重庆邮电大学
出版基金资助

不使用行列式的代数体系基础理论十一讲

王海东 著

吉林大学出版社

不使用行列式的代数体系基础理论十一讲

王海东 著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

不使用行列式的代数体系基础理论十一讲/王海东著.
—长春:吉林大学出版社,2011.11
ISBN 978-7-5601-7877-6

Ⅰ.①不… Ⅱ.①王… Ⅲ.①代数—研究 Ⅳ.①015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 232760 号

书　名:不使用行列式的代数体系基础理论十一讲
作　者:王海东　著

责任编辑、责任校对:赵洪波　张宏亮　　封面设计:王　峥
吉林大学出版社出版、发行　　长春市利源彩印有限公司　印刷
开本:850×1168 毫米　1/32　　2011 年 11 月第 1 版
印张:5　　字数:120 千字　　2011 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5601-7877-6　　定价:13.50 元

社址:长春市明德路 501 号　邮编:130021
发行部电话:0431-89580026/28/29
网址:http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

在现行的所有高等代数和线性代数教材中，行列式是非常重要的一章，因为行列式是一个非常重要的工具。但行列式的理论对于初学者（特别是非数学专业的学生）接受起来是有一定难度的，有的学生到了期末考试的时候还是不能正确地计算高阶行列式的值，更有甚者连行列式和矩阵都分不清。因此，从教学的角度考虑在代数体系中不使用行列式的问题是有意义的。

本书的写作宗旨是阐述不使用行列式的代数理论体系的理论基础。与通常意义下的代数体系相比，其特点是不使用行列式。在这个理论体系下，通常意义下的高等代数和线性代数的所有功能都得到了保留，并得到了新的方法，根据这些新方法编制的程序是方便计算机执行运算的。

为了简单明了地介绍这个理论基础，在本书的写作过程中，假定读者已经具备了高等代数的基础知识，特别是一些定理的证明过程没有给出，原因是这些定理在新旧两种代数体系下的证明是相同的，而且都是与行列式无关的；对于那些其证明与行列式有关的定理，都给出了与行列式无关的证明。因此本书的读者对象是大学数学教师、数学专业的研究生。

目　录

第一讲 行列式的作用及其局限性

自从 1693 年 Leibniz 引入行列式以来，行列式理论在数学上(特别是在线性代数中)一直占据着重要的地位，但由于行列式理论是线性代数中学生感到困难的两大块之一，如果没有行列式理论将使代数理论总量变小，因此代数将变得易学易教. 正是这个原因，取消行列式理论是所希望的，但教育部“九五”规划教材、“九五”国家重点教材、普通高等教育“十五”国家级规划教材、“面向21 世纪教材”、“面向 21 世纪课程教材”、“21 世纪高等学校教材”等系列出版工程出版的线性代数或相关教材(参见[3]、[4])，最大的改革是淡化行列式，即作为方阵的函数，而理论体系基本未变.

一些人认为行列式是不可替代的，这是一个思想的误区. 事实上，Cayley 在 1855 年建立矩阵代数理论时，他相信矩阵代数将会得到发展，甚至夺去行列式的光彩，他曾这样写到：“在我看来，有许多事情说明这一矩阵理论将优于行列式理论.”最早是苏联数学家马里茨夫，他在其著作《线性代数基础》中尝试了一个尽量不使用行列式的体系，但是他在求特征值与特征向量时，又不得不使用行列式. 后来 Meyer C. D 在其著作《Matrix analysis and applied linear algebra》也是遵循了马里茨夫的思想. 尽管如此，上述两本著作的历史作用是不可忽视的，因为它们不仅表现了希望不使用行列式的意愿，也表现了在线性代数中行列式的作用可以淡化的. 近年来，我国也有一些从事数学教育的人士(如曹重光教授)为此作了一些有益的工作(见参考文献[5]至[17]). 作者通过对高等代

数的深入研究后得出结论：可以在代数体系中取消行列式！在本讲我们先回顾一下行列式的概念和性质以及行列式的作用，同时也分析一下行列式的局限性.

