

四川省“十二五”重点出版规划项目

# 工程材料的棘轮行为和 棘轮-疲劳交互作用

康国政 阚前华 著

GONGCHENG CAILIAO DE  
JILUN XINGWEI HE JILUN  
-PILAO JIAOHU ZUOYONG



西南交通大学出版社  
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

四川省“十二五”重点出版规划项目

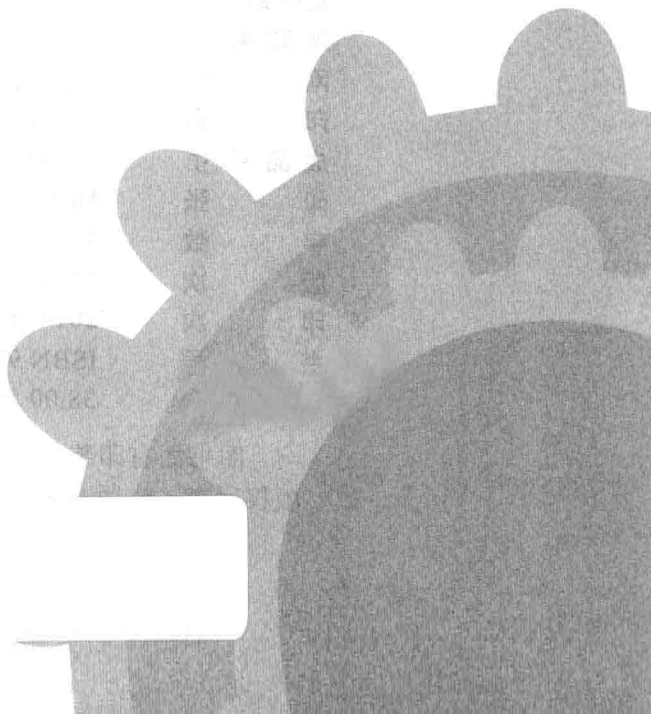
# 工程材料的棘轮行为和 棘轮-疲劳交互作用

GONGCHENG CAILIAO DE  
JILUN XINGWEI HE JILUN  
-PILO JIAOHU ZUOYONG

康国政 阚前华 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·



-----  
图书在版编目 ( C I P ) 数据

工程材料的棘轮行为和棘轮：疲劳交互作用 / 康国政著；阚前华著. —成都：西南交通大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-5643-2775-0

I. ①工… II. ①康… ②阚… III. ①工程材料—金属疲劳—研究 IV. ①TG111.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 287912 号  
-----

工程材料的棘轮行为和棘轮-疲劳交互作用

康国政 阚前华 著

责任编辑	孟苏成
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 (四川省成都市金牛区交大路 146 号)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	<a href="http://press.swjtu.edu.cn">http://press.swjtu.edu.cn</a>
印 刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印 张	16.5
字 数	412 千字
版 次	2014 年 1 月第 1 版
印 次	2014 年 1 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-2775-0
定 价	38.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换  
版权所有 盗版必究 举报电话：028-87600562

# 前 言

棘轮行为是工程材料在非对称应力循环加载过程中出现的一种塑性变形的循环累积现象，是叠加在循环应力应变响应之上的一种二次变形。棘轮变形的产生一方面会使材料的塑性变形显著增加；另一方面也会使材料的疲劳寿命明显下降。因此，棘轮行为是材料与结构的疲劳分析中需要面对的一个新问题，也是结构的疲劳寿命预测和可靠性评价中需要考虑的一个重要问题。近年来，棘轮行为研究得到了国内外固体力学界的广泛关注，已经取得了众多研究成果。然而，由于棘轮行为的复杂性和多变性，目前还有许多问题没有得到很好的解决，对棘轮行为的微观机理、基于微观机理的循环本构模型建立以及各类新材料的棘轮行为演化特征等都还需要进行系统而深入的研究。

近 10 年来，著者及其课题组在多个国家自然科学基金项目（19772041；10402037；10772153；10802069 和 11025210）的资助下，首先针对工程材料的棘轮行为及棘轮-疲劳交互作用进行了系统而深入的实验、理论和有限元数值模拟，揭示了多种材料的棘轮行为和棘轮-疲劳交互作用的行为特征，并在此基础上建立了一系列循环塑性和黏塑性棘轮本构模型以及耦合损伤的循环本构模型，对材料棘轮行为的温度依赖性、加载路径相关性和时间相关特性进行了合理的描述；同时实现了循环本构模型和疲劳失效模型的统一，对全寿命棘轮行为和疲劳寿命进行了合理的本构描述。然后，在棘轮行为研究的材料范畴上进行了拓展，系统研究了超弹性镍钛形状记忆合金的相变棘轮行为和颗粒增强金属基复合材料的室温、高温单轴棘轮行为，分别建立了能够合理描述这两类先进材料棘轮行为的宏观唯象本构模型和细观力学本构模型。本专著中介绍的著者及其课题组在金属材料的棘轮行为和棘轮-疲劳交互作用方面取得的创新性成果于 2010 年荣获“教育部自然科学二等奖”1 项。

