高等学校教材

线性代数及其应用

Linear Algebra and Its Applications

宋叔尼 阎家斌 陆小军 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数及其应用

Xianxing Daishu jiqi Yingyong

宋叔尼　阎家斌　陆小军　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书介绍了行列式、矩阵、向量线性关系及矩阵的秩、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等内容。全书涵盖了全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容，且书后给出了部分习题答案或提示，以便于读者自学与复习。

全书力求将数学与应用相结合，内容系统、丰富、精炼，突出了知识的模块化结构编排，可读性强。书中不乏作者自己的独到创意。

本书可供高等学校非数学类各专业使用，也可供广大科技工作者或有兴趣的读者阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/宋叔尼，阎家斌，陆小军编. --北京：高等教育出版社，2014.2

ISBN 978-7-04-029298-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①宋…②阎…③陆… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 017205 号

策划编辑 贾翠萍	责任编辑 贾翠萍	特约编辑 董达英	封面设计 张申申
版式设计 马敬茹	插图绘制 尹 莉	责任校对 李大鹏	责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市四季青双青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	12.5	版 次	2014 年 2 月第 1 版
字 数	220 千字	印 次	2014 年 2 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	18.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 29298-00

前　言

线性代数是讲授代数学中线性关系经典理论的课程，它的基本概念、理论和方法具有较高的抽象性、较强的逻辑性和广泛的适用性，是理工及经济管理等学科大学生的重要数学基础课程。随着计算机的迅速发展，科学计算在工程技术中的重要性日益凸显，线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，许多实际问题也可以直接或通过离散化、线性化等转化成为线性方程组问题或矩阵问题。用矩阵方法解决实际问题已渗透到众多领域，因此线性代数已经成为自然科学、经济科学和工程技术领域中广泛使用的数学工具，其理论和方法得到了广泛的应用，尤其在信息科学日益发展的今天，该课程的地位与作用显得更加重要。

本教材在邢伟、李建华、樊复生所编《线性代数与空间解析几何》教材的基础上编写，在保留原教材风格和特色等优点的同时，根据线性代数教学的具体情况，在内容的处理上更加突出主题。例如，起点适当放低：开始的内容与中学代数接轨，从中学生熟悉的内容解线性代数方程组讲起，引入二、三阶行列式，并利用归纳法定义一般行列式，直接推导行列式的一系列性质；坡度适中：教材章节编排尽量使难点分散，在由浅入深的过程中注重逐步过渡。全书涵盖了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容，书中绝大多数习题书后都给出了答案或提示，以便于读者自学与复习。本书注意理论联系实际，每章最后一节加入相关知识的应用，利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念，拓宽学生的视野，培养学生应用代数知识解决实际问题的能力；本书不含空间解析几何的内容。

本书形成过程中，得到了东北大学教务处的大力支持，获得了高等教育出版社数学分社的有力支持，借此表示衷心感谢。初稿在试用过程中，东北大学数学系的许多老师提出了宝贵意见，作者在此向他们表示由衷的谢意。

全书由宋叔尼、阎家斌、陆小军负责编写。

编者

2013 年 6 月

目　　录

第一章　行　列　式

一般认为,行列式起源于线性方程组的求解问题.早在1693年德国数学家Leibniz(莱布尼茨)就使用了行列式,1750年,瑞士数学家Cramer(克拉默)建立了求解线性方程组的行列式基本公式.今天,行列式已经是数学中的一个基本概念.

第一节　二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

易知,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,式(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_1=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

这种解的表达式,略显凌乱.如果引入了二阶行列式的概念,情况就不一样了.

所谓二阶行列式,是由四个数,如 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$,排成含有两行两列的形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的式子,它表示一个数值,其展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即位于行列式的主对角线(从左上角到右下角的连线)上两个元素 a_{11},a_{22} 的乘积减去位于次对角线(从右上角到左下角的连线)上两个元素 a_{12},a_{21} 的乘积.

