TURING

《出版人周刊》、《科学》、《纽约客》、《新科学人》热评

互联网之父Vint Cerf力荐

可能与不可能的边界

P问题趣史

[美] Lance Fortnow○著

杨帆○译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

The Golden Ticket

P NP

and the Search for the Impossible

可能与不可能的边界

[redacted]问题趣史

[美] Lance Fortnow 著
杨帆 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

可能与不可能的边界 : P/NP问题趣史 / （美）福特诺（Fortnow, L.）著 ; 杨帆译. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2014.1
书名原文: The golden ticket:P, NP, and the search for the impossible
ISBN 978-7-115-33566-1

Ⅰ. ①可… Ⅱ. ①福… ②杨… Ⅲ. ①计算机算法－研究 Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第279315号

内 容 提 要

P/NP 问题是计算机科学乃至整个数学领域最重要的开放问题。本书从非技术角度介绍了什么是 P/NP 问题、它丰富的历史，以及对于人机交互乃至更多问题的数学意义。在这本趣味十足的书中，作者首先追溯了 P/NP 问题是如何产生的，然后给出了这个问题的许多实例，涉及经济学、物理学和生物学在内的多个学科。接下来探讨了涵盖 P/NP 难题中所有难度等级的问题，从寻找游玩迪士尼乐园所有景点的最短路线，到地图填色问题，再到找出 Facebook 上互为好友的一群人。本书深入探寻了计算能够做到什么、无法做到什么，描绘了尝试解决 P/NP 问题的益处和其中难以预想的挑战。

本书读来引人入胜，适合所有对计算和数学感兴趣的读者。

◆ 著　[美] Lance Fortnow
译　杨　帆
责任编辑　刘美英
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：720×960　1/16
印张：10
字数：178千字　2014年1月第1版
印数：1－3 000册　2014年1月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2013-7092号

定价：39.00元

读者服务热线：(010)51095186转600　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

版权声明

献给 Marcy、Annie 和 Molly，

愿他们知道我是做什么的，以及为何而做。

英国著名科学家臭臭教授发明了一个机器，不用打开糖果包装，它就能立刻告诉你里面有没有金券。机器的机械手臂出手如电，一抓一个准儿，不会漏掉哪怕藏有一点点金子的任何东西。目前看来，它解决了所有的问题。

——罗尔德·达尔，《查理和巧克力工厂》

前　言

近半数的美国人都拥有智能手机。智能手机也是计算机，其计算能力比几十年前的超级计算机还要强。计算机将世界上的信息呈现在我们眼前，也帮我们梳理信息。计算机让人们可以彼此交流，无论什么身份，地处何方。计算机能执行数量巨大的运算，从模拟宇宙事件到调度复杂的航线。计算机可以识别人的声音、面孔和动作。计算机可以获悉人们的喜好，并据以推荐图书、音乐和电影。在不远的将来，借助计算机技术，无人驾驶的汽车将随处可见。这么说，计算机简直无所不能。

真是这样吗？在这本书里，我们将探讨许多计算问题，其中一部分可能永远都无法用简单的计算得到答案。试着解答它们是计算机科学，乃至整个数学和科学领域最重要的挑战。人们给这些问题起了一个有些奇怪的名字：P/NP 问题。

P/NP 是克雷数学研究所公布的 7 个千禧年数学难题之一，该研究所为求解这道难题设立了百万美元的奖金。不过，P/NP 问题的意义远不止于此。

P 指的是用计算机能很快求解的问题，NP 指的是我们想找到最优解的问题。如果 $P = NP$，那么我们将很容易找到任意给定问题的解。$P = NP$ 意味着我们所了解的社会将发生剧变，医学、科学、娱乐和人类社会一切任务的自动化程度都将立即发生质的飞跃。

相反，如果 $P \neq NP$，那么总会有部分问题无法迅速地被解决。那也没有关系，因为我们可以根据具体情况研发出某些技术来解决这些问题。$P \neq NP$ 意味着不可能用自动化的方法解决所有问题。然而，知道哪些工具不好用也有助于人们找到更好用的工具。

2008 年 8 月，《ACM 通讯》的主编莫舍·瓦迪约我写一篇关于 P/NP 问题的文章。ACM（美国计算机协会）是一个为计算机研究学者和从业人员服务的重要社团，《ACM 通讯》则是该协会刊登文章的主要杂志。

