $2,3\in\mathbf{N}$,由于 $2-3=-1\notin\mathbf{N}$,所以减法运算 $-$ 不是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代数运算.

2. 证明:集合 $A=\{3^n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 关于数的加法运算不封闭.

证 由于 $3^1, 3^2\in A$,而 $3^1+3^2=12\notin A$,所以 A 关于数的加法运算不封闭.

3. 设 $A=\{a,b,c\}$,求出 A 上的 2 元代数运算的个数.

解 考虑 A 关于 2 元代数运算 $*$ 的运算表,在运算表中需要填运算结果的有 $3\times 3=9$ 个位置,而显然每个位置填 a,b,c 中任意一个元素均可,于是任意一种填充元素的方法都是 A 上一种代数运算,因此 A 上的 2 元代数运算的个数为 3^9.

4. 将十进制数 365 转换成八进制.

解 因为 $365=45\times 8+5, 45=5\times 8+5$,于是

$$365 = 45\times 8+5=(5\times 8+5)\times 8+5=5\times 8^2+5\times 8+5,$$

因此，$365=(555)_8$.

5. 分别计算 $16(\bmod 3)$，$-16(\bmod 3)$，$0(\bmod 3)$.

解 因为 $16=5\times 3+1$，$-16=(-6)\times 3+2$，$0=0\times 3+0$，所以 $16(\bmod 3)=1$，$-16(\bmod 3)=2$，$0(\bmod 3)=0$.

6. 利用素因数分解计算 $\gcd(36, 48)$ 和 $\mathrm{lcm}(36, 48)$.

解 因为 $36=2^2\times 3^2$，$48=2^4\times 3$，于是 $\gcd(36, 48)=2^2\times 3=12$，$\mathrm{lcm}(36, 48)=2^4\times 3^2=144$.

7. 使用欧几里得算法，计算 $\gcd(14, 158)$ 并求出整数 x 和 y 使得 $\gcd(14, 158)=14x+158y$.

解 因为 $158=11\times 14+4$，$14=3\times 4+2$，$4=2\times 2$，所以 $\gcd(14,158)=2$. 由于 $2=14-3\times 4$，$4=158-11\times 14$，于是 $2=14-3\times(158-11\times 14)=14\times 4+158\times(-3)$.

8. 设 $A=\{1,2,3\}$，试根据所给定的运算表 1-1 和表 1-2 分别讨论其幂等性、交换性以及是否有单位元素，若有，请指出 A 中各元素的逆元素.

解 (1) 在表 1-1 中，由于 $3*3=2$，于是 $*$ 不满足幂等性. 因为 $*$ 运算表是对称的，所以 $*$ 满足交换性. 又因为对于任意 $x\in A$，有 $1*x=x*1=x$，因此 1 是 $*$ 运算的单位元素. 从运算表可知，1 的逆元为 1，2 和 3 都没有逆元.

(2) 在表 1-2 中，由于对于任意 $x\in A$，有 $x*x=x$，于是 $*$ 满足幂等性. 因为 $2*3=2\neq 3*2=1$，所以 $*$ 不满足交换性. 又因为对于任意 $x\in A$，有 $1*x=x*1=x$，因此 1 是 $*$ 运算的单位元素. 从运算表可知，1 的逆元为 1，2 和 3 都没有逆元(3 的右逆元为 2，2 的左逆元为 3).

表 1-1

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	2

表 1-2

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	2
3	3	1	3

9. 整数集合 **Z** 上的取大运算 max 和取小运算 min 相互可吸收. 试证明之.

证 由于 max 和 min 运算可交换，且对于任意 $x, y\in \mathbf{Z}$，无论 $x=y$，$x>y$ 还是 $x<y$，显然都有

$$\max(x,\min(x,y))=x$$

以及

$$\min(x,\max(x,y))=x,$$

所以 **Z** 上的取大运算 max 和取小运算 min 相互可吸收.

10. 设 $\mathbf{R}[x]$ 表示实数集 **R** 上的所有关于 x 的一元多项式组成的集合，试验证：

(1) 多项式的加法运算和多项式的乘法运算均满足结合律；

(2) 多项式的乘法运算对多项式的加法运算可分配.

解 (1) 对于任意 $A(x), B(x), C(x)\in \mathbf{R}[x]$，显然有

$$(A(x)+B(x))+C(x)=A(x)+(B(x)+C(x)),$$
$$(A(x)B(x))C(x)=A(x)(B(x)C(x)),$$
所以多项式的加法运算和多项式的乘法运算均满足结合律.