例 1.1　计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2.$

有了二阶行列式的概念,我们再来看方程组(1.1)的解的表达式.令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

行列式 D 是由方程组(1.1)的系数构成的,称为方程组(1.1)的系数行列式,而 $D_i(i=1,2)$ 是系数行列式 D 的第 i 列由方程组(1.1)的常数项列代换而得.现在,前面关于方程组(1.1)的结论就可以简单地叙述为

当方程组(1.1)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组有唯一解:$x_i=D_i/D(i=1,2)$.这个结论就是著名的 Cramer 法则,也有人称其为 Cramer 定理.

类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

利用消元方法可得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

为了便于描述方程组(1.2)的解,可以引进三阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

例 1.2 计算 $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}=90+20+1-45-5-8=53,$

或

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}=9\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=9\cdot 5-1\cdot(-15)+1\cdot(-7)=53.$$

对于三元线性方程组(1.2),与二元的情况一样,仍然有 Cramer 法则成立:当(1.2)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2)有唯一解:$x_i=D_i/D(i=1,2,3)$,

其中 D_i 是系数行列式 D 的第 i 列由方程组(1.2)的常数项列代换而得.

用行列式表达方程组的解是非常清晰且易于接受的.自然要问:对于四元或四元以上的线性方程组,还有没有相应的 Cramer 法则呢?

回答是肯定的.下面引进一般阶(包括二、三阶)行列式的定义.

第二节　一般阶行列式的定义

上节,通过二阶行列式定义了三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

如果记一元线性方程组 $a_{11}x_1=b_1$ 对应的一阶行列式为

$$|a_{11}|=a_{11},$$

也可以通过一阶行列式定义二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|.$$

自然地可以设想,用这种思想来定义一般阶行列式.

定义 1.1　所谓 n 阶行列式,是由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 行 n 列的形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的式子,它表示一个数值,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{1.3}$$

其中,$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 为行列式的第 i 行、第 j 列的元素,$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$,$M_{1j}$ 为 D 中划掉第一行和第 j 列的全部元素后,按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

在(1.3)式中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线.

例 1.3　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}.$$

这种行列式称为 n 阶对角行列式.(行列式中未写元素的位置表示该元素为零.)

解　根据行列式的定义

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3,$$

…………

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & & & \\ & a_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=\cdots=a_1a_2\cdots a_n,$$

因此，对角行列式的值为主对角线元素之积，$D_n=a_1a_2\cdots a_n$.

例 1.4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这种行列式称为(n 阶)下三角形行列式.

解　根据行列式的定义

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33},$$

…………

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

因此，下三角形行列式的值为主对角线元素之积，$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 1.5　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & b_n \\ & & b_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ b_1 & & & \end{vmatrix}.$$

解　根据行列式的定义

$$D_2=\begin{vmatrix} & b_2 \\ b_1 & \end{vmatrix}=-b_1b_2,$$

$$D_n=(-1)^{1+n}b_n\begin{vmatrix} & & b_{n-1} \\ & b_{n-2} & \\ \iddots & & \\ b_1 & & \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}b_nD_{n-1}=(-1)^{n-1}b_nD_{n-1},$$

由上述递推关系，

$$\begin{aligned} D_n&=(-1)^{n-1}b_nD_{n-1}=(-1)^{n-1}b_n(-1)^{n-2}b_{n-1}D_{n-2}\\ &=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^2b_nb_{n-1}\cdots b_3D_2\\ &=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^2(-1)b_nb_{n-1}\cdots b_3b_2b_1\\ &=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}b_nb_{n-1}\cdots b_3b_2b_1.\\ &=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1b_2\cdots b_n. \end{aligned}$$

例如，取 $n=4$，$n=5$ 可以得到

$$D_4=b_1b_2b_3b_4,$$
$$D_5=b_1b_2b_3b_4b_5.$$

第三节　行列式的性质

按定义，一阶行列式就是一个数；二阶行列式可以展开成两个一阶行列式，即可以化成 2 项两个元素乘积的代数和；三阶行列式可以展开成三个二阶行列式，即可以化成 6 项三个元素乘积的代数和. 一般地，n 阶行列式可以展开成 n 个 $n-1$

阶行列式,即可以化成 $n!$ 项 n 个元素乘积的代数和. 可见,计算一个 n 阶行列式需要做的乘法次数为 $(n-1)n!$ 次. 例如,计算一个 5 阶行列式需要作 480 次乘法运算,计算一个 10 阶行列式需要作 32 659 200 次乘法运算,计算量很可观. 但计算对角行列式、三角形行列式的计算量并不大的. 下面我们将推导出行列式的一些性质,为行列式的计算做准备.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为 D 的转置行列式. D^{T} 可以看成是 D 的元素以主对角线为轴翻转 180°所得,亦可看成是将 D 的所有行(列)按序写成所有列(行)所得(即所谓行列互换).