一开始我想把写稿的事推给另一位计算机科学家，但后来我还是答应了。当时莫舍是这么劝说我的："如果那帮物理学家可以写关于弦理论的畅销文章（和图书），那我们也可以向公众解释计算复杂度理论目前的进展，我希望如此。"于是我写了一篇文章，该文章以《ACM 通讯》的读者为主要受众，不仅介绍了 P/NP 问题的现状（基本可以概括为"悬而未决"），也讲了一些人们在处理困难问题时积累的技巧。"P/NP 问题的现状"（The Status of the P versus NP Problem）发表在 2009 年 9 月的《ACM 通讯》上，它很快就成为该刊物创刊以来下载次数最多的文章。

关于 P/NP 问题，我觉得还有很多故事可讲，而那篇文章的大受欢迎，似乎表明是时候面向更广的受众（而不仅是科学家们）来讲述这些故事了。

我将那篇短文作为本书的框架结构，将原来文章的各个部分扩展为现在的章节。我还受到了史蒂芬·霍金的《时间简史》的启发：该书尽量绕开晦涩的公式和术语，采用生动的例子和故事来解释物理。我试图以同样的方式来讲解 P/NP 问题，借此探讨 P/NP 问题的本质和重要意义。

本书没有给出 P/NP 问题的正式定义，有很多教科书和网站都详细论述了 P 和 NP 的定义及技术结论。本书旨在让你对计算科学的潜能和局限性有更多的了解，这非常有好处，毕竟计算机如今已成为人类生活不可或缺的部分了。

向 P 和 NP 进发吧！

兰斯·福特诺

于伊利诺伊州埃文斯顿

致　谢

首先感谢 Moshe Vardi，是他鼓励我写作，他也是我发表在《ACM 通讯》杂志上的“P/NP 问题的现状”一文的编辑。这篇文章受欢迎的程度让我萌发了把它扩展成一本科普书的念头。

跟我一块写博客的 Bill Gasarch 不断鼓励我，并仔细审阅了全书各章的初稿。Alana Lidawer 和 John、Jim，以及 Chris Purtilo 也阅读了全书的初稿，并提出了许多宝贵意见。KuanLing Chen、Josh Grochow、Ralph Hansen、Adam Kalinich、David Pennock 和 Rahul Santhanam 分别对本书的部分章节提出了许多宝贵的意见。

Manuel Blum、Steve Cook、David Johnson、Leonid Levin 和 Albert Meyer 分别以其个人独到的视角向我讲述了 P/NP 问题的早期历史。Alexander Razborov 对俄罗斯历史的介绍对我帮助很大。

这本书的写作离不开我的生活圈子。作为计算机科学家，我在工作和生活中会与其他研究人员、学生，以及数不清的人交流，这种交流也让我受益匪浅。在此特别感谢加州大学伯克利分校、麻省理工学院、芝加哥大学、阿姆斯特丹的数学与计算机科学中心、NEC 研究院、丰田工业大学芝加哥分校以及西北大学的同行们，与他们真挚而友好的讨论让我获益良多。

另外，我还要特别感谢两个人，他们对我早年 P/NP 问题观念的形成影响很大：Juris Hartmanis，我在康奈尔大学读本科期间首次从他这里接触到了 P 和 NP，还有 Michael Sipser，他是我在加州大学伯克利分校和麻省理工学院的博士学位指导老师和好朋友。

在为第 6 章的地图填色问题寻找例子时，我在网上寻求了帮助，感谢那些做出回应的人：Chris Bogart、HsienChih Chang、Pálvölgyi Dömötör、David Eppstein、Lukasz

Grabowski、Gil Kalai、Charles Martel 以及 Derrick Stolee。

写作期间，我在西北大学的 Robert R. McCormick 工程与应用科学学院担任电子工程和计算机科学教授。西北大学十分鼓励向公众传播知识的著书活动。我充分利用了教职的特权，尤其是利用了学校图书馆丰富的资源，包括纸质文献和电子文献。西北大学的教职工是最棒的，我的行政助理 Marjorie Reyes 对我帮助同样很大。

普林斯顿大学出版社的编辑 Vickie Kearn 为我提供了悉心的指导，并在著书的各个阶段仔细审阅了手稿，让这本书变得更好。我还想感谢 Vickie 的助手 Quinn Fusting，以及出版社的全体工作人员。