本专著共分 7 章：第 1 章简单介绍了材料的棘轮行为和棘轮-疲劳交互作用的定义和基本演化特征，并对材料棘轮行为的研究意义和目前材料棘轮行为的国内外研究现状进行了简要评述，突出介绍了已有研究的不足；第 2 章主要对棘轮本构模型的构建过程中需要的非弹性本构理论基础进行简要的介绍，便于读者对后续内容的理解；第 3 章结合著者在棘轮行为实验研究方面取得的突出成果，对不同材料在不同加载工况和加载环境下体现出的棘轮变形特征进行了系统而详细的介绍，并结合位错组态的微观观察对棘轮变形的微观机理进行了讨论，使读者对棘轮行为的行为特征、演化规律和微观机制有一个较为全面的了解；第 4 章则对已有的棘轮本构模型进行详细的介绍，突出了著者在这方面工作的贡献，着重介绍了著者在高温非比例多轴和时间相关棘轮行为方面对棘轮本构模型的完善和发展；第 5 章讨论了著者在棘轮-疲劳交互作用方面系统的实验和理论研究工作，突出了耦合损伤棘轮本构模型的建立；第 6 章则是结合著者近期在棘轮行为研究的材料领域方面的拓展，对超弹性镍钛形状记忆合金的相变棘轮行为的实验和本构模型建立方面的研究成果进行了详细介绍，使读者了解棘轮行为研究拓展和深入的方向；第 7 章介绍了颗粒增强金属基复合材料室温、高温棘轮行为的实验，以及有限元模拟和细观本构模型研究方面著者课题组近年来的最新研究成果。

在本专著中，第2章是参考著者编写的研究生教材《非弹性本构理论及其有限元实现》（2010，西南交通大学出版社）中第1章和第3章部分内容精练而成的；另外，部分棘轮行为的实验和理论模型工作也在这本研究生教材中有所涉及，本专著为了保持内容的完整性，再一次系统地将相关内容融入了本专著中（见正文中相关地方的说明）。

本专著为四川省“十二五”重点图书建设规划入选图书。本专著的出版得到了该重点图书建设规划项目的资助，作者对此深表感谢！

作者对本专著中引用的所有研究成果的作者表示感谢，同时，著者要特别感谢西南交通大学力学与工程学院高庆教授的早期引领。正是高庆教授的指引和带领，才使著者能够进入材料循环本构关系研究领域，并在她的长期关心、指导和支持下取得了较为突出的研究成绩。另外，著者还要感谢西南交通大学力学与工程学院的杨翊仁教授、沈火明教授、蔡力勋教授和王弘教授对本专著出版的支持；也感谢本课题组所有成员，特别是西南交通大学力学与工程学院的张娟副教授、刘宇杰副教授和孙亚芳高级工程师在材料循环本构关系研究方面做出的不懈努力。

康国政 阙前华

2013年5月于四川成都

# 目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 材料的棘轮行为	1
1.2 棘轮-疲劳交互作用	4
第 2 章 塑性和黏塑性本构理论基础	6
2.1 概 述	6
2.2 经典率无关塑性理论	10
2.3 统一黏塑性理论	18
第 3 章 金属材料棘轮行为的宏微观变形特征	20
3.1 金属材料棘轮行为的宏观演化特征	20
3.2 棘轮变形过程中的位错演化	36
第 4 章 金属材料棘轮行为的循环本构模型	61
4.1 棘轮行为的循环本构模型概述	62
4.2 高温非比例多轴棘轮本构模型	73
4.3 时间相关棘轮本构模型	81
4.4 棘轮行为的多晶循环黏塑性本构模型	88
第 5 章 金属材料的棘轮-疲劳交互作用及其理论描述	102
5.1 棘轮-疲劳交互作用的实验研究	102
5.2 耦合损伤的棘轮本构模型	124
5.3 考虑棘轮行为的工程疲劳失效模型	141
第 6 章 镍钛形状记忆合金的相变棘轮行为	155
6.1 镍钛形状记忆合金循环变形行为研究概述	155
6.2 相变棘轮行为的实验研究	162
6.3 相变棘轮行为的宏观唯象本构模型	167
6.4 基于晶体塑性理论的相变棘轮循环本构模型	181
第 7 章 颗粒增强金属基复合材料的棘轮行为	202
7.1 颗粒增强金属基复合材料棘轮行为的实验研究	202
7.2 颗粒增强金属基复合材料棘轮行为的有限元模拟	208
7.3 颗粒增强金属基复合材料棘轮行为的细观本构模型	224
参考文献	246

