▶ 21世纪大学数学丛书

高等数学 经管类 下册

孙 梅 主编

ADVANCED MATHEMATICS
ECONOMICS AND MANAGEMENT

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

21 世纪大学数学丛书

高等数学

（经管类）

下 册

主 编 孙 梅
编 者 （按姓氏笔画为序）
丁占文 孙 梅 许 刚
肖 江 姚洪兴 高安娜
戴美凤

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类. 下册 / 孙梅主编. —镇江：江苏大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-81130-474-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 007759 号

高等数学：经管类 下册
GAODENG SHUXUE：JINGGUANLEI XIACE

主 编/孙 梅
责任编辑/吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地 址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电 话/0511-84446464(传真)
网 址/http://press.ujs.edu.cn
排 版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印 刷/丹阳市兴华印刷厂
经 销/江苏省新华书店
开 本/787 mm×960 mm 1/16
印 张/15
字 数/310 千字
版 次/2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷
书 号/ISBN 978-7-81130-474-9
定 价/29.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话:0511-84440882)

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

9 常微分方程

函数关系是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究.在实际问题中，通常需要根据问题的条件寻找相应的函数关系.不过在许多问题中，往往不能直接得到所需要的函数关系，但是根据问题的条件，有时可以建立自变量、未知函数及函数的导数(或微分)满足的关系式.这样的关系式便是微分方程.在讨论量与量之间关系的实际问题中，大量存在需要使用微分方程进行数学表示的情形，微分方程是解决这些实际问题的重要工具.本章主要介绍微分方程的一些基本概念和一些常用的微分方程的求解方法.

9.1 微分方程的基本概念

下面我们通过两个具体例子来说明微分方程的基本概念.

例 1 已知一曲线通过点(2,3)，且该曲线上任意一点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的3倍，求此曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为$y=f(x)$，则由导数的几何意义知，函数$y=f(x)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x. \tag{1}$$

此外，$y=f(x)$还满足如下条件：

$$y|_{x=2}=3. \tag{2}$$

根据式(1)及不定积分的知识，可知

$$y=\frac{3}{2}x^2+C \tag{3}$$

再把条件(2)代入(3)，得$C=-3$.于是求得曲线的方程为

$$y=\frac{3}{2}x^2-3. \tag{4}$$

例 2 设质量为m的物体在离地面高度s_0处由静止开始自由落下(空气阻力忽略不计)，过了时间t后物体距离地面的高度记为$s(t)$.求函数$s(t)$的表达式.

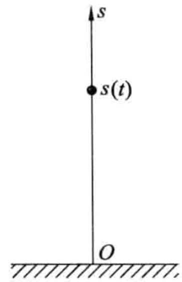

图 9-1

解 物体的运动是直线运动. 以向上的方向为 s 轴的正向建立坐标系(见图 9-1)，则该直线运动物体受到的力 $f=-mg$. 根据牛顿第二定律 $f=ma$，可知 $a=-g$. 而加速度 $a=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{5}$$

此外，$s(t)$ 还满足条件：

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0, \\ s\big|_{t=0}=s_0.\end{cases} \tag{6}$$

根据式(5)及不定积分的知识，可知

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1, \tag{7}$$

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{8}$$

再由条件(6)得到 $C_1=0, C_2=s_0$. 所以，求得函数 $s(t)$ 的表达式为

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+s_0. \tag{9}$$

上述两个例子中的关系式(1)和(5)都含有未知函数的导数，它们都是微分方程. 一般地，表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程称为微分方程. 只有一个自变量的微分方程又称为常微分方程. 本章只讨论常微分方程的相关问题.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶. 例如例 1中的方程(1)为一阶微分方程，例 2 中的方程(5)为二阶微分方程. 又如，方程

$$xy'''+3x^2y''-x^3yy'=4x^2+1$$

为三阶微分方程；方程

$$x^2y^{(4)}-x^3y=\sin 2x$$

为四阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{10}$$

需要指出的是，在 n 阶微分方程(10)中，$y^{(n)}$ 是必须出现的(否则微分方程的阶数就不是 n 阶)，而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量可以出现也可以不出现.

如果函数 $y=\varphi(x)$ 代入微分方程能够使该方程成为恒等式，则称函数 $y=\varphi(x)$ 为该微分方程的解. 确切地讲，设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数，如果在区间 I 上有

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0,$$

则 $y=\varphi(x)$就叫做微分方程(10) 在区间 I 上的解.