最大的感谢留给我的家人：妻子 Marcy、两个女儿 Annie 和 Molly，感谢她们对我的爱与鼓励。

目　录

第1章

金　券

一个糖果厂老板决定推出一个活动，将五张金券藏到巧克力的包装里，而这种巧克力每年的产量数以千万计。找到金券的人将得到一次珍贵的参观工厂的机会。

如何找到这些金券？你可以买尽可能多的巧克力。你可能会试试用磁铁，可惜金没有磁性。或者你可以雇用数千人，让他们每人筛查一小堆巧克力。这听起来很傻，但是小姑娘维露卡·索尔特就要这么做，因为她特别想得到一张金券，去参观威利·旺卡的巧克力工厂。

维露卡的父亲索尔特先生是个富商，他决定买光他能找到的巧克力。这还不够，就算有堆积如山的巧克力，要从中找到小小的金券也很困难。索尔特先生也有一家工厂，他不惜动用工厂的工人，终于找到了一张金券。他对记者讲述了找到金券的过程：

> 我是做花生生意的，知道吧，我有大约100个女工为我剥花生，然后将它们做成烤花生米和腌花生米。她们整天就坐在那儿剥花生。所以我跟她们说："好了姑娘们，不要剥花生了，大家开始给我剥这些破糖纸吧！"然后她们就剥。我让工厂的每一个工人都铆足了劲地撕掉巧克力的包装纸，从早干到晚。
>
> 但是三天过去了，我们还是没走运。哦，那可真够呛！我可怜的小维露卡越来越暴躁，每次我一回家她就朝我嚷嚷："我的金券在哪儿？我要我的金券！"她撒泼又打滚儿，踢腿又叫喊，实在招人烦。我可不希望看到我的小宝贝这么不高兴，所以我决定一直找，不找到她要的东西誓不罢休。终于，在第四天的晚上，一个女工大叫："我找到金券了！"然后我说："把它给我，快！"她给了我，然后我跑着回家把它交给了亲爱的维露卡，她高兴得合不拢嘴。我们家又变得其乐融融了。

和索尔特先生一样，无论你打算怎么找那张金券，你都需要大量时间、金钱，或者运气。也许有一天，有人能发明出一个快速找到金券的便宜装置，也许这样的装置并不存在。

然而，1000万对于今天的计算机来说只是很小的数字。如果你把糖果数字化，录入一个数据库，现在的电脑只用不到一秒就能把它找一遍。虽然计算机比人快得多，但它面对的问题的规模也比在糖果里找金券大得多。

现在最大的电子数据集合规模有多大？比如，整个互联网，考虑到所有视频、音频、电子邮件及其他一切，总的信息量差不多有1 000 000 000 000 000 000字节，最多相差几个0。一个字节大致对应键盘上的一个字符。这个数很大，但记住，计算机也很快。一般的笔记本电脑每秒可以执行1万亿次操作，这样算来，理论上只需要不到4个月就能搜完整个互联网的内容，前提是你能把整个互联网装到你电脑的内存里。Google每时每刻都在搜索整个互联网，它使用了几十万台快速的计算机。

如果计算机可以很快地搜遍整个互联网，看起来好像我们就解决了这个找金券问题的电子版。但是，计算机不仅要帮人们搜索已有的数据，还要搜索问题的所有可能解。

认识一下可怜的旅行推销员Mary，她来自华盛顿特区，为美国木槌集团公司工作。她需要从家乡旅行到48个州的首府，向各州法院推销木槌。木槌公司为了削减成本，让Mary找到通过所有城市的最短路径。Mary画了一张图，写写画画了一会儿，制订了一个不错的路线。

差旅部门的人想让Mary试试能否找到另一条路线，把路程缩短到11 000英里以下。Mary写了个计算机程序，试图穷举所有可能的路线，找出最短的一条，但是一周以后，程序还没跑完。Mary坐下来开始算数。作为第一站的城市有48种选择，然后从剩下的47个城市中选一个作为第二站，再从剩下的46个城市中选一个，以此类推。可能的路径共有$48 \times 47 \times 46 \times \cdots \times 2 \times 1$种，也就是下面这个62位数：

12 413 915 592 536 072 670 862 289 047 373 375 038 521 486 354 677 760 000 000 000

即使计算机计算一条路线的时间等于光通过最小的原子直径的时间（大约0.000 000 000 000 000 000 33秒），仍然需要十亿亿亿倍于宇宙年龄的时间才能算完。难怪Mary的电脑算了一周还没有完。Mary想知道有没有比穷举更好的方法找到最佳路