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 材料的棘轮行为

### 1.1.1 棘轮行为的定义及研究意义

#### 1. 棘轮行为的定义

棘轮行为 (Ratcheting) 或棘轮效应是指材料在非对称应力循环过程中产生的一种非弹性变形的循环累积现象, 如图 1.1 所示。

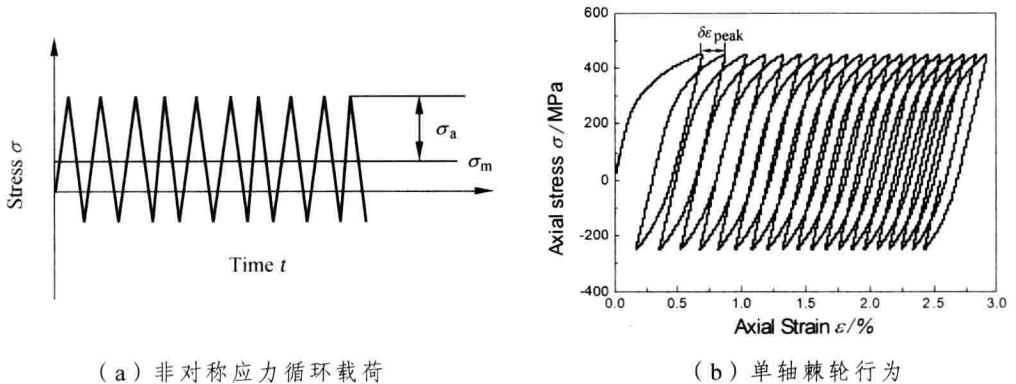


图 1.1 材料棘轮行为的示意简图

从上面给出的棘轮行为的定义来看, 对于各向同性材料, 棘轮行为的产生必须具备 3 个条件, 即: ① 应力控制循环加载; ② 非零的平均应力; ③ 非弹性变形。然而, 对于一些拉伸和压缩性能不一样的材料, 即使在对称应力循环过程中 (即平均应力为零), 当应力水平高到使材料发生非弹性变形时也会产生明显的棘轮变形。

棘轮变形是叠加在材料基本的循环应力-应变响应上的一种二次变形, 随循环周次的增加而逐渐累积, 影响因素众多, 难以进行准确的理论描述, 一直是固体力学研究领域的一个难点问题, 还需要进行大量的实验研究和深入的理论探讨。另外, 根据加载路径的不同, 可以将棘轮行为分为单轴和多轴棘轮行为两种类型。多轴棘轮行为因其显著的加载路径依赖性而变得更为复杂和难以理论描述。

#### 2. 棘轮行为研究的意义

由于许多工程构件 (如化工容器、管道、电力设备、轮轨和轧辊以及电子封装元件等) 在实际使用过程中均会不可避免地承受一种非对称的应力循环载荷, 因此, 在对这类结构进行可靠性、安全性和疲劳寿命的评估时需要考虑棘轮行为的影响。棘轮行为是材料的疲



劳行为研究中出现的一个新问题，已逐渐引起了人们的重视。例如，20 世纪 90 年代初美国 ITER 设计中就开始重视管道中出现的棘轮变形对反应堆结构的危害，ASME 规范 NB 32xx 对管道中的棘轮效应及其危害的防范要求就有明确描述。然而，因棘轮行为的特殊性和复杂性，采用经典的、以应变控制循环实验为基础建立起来的循环本构模型不能对其进行直接模拟，必须对材料的循环棘轮行为进行深入的研究，进而建立合理的棘轮循环本构模型。因此，开展工程材料棘轮行为及其本构模型研究具有重要的工程应用价值，研究成果对于工程结构的强度、疲劳寿命和安全性评价具有重要的指导意义。

另外，由于棘轮行为是叠加在基本循环变形上的一种二次变形，行为特征复杂，影响因素众多，传统的循环塑性本构模型不能对其进行合理的描述，需要在系统的实验研究基础上建立和发展新的循环本构模型，因此，棘轮行为的研究必将促进固体力学学科材料本构关系研究方向的发展，同时为后续的疲劳问题分析提供坚实的理论基础。可见，棘轮行为的研究也具有重大的科学意义和学术价值。