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 将等式两端的行列式分别记作 D 和 D^{T},对行列式的阶数用数学归纳法.

当 $n=2,n=3$ 时,可以直接计算出 $D=D^{\mathrm{T}}$ 成立,假设结论对阶数小于 n 的行列式都成立,下面考虑 n 阶的情况.

根据定义及归纳法假设,

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

$$+(-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

把上面除 A_{11} 以外的 $n-1$ 个 $n-1$ 阶行列式都按定义展开，并将含 a_{12} 的项合并在一起，其值恰好等于 $a_{12}A_{12}$. 事实上，利用行列式定义及归纳法假设，

$$-a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\left\{a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\right\}$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}M_{12}=a_{12}A_{12}.$$

类似地，把含 a_{13} 的项合并后其值等于 $a_{13}A_{13}$，……，把含 a_{1n} 的项合并后其值等于 $a_{1n}A_{1n}$，因此

$$D^{\mathrm{T}}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=D.$$ □

由该性质，行列式中关于行所具有的性质，关于列也同样具有. 因而，下面关于行列式的性质将仅对行叙述.

例 1.6　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是一个主对角线（即左上角到右下角这条连线）之下的元素都是 0 的行列式，这样的行列式叫做上三角形行列式.

解　由性质 1.1 和例 1.4 知，$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

性质 1.2　对行列式(1.3)中的任一行按下式展开，其值相等，即等于行列式的值.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1.4}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 为 D 中划掉第 i 行和第 j 列的全部元素后，按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

证 对行列式的阶数用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，可以直接计算出结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶的行列式成立，下面考虑 n 阶的情况.

根据定义

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots \\ &\quad +(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由归纳法假设，把上面 n 个$n-1$ 阶行列式都按第 $i-1$ 行展开，并将含 a_{i1} 的项合并在一起，其值恰好等于 $a_{i1}A_{i1}$. 事实上(不妨取 $i=2$)，

$$(-1)^{1+2}a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2}a_{21}\left\{a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}\right\}$$

$$=(-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}=a_{21}A_{21}.$$

类似地，把含 a_{22} 的项合并后其值等于 $a_{22}A_{22}$，……，把含 a_{2n} 的项合并后其值等于 $a_{2n}A_{2n}$，因此，$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}$. □

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ 中，元素 $a_{12},a_{14},a_{32},a_{44}$ 的余子式分别为 $M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}=0$，$M_{14}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-2$，$M_{32}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}=-3$，$M_{44}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$，相应的代数余子式分别为 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=0$，$A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=2$，$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=3$，$A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=0$. 所以，将行列式 D 分别按第 1 行、第 3 行、第 4 列展开得

$$D=2A_{12}+3A_{14}=6,$$
$$D=2A_{32}=6,$$
$$D=3A_{14}+9A_{44}=6.$$

性质 1.3　行列式某行有公因子可以按行提取公因子，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

证　利用性质 1.2，把(1.5)式中等号两端的行列式按第 i 行展开，左边提出 k 即得. □

推论　行列式中某一行元素全为零时，行列式为零.

性质 1.4　行列式的拆行相加性，即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n$.

证　利用性质 1.2，把(1.6)式中等号两端的行列式都按第 i 行展开，整理即得. □

性质 1.5　行列式两行对应元素全相等，则该行列式为零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad (1\leqslant k<l\leqslant n), \tag{1.7}$$

其中 $a_{ki}=a_{li}(i=1,2,\cdots,n)$.

证　利用数学归纳法，对于二阶行列式，(1.7)式显然成立.

假设(1.7)式对于 $n-1$ 阶行列式成立，即如果 $n-1$ 阶行列式两行相同，则值为零. 在 n 阶的情况下，对行列式 D 按第 j 行展开($j\neq k,l$)，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}.$$