例如,函数(3)是微分方程(1)的解,函数(8)是微分方程(5)的解. 需要注意的是,函数(3)中包含一个任意常数 C,函数(8)中包含两个任意常数 C_1 和 C_2. 所以微分方程的解存在时,其解并不唯一,而是有无穷多个.

若微分方程的解中含有相互独立的任意常数,并且这些任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称这样的解为微分方程的通解. 例如,函数(3)是微分方程(1)的通解,函数(8)是微分方程(5)的通解. 尽管函数(4)是微分方程(1)的解,函数(9)是微分方程(5)的解,但它们不是相应的微分方程的通解,因为函数(4)和(9)中不含任意常数.

又如,对于二阶微分方程

$$y''+y=0, \tag{11}$$

容易验证:

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x$$

是它的解. 因为该解中包含两个独立的任意常数并且微分方程(11)是二阶的,所以 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程(11)的通解. 另外,可以验证 $y=C\sin x$ 也是微分方程(11)的解. 不过需要注意的是,尽管函数 $y=C\sin x$ 中包含任意常数,但它不是(11)通解,因为它包含的任意常数的个数少于微分方程的阶数.

由于通解中含有任意常数,所以它还不能完全确定地反映客观事物的规律性. 一旦能够确定这些常数的取值,客观事物的规律性就明确了. 在通解中,如果任意常数取特定值,便得到微分方程的一个确定的解,该解就不再含有不确定的任意常数了. 微分方程的不含有不确定的常数的解称为微分方程的特解.

例如,函数(4)是微分方程(1)的特解,函数(9)是微分方程(5)的特解. 函数 $y=C\sin x$ 不是微分方程(11)的特解,因为它含有不确定的任意常数; 而且如前所述,它也不是(11)的通解,因为它只含有一个任意常数.

为了从通解中得到微分方程的一个特解,需要确定通解中的任意常数的取值,所以需要给出确定这些常数的条件. 设满足微分方程的函数为 $y=\varphi(x)$,如果微分方程是一阶的,那么通常用来确定任意常数的条件是

$$y\big|_{x=x_0}=y_0;$$

如果微分方程是二阶的,那么通常用来确定任意常数的条件是

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0^1;$$

一般地,如果微分方程是 n 阶的,那么通常用来确定任意常数的条件是

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0^1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{n-1},$$

其中 $x_0,y_0,y_0^1,\cdots,y_0^{n-1}$ 都是给定的值. 按上述方式给出的条件称为微分方程的初

始条件.

微分方程的解是一个函数,其图形是一条曲线,所以又叫做微分方程的积分曲线. 求一阶微分方程满足初始条件

$$y|_{x=x_0}=y_0$$

的解,就是求微分方程的通过点(x_0,y_0)的那条积分曲线；求二阶微分方程满足初始条件

$$y|_{x=x_0}=y_0,\ y'|_{x=x_0}=y_0^1$$

的解,就是求微分方程的通过点(x_0,y_0)且在该点处的切线斜率为y_0^1的那条积分曲线.

例 3　验证函数$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$是二阶微分方程

$$y''-4y=0$$

的通解,并求满足初始条件

$$y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1$$

的特解.

解　对函数$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$,可得

$$y'=2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x},$$
$$y''=4C_1e^{2x}+4C_2e^{-2x},$$

于是

$$y''-4y=4C_1e^{2x}+4C_2e^{-2x}-4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})=0.$$

所以函数

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$$

是方程$y''-4y=0$的解. 又因为它含有两个独立的任意常数,所以它是微分方程的通解. 再由始条件$y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1-2C_2=1,\end{cases}$$

解得

$$C_1=\frac{1}{4},\ C_2=-\frac{1}{4}.$$

于是,所求特解为

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

习题 9-1

1. 指出下列微分方程的阶数：

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2\sin x=3x$；

(2) $y''+2(y')^2y+2x^3=1$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y'+3y=0$；

(4) $x^2\mathrm{d}y=2y\mathrm{d}x$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+t\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^3+2x=t^3$；

(6) $\sin\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)+\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$.

2. 判断下表中左列函数是否为右列对应微分方程的解？是通解还是特解？

函数	微分方程	答
$y=\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{1}{3}$	$y'+3y=1$	
$y=5\cos 3x+\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{8}$	$y''-9y=x+\dfrac{1}{2}$	
$y^2(1+x^2)=C$	$xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$	
$y=x+\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$	$y''+2xy'=x$	
$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$	$y''-5y'+6y=0$	

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}-x$，$xy'+y=\cos x$；

(2) $y=2+C\sqrt{1-x^2}$（C 为任意常数），$(1-x^2)y'+xy=2x$；

(3) $y=\mathrm{e}^x$，$y''-3y'+2y=0$；

(4) $y=x^2+1$，$y'=y^2-(x^2+1)y+2x$；

(5) $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$，$y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$.