### 1.1.2 材料棘轮行为的研究现状

正是因为棘轮行为的本构描述在工程结构的寿命预测和安全性评定中的重要作用以及对固体力学学科发展的重要科学意义，近 20 年来得到了国内外不少固体力学学者的关注，已成为固体力学的一个重要研究方向。Ohno (1990; 1997), Bari 和 Hassan (2002), 陈旭等 (2003), Kang (2008) 和 Chaboche (2008) 已经对目前棘轮行为及其循环本构模型的研究进展进行了评述，本节将根据上述综述论文对近年来在材料棘轮行为的实验研究和本构描述方面的最新成果进行简要评述，一些具体的行为特征和本构模型将在本书的其他章节结合著者的研究工作进行详细介绍。

#### 1. 棘轮行为的实验研究

由于棘轮行为在压力容器、管道、核反应堆结构和铁路领域的工程构件中体现得尤为突出，已有的实验研究主要集中在不锈钢（如 304、316FR、316L 和 1Cr18Ni9Ti 等），普通碳钢（如 CS1020、CS1026 和 CS1070），轨道钢和铝合金等结构材料方面。已有研究揭示了棘轮行为的加载水平、加载历史、加载路径、加载速率和环境温度依赖性，突出了单轴和非比例多轴棘轮行为的显著差别以及材料的循环软/硬化行为对棘轮行为的影响。近年来，随着研究的深入与拓展，也对其他一些新型和先进材料（包含钎焊焊料、复合材料和高分子材料以及形状记忆合金等）的棘轮行为进行了系统的实验研究，揭示了一些新的棘轮演化特征。如 Yang 等 (2003) 和 Chen 等 (2005a) 通过对 63Sn/37Pb 钎焊焊料的室温单轴和多轴循环试验发现，由于材料显著的循环软化特性，其棘轮应变一直以一个较大的速率增长，不会出现不锈钢类材料的棘轮应变率随循环周次显著下降的现象。对于其他先进材料的棘轮行为实验研究结果可参见本书第 6、7 章的详细讨论。

然而，已有研究基本上都只关心棘轮行为本身，没有详细讨论棘轮行为和疲劳失效行为之间的交互作用。同时，已有研究大都关注棘轮行为的宏观演化特征，没有深入到细观和微观层次去探讨棘轮变形的微观机理。另外，对于一些极端条件（如超高温、超高加载速率和高压环境等）下材料的棘轮行为也还缺乏相应的研究。



## 2. 棘轮行为的本构理论研究

自 20 世纪 80 年代以来,人们对棘轮行为本构描述已进行了大量的研究,已经在实验揭示的宏观棘轮演化规律的基础上建立了许多唯象的循环本构模型(Ohno, 1990, 1997; Bari 和 Hassan, 2002; 陈旭等, 2003; Kang, 2008; Chaboche, 2008)。已有的宏观唯象棘轮本构模型可以大致分为两大类: ① 基于 Armstrong-Frederick 非线性随动硬化模型(Armstrong 和 Frederick, 1966)及其修正模型的循环本构模型。此类模型采用背应力的非线性演化来描述材料在循环过程中的塑性流动的各向异性特性,进而描述材料的棘轮变形行为。代表性模型有 Chaboche 模型(Chaboche, 1991), Ohno-Wang 模型(Ohno 和 Wang, 1993a; 1993b), Jiang-Sehitoglu 模型(Jiang 和 Sehitoglu, 1994)和 Ohno-Abdel-Karim 模型(Abdel-Karim 和 Ohno, 2000)等。著者也在这一框架下对循环稳定材料的非比例多轴棘轮行为(Kang 和 Gao, 2002; Kang, 2004)和循环硬化材料的室温、高温非比例多轴棘轮行为(Kang 等, 2002, 2004, 2005c)以及时间相关棘轮行为(Kang 和 Kan, 2007; Kan 等, 2007)建立了相应的循环本构模型,详见本书第 4 章。② 基于双面模型的循环本构模型。此类模型主要是通过塑性模量的演化来描述材料的塑性流动,最早由 Dafalias 和 Popov (1975)提出,后来被 Hassan 等(1992a; 1992b)和 Hassan, Kyriakides (1994a; 1994b)推广到了循环软/硬化材料的室温单轴和多轴棘轮行为的理论描述中。然而,由于该类模型不能反映非比例加载路径和环境温度的影响,后续研究不是很多。目前的宏观唯象棘轮本构模型研究大都是基于 Armstrong-Frederick 非线性随动硬化模型的修正和拓展。