(2) 对于任意 $A(x),B(x),C(x)\in\mathbf{R}[x]$，由于多项式的乘法运算满足交换律且显然有
$$A(x)(B(x)+C(x))=A(x)B(x)+A(x)C(x)$$
多项式的乘法运算对多项式的加法运算可分配.

11. 设 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 表示实数集 $\mathbf{R}$ 上的所有 n 阶方阵组成的集合.

(1) 试验证:矩阵的乘法运算对矩阵的加法运算可分配.

(2) $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵乘法的单位元素是什么? $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 中哪些元素关于乘法运算有逆元?

解 (1) 显然,对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，根据线性代数知
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}\text{ 且 }(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA},$$
因此,矩阵的乘法运算对矩阵的加法运算可分配.

(2) 由于 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，且对于任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，根据线性代数知
$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A},$$
所以, n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵乘法的单位元素.

同样根据线性代数知, $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 中只有可逆矩阵才有逆元.

12. 令 $\mathbf{Z}_m=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$, $\mathbf{Z}_m$ 上的两个 2 元运算分别是模 m 的加法运算“$+_m$”和模 m 的乘法运算“$\cdot_m$”: 任意 $x,y\in\mathbf{Z}_m$, $x+_m y=(x+y)\bmod m$, $x\cdot_m y=(xy)\bmod m$.

(1) 写出 $\mathbf{Z}_6$ 关于 $+_6$ 和 $\cdot_6$ 的运算表.

(2) 证明: $\cdot_m$ 运算对 $+_m$ 运算可分配.

解 (1) $\mathbf{Z}_6$ 关于 $+_6$ 和 $\cdot_6$ 的运算表分别见表 1-3 和表 1-4.

表 1-3

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

表 1-4

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4

续表

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

(2) 对于任意 $x,y,z\in \mathbf{Z}_m$，由于乘法运算可交换且 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$，因此有

$$x\cdot_m(y+_m z)=x\cdot_m y+_m x\cdot_m z,$$

所以 $\cdot_m$ 运算对 $+_m$ 运算可分配.

13. 试验证：$\mathbf{Z}$ 关于加法运算$+$和减法运算$-$均没有零元素，而 $\mathbf{Z}$ 关于乘法运算“$\cdot$”的零元素为 0.

解　若 θ 是 $\mathbf{Z}$ 关于加法运算$+$的零元素，则对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，均有 $x+\theta=\theta+x=\theta$，这显然是不可能的.

同样，若 θ 是 $\mathbf{Z}$ 关于减法运算$-$的零元素，则对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，均有 $x-\theta=\theta-x=\theta$，这显然也是不可能的.

对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，因为 $x\cdot 0=0\cdot x=0$，所以 $\mathbf{Z}$ 关于乘法运算$\cdot$的零元素为 0.

14. 试举例说明，映射的复合运算“$\circ$”不具有消去性.

解　例如取 $A=\{a,b,c\}$，$f(a)=f(b)=f(c)=a$，则经过计算可知 $f\circ f=f\circ I_A$，但 $f\neq I_A$，这说明映射的复合运算$\circ$不具有消去性.

15. 令 G 表示集合 $S=\{1,2,3\}$ 上所有置换组成的集合.

(1) 列出 G 关于复合映射“$\circ$”的运算表.

(2) 指出 G 关于复合映射“$\circ$”的单位元素及 G 中每个元素的逆元.

解　(1) 由 1.2 节例 1-10 知，$S=\{1,2,3\}$ 上所有置换分别为

$p_1(1)=1,\ p_1(2)=2,\ p_1(3)=3;\quad p_2(1)=2,\ p_2(2)=1,\ p_2(3)=3;$

$p_3(1)=3,\ p_3(2)=2,\ p_3(3)=1;\quad p_4(1)=1,\ p_4(2)=3,\ p_4(3)=2;$

$p_5(1)=2,\ p_5(2)=3,\ p_5(3)=1;\quad p_6(1)=3,\ p_6(2)=1,\ p_6(3)=2.$

列出 G 关于映射的复合$\circ$的运算表如表 1-5 所示（参见 5.3 节表 5-6 关于置换的复合$\circ$的运算表）.

表　1-5

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_6	p_1	p_5	p_4	p_2
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_6	p_1
p_6	p_6	p_3	p_4	p_2	p_1	p_5