4. 给定一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，求：

(1) 它的通解；

(2) 满足条件 $y\big|_{x=1}=4$ 的解；

(3) 与直线 $y=2x+3$ 相切的解；

(4) 满足条件 $\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解.

5. 有一质量为 m 的质点做直线运动，假定有一个和时间成正比的力作用于该质点，同时它又受到与速度成正比的阻力，试建立质点的速度随时间变化的微分方程.

6. 曲线上任一点的切线与横轴交点的横坐标等于切点横坐标的一半，试建立曲线所满足的微分方程.

9.2 一阶微分方程

本节讨论一阶微分方程

$$y'=F(x,y) \tag{1}$$

的一些类型及相应的求解方法.

9.2.1 可分离变量的微分方程

在微分方程(1)中，若函数 $F(x,y)$ 可以分解成函数 $f_1(y)$ 和函数 $f_2(x)$ 的乘积，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1(y)f_2(x).$$

又若 $f_1(y)\neq 0$，则由上式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{f_1(y)}=f_2(x)\mathrm{d}x.$$

如果记 $g(y)=\dfrac{1}{f_1(y)}$，$f(x)=f_2(x)$，则有

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x.$$

一般地，如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

的形式，那么原方程就称为可分离变量的微分方程，方程(2)称为已分离变量的微分方程. 原微分方程的通解可通过解已分离变量的微分方程(2)而求得.

下面讨论微分方程(2)的解法. 设可微函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(2)的解，将它代入方程(2)得到恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$$

假设函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 都是连续的，则可将上式两端积分：由变量代换 $y=\varphi(x)$ 引进变量 y，得

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $g(y)$，$f(x)$ 的原函数分别为 $G(y)$，$F(x)$，于是有

$$G(y)=F(x)+C. \tag{3}$$

因此，方程(2)的解 $y=\varphi(x)$ 满足关系式(3). 反之，如果 $y=\psi(x)$ 是由关系式(3)确定的隐含数，将其代入(3)并两端微分，得

$$G'[\psi(x)]\mathrm{d}\psi(x)=F'(x)\mathrm{d}x.$$

注意到 $G(y)$，$f(x)$ 分别是 $g(y)$，$f(x)$ 的原函数，所以有

$$g[\psi(x)]\mathrm{d}\psi(x)=f(x)\mathrm{d}x.$$

也就是说，$y=\varphi(x)$满足

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $y=\varphi(x)$是微分方程(2)的解.

这就表明，对于已分离变量的微分方程(2)，将两端积分后，得到的关系式(3)就用隐式的形式给出了(2)的解，式(3)就叫做微分方程(2)的隐式解. 又由于式(3)中含有一个任意常数，故该式确定的隐函数是微分方程(2)的通解，所以称式(3)为微分方程(2)的隐式通解. 如果能从式(3)中将 y 解出而将 y 表示成 x 的函数(或者将 x 解出而表示成 y 的函数)，则得到微分方程(2)的显式通解.

例 1　求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2y$$

的通解.

解　这是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=x^2\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int x^2\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=\frac{1}{3}x^3+C_1.$$

从而

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}.$$

因为$\pm\mathrm{e}^{C_1}$是任意非零常数，而且 $y=0$ 显然也是微分方程的解，故方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3},\ C \text{ 为任意常数}.$$

例 2　求微分方程

$$2y\mathrm{d}y=3(x-1)^2(1+y^2)\mathrm{d}x$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的解.

解　这也是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y=3(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int\frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y=3\int(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln(1+y^2)=(x-1)^3+C.$$

将初始条件 $y|_{x=0}=0$ 代入，得 $C=1$. 于是求得原微分方程的特解为

$$\ln(1+y^2)=(x-1)^3+1.$$

例 3　在商品销售预测中，销售量 x 是时间 t 的函数. 如果销售量 x 与时间 t 满足如下微分方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(B-x),$$

其中，k 和 B 都是大于零的常数（B 称为市场的饱和水平），求销售量随时间的变化规律.