另外,近几年来,基于棘轮行为的多种变形机制,在 Cailletaud 和 Sai (1995)提出的 M2C1 模型,即双机制单判据模型的基础上, Taleb 等(2006), Velay 等(2006), Sai 和 Cailletaud (2007), Taleb 和 Cailletaud (2010)等建立了合理描述金属材料棘轮行为的多机制循环本构模型。关于多机制模型的特点和研究现状可参见 Sai (2011)的综述性论文。同时,对于多晶材料,在晶体塑性理论的基础上,基于显式形式的宏微观过渡法则(即  $\beta$  法则), Cailletaud 和 Sai (2008)及 Abdeljaoued 等(2009)建立了描述 316 不锈钢棘轮行为的多晶循环塑性本构模型。这些新类型的棘轮本构模型为进一步合理描述不同材料的棘轮行为、反映棘轮行为的微观变形机理等方面的研究提供了多种选择。

## 3. 棘轮本构模型的应用

本构模型研究的的目的之一是将所发展的模型进行有限元实现,进而对工程构件的变形行为进行数值模拟,为结构设计和安全与寿命评价提供分析基础。然而,由于棘轮行为的复杂性,目前,通用有限元软件的标准材料库中包含这一类本构模型的还不多,仅有 Chaboche 模型(1991)被成功地嵌入 ANSYS 和 MARC 之中,用户可以直接使用。如上所述,近 10 年来,棘轮本构模型的研究已经取得了长足的进步,涌现出许多更为合理的理论模型。因此,为了进行更为合理的结构分析以及为工程应用提供多种可能的选择,非常有必要对目前新发展的棘轮本构模型进行有限元实现。本构模型的有限元实现要解决两大问题:一是在每个高斯积分点处的应力积分算法确定;二是有限元整体平衡迭代过程中的一致性切线刚度矩阵的推导。

由于在有限元分析过程中,对于每一个积分点都涉及应力积分和本构关系的计算,并且目前的工程计算中积分点的数目基本上都是成千上万个,有时甚至上百万或上千万个,

因此，建立的应力积分算法必须具有非常好的计算效率。对于一个合适的积分算法，一般要求满足应用范围广、计算精度高、计算效率高和计算稳定性好等要求。针对复杂的棘轮本构模型，在 Hartmann 等（1997）的研究工作基础上，Kobayashi 和 Ohno（2002）利用隐式应力积分和径向回退映射方法，通过连续迭代法在循环塑性理论的框架下对 Ohno-Wang 模型（1993）和 Ohno-Abdel-Karim 模型（2000）进行了有限元实现，并借助 ABAQUS 分析程序成功地模拟了电子封装中的无铅焊点在热应力循环下的循环变形行为。后来，Kang（2004；2006）又将 Kobayashi 和 Ohno（2002）的工作推广到了黏塑性本构理论（这一部分工作的详细内容可参见著者编写的研究生教材《非弹性本构理论及其有限元实现》一书的第 6 章）。另外，Hassan 等（1998）也将改进的本构模型移植到 ANSYS 中，而 Abdel-Karim（2005）针对具有部分激活动态恢复项的随动硬化模型，提出了一种不同于理想塑性材料径向回退映射方法的新的应力积分算法，该算法具有更好的精度和计算效率。然而，这些成果都是以大型有限元程序的用户材料子程序形式为各自研究者个人所有，在商业有限元软件，如 ABAQUS、ANSYS 和 MARC 等的标准材料库里还没有包含这样的一些新发展的棘轮本构模型。

基于这些新发展的棘轮本构模型的有限元实现，目前已经在金属材料的磨损机理分析和铁路交通的轮轨接触疲劳失效分析中考虑棘轮变形的作用和影响。代表性工作包括 Kapoor 和 Johnson（1994），Kapoor 等（1996），Jiang 和 Sehitoglu（1999），Ringsberg（2001），Kapoor 等（2002），Franklin 等（2003）和 Zhu 等（2013）的工作。

## 1.2 棘轮-疲劳交互作用

### 1.2.1 棘轮-疲劳交互作用的定义及研究意义

棘轮行为是工程材料在非对称应力循环过程中产生的一种非弹性变形的累积现象，棘轮变形随循环周次的增加逐渐增大。因此，棘轮行为必然是一个和材料的疲劳失效行为密切相关的循环响应，需要考虑棘轮变形和疲劳失效行为之间的相互影响，即应考虑棘轮-疲劳交互作用。

#### 1. 棘轮-疲劳交互作用的定义

棘轮-疲劳交互作用是指工程材料在非对称应力循环过程中产生的棘轮变形对其疲劳失效寿命的影响和循环过程中产生的疲劳损伤对棘轮行为演化速率的影响这样的两种相互影响、共同发展的现象，是全寿命棘轮行为和疲劳失效寿命分析中必须考虑的一个重要问题。