一、定义与性质

在数学的发展历史上，行列式是由解线性方程组的需要引入的. 下面以二元线性方程组与三元线性方程组为例说明这个问题.

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

通过加减消元法解得当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，其解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

通过加减消元法解得当 $D\neq 0$ 时，其解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\[2ex] x_3 = \dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_1 &= b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} \\
&\quad - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3, \\
D_2 &= a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 \\
&\quad - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}, \\
D_3 &= a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} \\
&\quad - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}.
\end{aligned}
$$

可以看出这两个公式是难于记忆的，后一个尤为难记，如不加以研究是不可能很方便地推广到一般的 n 元线性方程组中去的. 这种提炼研究的结果是引入行列式的概念.

对于二元线性方程组，记

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},
$$

并称此式为**二阶行列式的展开式**，左端为**二阶行列式**，横的为行，竖的为**列**. 四个数 a_{ij}，i、$j=1,2$，称为行列式的**元素**，于是二元线性方程组的解为

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\[2ex]
x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.
\end{cases}
$$

对于三元线性方程组，记

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{22} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32}
$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{2}a_{31}.$$

并称此式为**三阶行列式的展开式**,左端为**三阶行列式**,它有三行三列,共 9 个**元素**,右端的算式由 6 个项组成,而三元线性方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

现在两个线性方程组的解的共性已经呈现出来:解的表达式中的分母是线性方程组的系数组成的二阶行列式或者三阶行列式(称为系数行列式),分子 $D_j(j=1,2,3)$是由常数项替代系数行列式中 $x_j(j=1,2,3)$的系数而形成的行列式. 如此,二元线性方程组和三元线性方程组的解的公式变得十分好记,并且有了推广到 n 元线性方程组的可能.

为了推广行列式的概念,考察二阶行列式与三阶行列式之间的关系是必要的. 不难看出,下式成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

细心观察一下，可以发现等式右端的三项是三阶行列式的第一行的三个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 分别乘一个二阶行列式，而这个二阶行列式正是在三阶行列式中划去 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的行与列上的元素后剩下的元素组成的；其次，每一项之前都乘以 $(-1)^{1+j}$，1 与 j 正是 a_{1j} 的行标与列标.

如果将一个数定义为一阶行列式，即 $|a_{11}|=a_{11}$，则上述三阶行列式与二阶行列式之间的关系对于二阶行列式与一阶行列式也是成立的. 由此很自然地产生了一个想法：**利用低阶行列式定义高阶行列式**. 下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n **阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式，当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned} D=&(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

为了简化行列式定义中的展开式，引入代数余子式的概念.

定义 2 在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，用 M_{ij} 表示，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定义 3 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 3，n 阶行列式 D 的展开式为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

形如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$）称为下三角行列式，可按定义计算其值如下：

$$D=a_{11}A_{11}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

特别地，**对角行列式**（当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角行列式，特别是对角行列式是形式非常简单的情况，其值等于主对角线上的元素的乘积，但对一般的 n 阶行列式根据定义计算是十分困难的. 因此，有必要研究可使行列式的运算简化的行列式的性质.

定义 4 将 n 阶行列式 D 的第 i 行作第 i 列($i=1,2,\cdots,n$)所形成的 n 阶行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

由性质 1 可知，**上三角行列式**(当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

所以**三角行列式**(上三角行列式和下三角行列式的统称)**等于主对角线上的元素的乘积.**

性质 1 表明，**对行成立的性质对列都成立**. 因此，下面的性质只对行给出，不再对列叙述.

性质 2 将行列式的两行对调，行列式改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 2 易得

推论 1 如果在行列式中有两行对应元素相同,则此行列式为零.

性质 3 行列式等于它的任意一行中所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

性质 3 也称**拉普拉斯定理**.