线，就像在所有可能行程的“巧克力山”里面刨出那张小小的金券。

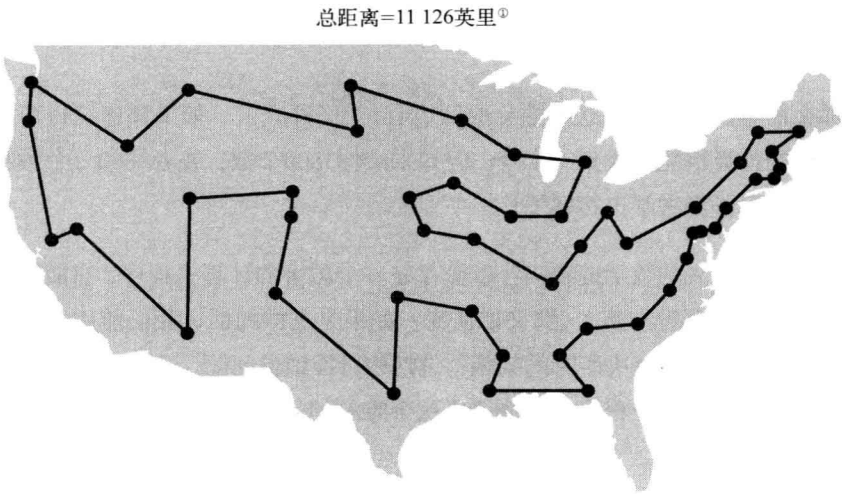

图1-1　旅行推销员问题的地图

这就是本书最基本的问题：P/NP问题。其中的一个实例就是能否为旅行推销员找到最短路径。P和NP自有其十分专业的定义，但是把它们看做概念比看做数学对象更好。NP是存在解的问题的集合，P则是能很快找到解的问题的集合。P = NP 意味着我们能总是很快地计算出任何问题的解，当然也包括找到旅行推销员的最短路径。相反，P ≠ NP 意味着我们不能。

1.1　划分的难题

看下边38个数字：

14 175, 15 055, 16 616, 17 495, 18 072, 19 390, 19 731, 22 161, 23 320, 23 717, 26 343, 28 725, 29 127, 32 257, 40 020, 41 867, 43 155, 46 298, 56 734, 57 176, 58 306, 61 848, 65 825, 66 042, 68 634, 69 189, 72 936, 74 287, 74 537, 81 942, 82 027, 82 623, 82 802, 82 988, 90 467, 97 042, 97 507, 99 564

① 1英里约合1.609千米。——编者注

这38个数字之和为2 000 000。你能把它们平分成两组，每组19个数字之和分别为1 000 000吗？你可以使用计算器、电子表格或写一个计算机程序。（答案在本章最后。）

不那么简单，是吧？把这些数分成两组有170亿种方式。如果程序编得巧妙，使用当今较快的计算机能够找到一个解。但如果给你3800个数，或者3800万个数呢？短小的计算机程序可没法给出答案了！

这只是个无意义的数学谜题吗？就算存在一个厉害的计算机程序，它能解决这个平分数组的问题（假设有解），那又如何呢？如果是这样的话，我们能用这个程序做更多的事。这个程序能解决所有的问题，包括旅行推销员问题。这个简短的难题抓住了P/NP问题的本质：一个程序如果能解决这个难题的复杂版本，那么它也能解出任意问题。

1.2 手

你的手是最不可思议的工程装置，它能戳、抓和指，能系鞋带，能射箭，还能弹钢琴、拉小提琴，能变戏法，能驾驶车、船、火车或飞机。你的手可以握住其他人的手，或跟他们玩拇指相扑。手可以比划出信号语言，也能通过写字或打字来交流。手可以轻抚，也能重击。手可以使用修理钟表的精密工具，也能操作链条锯。有才华的人的双手可以创造艺术杰作，写出音乐或诗歌。人类取得的几乎所有成就，都离不开双手。

一只手有27块骨头，5根手指，包括最重要的拇指。手具有结构复杂的神经、肌腱和肌肉，这些都包裹在富有弹性的皮肤里。然而，这一不可思议的装置，自然造物的杰作，却不能自己做事，而只能执行人脑的指令。死人的手平平无奇，做不了任何事情。

手就是自然的硬件，硬件本身不能做什么。手需要软件（也就是大脑指令）来控制，软件告诉它如何执行和实现大脑希望它做的事情。

松冈容子是华盛顿大学的机器人学教授，她带领科研小组制作了一个解剖学上正