在非对称应力循环过程中，工程材料的失效方式可分为棘轮失效和低周疲劳失效两种。棘轮失效是指在循环过程中因棘轮变形的逐渐累积而产生过大的棘轮变形，导致材料发生韧性破坏；而低周疲劳失效是指在循环过程中尽管有棘轮变形产生，但棘轮变形的演化速率较慢，在材料因循环过程中累积的疲劳损伤过大而发生破坏时棘轮变形量仍然较小，破坏具有疲劳脆断的特征。这两种破坏形式的出现与非对称应力循环的应力水平和材料循环软/硬化行为密切相关，具体情况可参见本书第 5 章的详细介绍。

## 2. 棘轮-疲劳交互作用的研究意义

由于棘轮-疲劳交互作用在准确的全寿命棘轮行为预测和疲劳失效寿命估算中具有重要的地位，因而深入认识和了解棘轮-疲劳交互作用对于工程结构构件的强度、疲劳寿命和安全性评价具有重要的指导意义。为了考虑疲劳损伤对材料全寿命棘轮行为的影响，需要在原有的棘轮本构模型基础上引入损伤的影响，建立耦合损伤的棘轮本构模型。同时，为了考虑棘轮变形对疲劳失效寿命的影响，也需要在已有的疲劳失效模型中引入棘轮变形的作用。这两方面的工作都是已有研究的深入和拓展，因而具有重要的科学意义，必将促进固体力学学科相关研究方向的发展。

### 1.2.2 棘轮-疲劳交互作用的研究现状

在已有的棘轮行为研究中，我们主要关注的是棘轮变形本身，涉及的循环周次比较少，基本上在 200 次循环范围内，没有考虑疲劳损伤的出现及其对棘轮行为的影响。因此，针对棘轮-疲劳交互作用的研究相对来说还很少，研究还很不成熟。最早关注棘轮变形对疲劳寿命影响的是 Rider 等（1995）和 Xia 等（1996）。他们通过实验分别讨论了低碳钢、低合金钢和 ASTM A-516 Gr.70 钢的棘轮-疲劳交互作用，揭示了棘轮变形对疲劳寿命的不利影响，并对实验结果进行拟合，得到了考虑棘轮效应的低周疲劳失效经验公式，对其疲劳寿命进行了预测。后来，Kwofie（2006），Kwofie 和 Chandler（2007）也针对多晶铜开展了单轴棘轮-疲劳交互作用的实验研究，并在已有的失效模型基础上通过考虑棘轮变形的不利影响建立了相应的疲劳失效模型。实际上，上述研究仅考虑了棘轮-疲劳交互作用的一个方面，即棘轮变形对疲劳寿命的不利影响，并没有涉及疲劳损伤反过来对材料全寿命棘轮行为的影响，没有建立合理的本构模型对材料的全寿命棘轮行为进行理论描述。

近年来，在国家自然科学基金项目《考虑棘轮效应的非比例多轴应力低周疲劳失效模型研究》（10402037）的资助下，著者针对循环稳定（退火 42CrMo 钢）、循环硬化（304 不锈钢钢）和循环软化（调质 42CrMo 钢）3 种材料，对单轴和非比例多轴棘轮-疲劳交互作用进行了系统的实验和理论研究，揭示了棘轮变形对疲劳寿命的不利影响以及疲劳损伤对全寿命棘轮行为的促进作用，并通过损伤变量的引入，建立了耦合损伤的棘轮本构模型，结合一定的失效判据，对单轴棘轮-疲劳交互作用进行了合理的理论描述，对材料的全寿命棘轮行为和疲劳失效寿命进行了合理的预测，实现了棘轮本构模型和疲劳失效模型的统一。同时，为了突出模型的工程应用，结合系统的实验结果，在已有的疲劳失效模型基础上引入反映棘轮变形和材料软硬化行为影响的 FP 参数，建立了单轴和非比例多轴棘轮-疲劳交互作用的工程疲劳失效模型，对其疲劳寿命进行了合理的估算。这一部分工作的详细情况参见本书的第 5 章。

## 第 2 章 塑性和黏塑性本构理论基础

本章将对棘轮本构模型构建过程中涉及的塑性和黏塑性本构理论基础知识进行简要的介绍，包括经典的率无关塑性理论和统一黏塑性理论。

### 2.1 概 述

#### 2.1.1 材料的本构原理

在固体力学范畴，材料的本构理论描述力和变形固体在力的作用下产生的变形之间的关系，又称为材料的本构关系。最简单的本构关系就是在材料力学课程中提到的广义 Hook 定律，即线弹性本构关系。