由性质 3 可得下列推论:

推论 2 行列式的某一行元素的公因子可提到行列式外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 3 如果行列式的某一行元素全为零,则此行列式为零.

推论 4 如果行列式某两行对应元素成比例,则此行列式为零.

推论 5 行列式任一行元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j.$$

性质 4 如果行列式的某行的每一个元素都可表示为两数的和,则该行列式可以表示为两行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}^* & a_{i2}+a_{i2}^* & \cdots & a_{in}+a_{in}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^* & a_{i2}^* & \cdots & a_{in}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 4 及推论 4，可得

性质 5　将行列式某一行元素的 k 倍加到另一行的对应元素上，行列式的值不变.

上述性质可使行列式的运算大为简化，在计算过程中的目标是将行列式化成有一行(列)为零或有两行成比例或两行相同，或者化为三角行列式. 但是有一个不可忽视的事实，在给非数学专业的学生讲这些行列式性质的证明时，特别是现在这个大众化教育的时代，无论是教师讲还是学生听懂、接受并理解，都不是容易的.

二、行列式的应用及其局限性

行列式在代数体系中的关键作用表现在下列几个方面：

1. 用 Cramer 法则解含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组；
2. 用于定义矩阵的秩；
3. 求方阵的特征值；
4. 用于构造可逆矩阵的逆矩阵；
5. 正定矩阵或正定二次型的判定；
6. λ-矩阵在初等变换下的标准形及其唯一性的证明；
7. Hamilton-Cayley 定理的表示与证明；

8. Jordan 标准型理论的推导.

下面就前五个方面说明行列式的应用及其局限性,在后三个方面的应用请参看参考文献[2].

1. 表示可逆矩阵的逆矩阵

定义 5 由 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的元素按 A 中的次序组成的行列式称为矩阵 A 的行列式,记作 $|A|$. 由 $|A|$ 中的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的如下的 n 阶矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

根据性质 3 及推论 5,下式成立:

$$AA^{*}=|A|I=A^{*}A.$$

矩阵的行列式满足下述定理中的两个性质.

定理 1 设 A,B 皆为 n 阶矩阵,则有

(1) $|\lambda A|=\lambda^{n}|A|$, λ 为任意实数;

(2) $|AB|=|A||B|$.

定理中的(2)可推广到有限个同阶方阵的情形,一般地有

$$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$$

及

$$|A^{k}|=|A|^{k}.$$

定理 2 设 A 为 n 阶矩阵,则 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$,此时

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

证:充分性:如$|A|\neq 0$,由$AA^{*}=|A|I=A^{*}A$可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)=I=\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A,$$

所以A可逆,并且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$.

必要性:如果A可逆,则A^{-1}存在,并且$AA^{-1}=I$,所以$|AA^{-1}|=|I|=1$,由定理1,有$|A||A^{-1}|=1$. 所以$|A|\neq 0$,并且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$.

例1 判断矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$是否可逆,若可逆,求其逆矩阵.

解 由于

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-10\neq 0,$$

所以矩阵A可逆,又由于

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4,A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0,A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=2,A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\0&-2\end{vmatrix}=-4.$$

于是有

$$A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4&0&-0.2\\0&-0.5&0\\0.2&0&0.4\end{pmatrix}.$$

从此例可以看出，虽然定理 1 给出了求逆矩阵的公式，但在实际运用中，特别是矩阵的阶数较大时，这个公式是不便于应用的.

2. 线性方程组解的判定及表示

用行列式表示线性方程组的解，在一部分已经涉及，只是局限于二、三元线性方程组. 下面推广到 n 元线性方程组.

设 n 个未知数 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{1.1}$$

它的解也可以用行列式来表示，这就是下面的被称为**克莱姆法则**的定理.

定理 3 对于 n 元线性方程组(1.1)，如果其系数行列式 $D\neq 0$，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$