解　x 与 t 满足的方程是可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(B-x)}=k\mathrm{d}t,$$

上式变形为
$$\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(B-x)}\right]\mathrm{d}x=Bk\mathrm{d}t,$$

两端积分得
$$\ln\left|\frac{x}{B-x}\right|=Bkt+C_1,$$

即
$$\frac{x}{B-x}=C_2\mathrm{e}^{Bkt}\quad(C_2=\pm\mathrm{e}^{C_1}),$$

从而可得
$$x=\frac{BC_2\mathrm{e}^{Bkt}}{1+C_2\mathrm{e}^{Bkt}}=\frac{B}{1+C\mathrm{e}^{-Bkt}}\quad\left(C=\frac{1}{C_2}\right).$$

由此可见，

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{B}{1+C\mathrm{e}^{-Bkt}}=B.$$

即随着时间的推移，销售量将趋于市场的饱和水平.

9.2.2　齐次方程

如果一个一阶微分方程可以化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)\tag{4}$$

的形式，那么就称该方程为齐次方程. 下面介绍齐次方程的解法.

引入新的未知函数

$$u=\frac{y}{x},$$

从而有

$$y=ux,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u.$$

将这些表达式代入方程(4)，得可分离变量的微分方程

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u,$$

将它分离变量后再两端积分，得

$$\int\frac{1}{f(u)-u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

求出不定积分后，再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得到原微分方程的通解.

例 4 求方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$的通解.

解 这是齐次方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$,则

$$y=ux,\ \frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

于是原方程变为
$$x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u,$$

即
$$x\frac{du}{dx}=\tan u.$$

分离变量,得
$$\cot u\,du=\frac{1}{x}dx,$$

两端积分,得
$$\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1,$$

或写为
$$\sin u=Cx\ (C=\pm e^{C_1}),$$

再以$\dfrac{y}{x}$代替上式中的 u,便得原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=Cx.$$

例 5 求微分方程$(y^2-3x^2)dx+2xydy=0$ 的通解.

解 方程可改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2}{2xy},$$

再将右端的分子、分母同除以 x^2,则方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\dfrac{y}{x}},$$

这就化成 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的形式了,可以通过令 $u=\dfrac{y}{x}$的变量替换方法求得其通解(剩下的求解过程留给读者完成).

之所以称本小节介绍的方程为齐次方程,是因为如例 4、例 5 所看到的那样,该类型的方程中 x 与 y 次数是相等的,所以才具有或者可以化为 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的形式.

例 6 探照灯的反光镜面是一个旋转曲面,它的形状由 xOy 坐标面上的一条曲线 L 绕 x 轴旋转而成. 按照探照灯的性能要求,在其旋转轴(x 轴)上的点光源处发出的所有光线,经它反射后都与旋转轴平行. 求曲线 L 的方程.

解　将光源所在的点取作坐标原点 O(见图 9-2)，且曲线 L 位于上半平面($y\geqslant 0$).

设点 $M(x,y)$ 为 L 上的任意一点，点 O 发出的某条光线从点 M 反射后是一条平行于 x 轴的直线 MS. 又设过点 M 的切线 AT 与 x 轴的夹角为 α，则也有 $\angle SMT=\alpha$. 另一方面，$\angle OMA$ 是入射角 $\angle OMN$ 的余角，$\angle SMT$ 是反射角 $\angle SMN$ 的余角，从而根据光线的反射定律有 $\angle OMA=\angle SMT=\alpha$. 所以 $AO=OM$，而

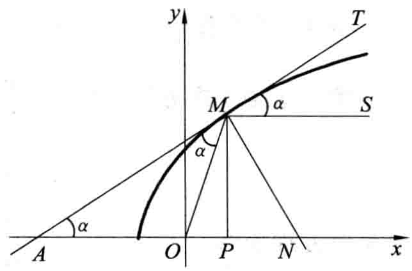

图 9-2

$$AO=AP-OP=PM\cot\alpha-OP=\frac{y}{y'}-x,\ OM=\sqrt{x^2+y^2},$$

于是得到微分方程

$$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}.$$

把 x 看作因变量，y 看作自变量，该方程也可写为

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+\sqrt{x^2+y^2},$$

当 $y>0$ 时，上式即为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

这也是一个齐次微分方程. 令 $\dfrac{x}{y}=v$，则

$$x=yv,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+v,$$

代入上式，得

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\sqrt{v^2+1}.$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+1}}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两端积分，得

$$\ln\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)=\ln y-\ln C$$

或

$$v+\sqrt{v^2+1}=\frac{y}{C}.$$

从而有

$$\left(\frac{y}{C}-v\right)^2=v^2+1,$$

亦即

$$\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yv}{C}=1.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com