材料的本构理论可以分为两大类，即：弹性本构理论和非弹性本构理论。弹性本构理论描述材料可恢复的变形行为；而非弹性本构理论则描述材料的不可恢复变形行为，主要包括塑性模型、黏塑性模型和损伤模型等。

塑性本构理论是一种与时间无关的本构理论，其构成主要包括 3 个部分：屈服面、流动准则和硬化准则。而黏塑性本构理论则是一种与时间相关的本构理论，反映了塑性和黏性之间的共同作用。损伤本构模型是建立在损伤力学基础上的本构模型，考虑损伤与变形的耦合作用。

实验研究揭示材料变形特征和演化规律，进而建立本构理论所必需的一个前提条件。但是，为了减少实验的盲目性，并确保所建立的本构关系的准确性，需对本构关系加以必要的限制，使其遵循一定的基本原则，这些原则即称为本构原理。几个比较常用的原理为：

##### 1. 客观性原理

材料的本构关系不应随观测者的改变而改变，即在时空变换下，本构关系的形式是不变的，且本构关系中的张量应该是客观性张量。

张量的客观性定义 (Khan 和 Huang, 1995)：对时空变换  $\{x, t\}$  和  $\{x^*, t^*\}$ ，存在

$$x^* = Q(t) \cdot x + c(t), \quad t^* = t + a \quad (2.1.1)$$

其中， $Q(t)$  和  $c(t)$  分别为正交张量和向量； $a$  为某一常数。实际上， $Q(t)$  为刚体转动； $c(t)$  为刚体平移。

在满足式 (2.1.1) 的两个作相对刚体运动的时空参考系中，若标量场  $\rho$ ，向量场  $l$  和二阶张量场  $e$  分别满足

$$\rho^* = \rho, \quad l^* = Q \cdot l, \quad e^* = Q \cdot e \cdot Q^T \quad (2.1.2)$$

则分别称  $\rho$ ,  $l$  和  $e$  是客观的。

本书中, 黑体斜体字母表示的变量为张量和向量变量, 普通斜体字母表示的变量为标量变量。

## 2. 相容原理

本构关系应该与连续介质力学中讨论的质量守恒、动量守恒和动量矩守恒定律相一致, 并满足热力学第二定律所要求的限制条件, 详见下一小节的概述。

## 3. 决定性原理

如果在  $t_0$  时刻物体中所有物质点的热力学状态是已知的, 则该时刻的物质点  $\mathbf{X}$  在以后时刻  $t$  的应力  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$  完全由物体中全部质点自  $t_0$  到  $t$  的运动历史决定。

## 4. 局部作用原理

$t$  时刻对应于物质点  $\mathbf{X}$  的应力仅仅依赖与该物质点附近无限小邻域内物质点的运动历史, 而与远离物质点的运动历史无关。

## 2.1.2 连续介质力学及热力学基础

材料的非弹性变形是一种典型的热力学过程, 应该满足基本的热力学要求, 因此, 本节将简单地介绍在材料的本构理论建立过程中涉及的一些基本的连续介质力学和热力学方程, 系统的基础知识介绍参见范镜泓和高芝晖 (1987)、黄克智和黄永刚 (1999)、黄筑平 (2003) 等出版的《连续介质力学》相关论著。

### 2.1.2.1 基本守恒定律

在讨论变形固体本构关系的建立过程中, 必然涉及物体、运动和力这 3 个物理过程中的基本要素。也就是说, 材料的变形过程也应该满足物理过程的一些基本守恒定律。

#### 1. 质量守恒定律

在物体受外力作用而产生的运动过程中, 不发生物体质量的损失或增加, 在运动过程中物体的质量保持不变, 此即为质量守恒定律, 其数学表述为

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.3)$$

其中,  $\rho$  是物体当前时刻的密度;  $\mathbf{v}$  为物体当前时刻的速度矢量;  $\nabla_x$  为梯度算子。

#### 2. 动量守恒定律

动量守恒定律是指物体中所有点的总动量的变化率等于作用在该物体上的所有外力的矢量和, 即

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} ds \quad (2.1.4)$$

其中,  $\frac{d}{dt}$  表示物质导数;  $\Omega$  为物体当前时刻的体积;  $\partial\Omega$  为物体边界面;  $f$  为单位质量上物体所受的体力向量;  $T$  为作用在物体边界面上的张力向量, 有  $T = \sigma \cdot n$ , 其中  $\sigma$  为物体的应力张量,  $n$  是边界面的外法线方向向量。

利用散度定理有  $\int_{\partial\Omega} T ds = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n ds = \int_{\Omega} \nabla_x \cdot \sigma d\Omega$ , 则式 (2.1.4) 可写成

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla_x \cdot \sigma + \rho f - \rho \frac{dv}{dt} \right] d\Omega = 0 \quad (2.1.5)$$

由此可得

$$\nabla_x \cdot \sigma + \rho f = \rho \frac{dv}{dt} \quad (2.1.6)$$

这就是 Cauchy 运动方程。对于静力平衡情形,  $dv/dt = 0$ , 则由式 (2.1.6) 可得静力平衡方程

$$\nabla_x \cdot \sigma + \rho f = 0 \quad (2.1.7)$$

### 3. 动量矩守恒定律

动量矩守恒定律是指物体中所有点的总动量矩的变化率等于作用在该物体上的所有矩的矢量和, 即

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (r \times \rho v) d\Omega = \int_{\Omega} (r \times \rho f) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (r \times T) ds \quad (2.1.8)$$

其中,  $r$  是考虑的物体点的位置向量。利用如下积分定理

$$\int_{\partial\Omega} (r \times T) ds = \int_{\partial\Omega} (r \times \sigma \cdot n) ds = \int_{\partial\Omega} n \cdot (r \times \sigma^T)^T ds = \int_{\Omega} \nabla_x \cdot (r \times \sigma^T)^T d\Omega \quad (2.1.9)$$

可得

$$\sigma = \sigma^T \quad (2.1.10)$$

这就是应力张量的对称性。

### 4. 能量守恒定律 (热力学第一定律)

能量守恒定律是指对于一个封闭系统, 所有外部作用对系统所做的总功率必须等于系统总能量的增加率。系统的能量包含有机械能、化学能、电能、磁能以及热能, 但对于本书讨论的材料非弹性变形来说我们只关心机械能和热能。

对以  $\partial\Omega$  为边界、体积为  $\Omega$  的物体, 设:

(1)  $E$  为内能,  $e$  为比内能, 则有  $E = \int_{\Omega} \rho e d\Omega$ ;

(2)  $K$  为动能, 则  $K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v \cdot v d\Omega$ ;

(3)  $Q$  为物体  $\Omega$  的热能吸收率, 可以由内部热源产生, 也可以由外界通过热传递产生, 即  $Q = \int_{\Omega} \rho r d\Omega - \int_{\partial\Omega} q \cdot n ds$ , 其中  $r$  为内热的质量密度,  $q$  是热流矢量,  $n$  是  $\partial\Omega$  的外法线方向;

(4)  $P_{(e)}$  是外力的实际功率, 即  $P_{(e)} = \int_{\Omega} \rho f \cdot v d\Omega + \int_{\partial\Omega} T \cdot v ds$ 。

则热力学第一定律可表示为:

对任意一个物体  $\Omega$ ，有

$$\frac{d}{dt}(E+K) = P_{(e)} + Q \quad (2.1.11)$$

或

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (2.1.12)$$

利用散度定理，有

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\Omega} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}] ds = \int_{\Omega} \nabla_x \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) d\Omega \quad (2.1.13)$$

利用式 (2.1.13)，由式 (2.1.12) 可得

$$\int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) + \nabla_x \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) - \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] d\Omega \quad (2.1.14)$$

再利用前面建立的动量守恒定律，即式 (2.1.6)，代入式 (2.1.14) 可得

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \nabla_x \cdot \mathbf{q} \quad (2.1.15)$$

写成分量形式为

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho r - q_{i,i} \quad (2.1.16)$$

其中， $\mathbf{D}$  为变形率张量。在小变形假设下，式 (2.1.16) 可写成

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho r - q_{i,i} \quad (2.1.17)$$

其中， $\dot{\epsilon}$  ( $\dot{\epsilon}_{ij}$ ) 为应变率张量。

### 2.1.2.2 热力学第二定律：Clausius-Duhem 不等式

在实际的物理过程中，不仅要满足能量守恒定律，还要遵循特定的能量转移方向。热力学第二定律正是控制能量转换方向的基本定律。热力学第二定律认为在一个物质体系中存在一个热力学状态变量——熵，熵的变化决定了系统中能量转移的方向。

熵是反映一种与温度变化相关的能量变化。对域  $\Omega$  有

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \quad (2.1.18)$$

其中， $S$  即为熵，而  $s$  为比熵密度。

热力学第二定律指出，熵的生成率总是大于或等于热吸收率除以温度，即对任意一个域  $\Omega$ ，

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{\rho r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} ds \quad (2.1.19)$$

也可由散度定理写成

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{ds}{dt} + \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\rho r}{T} \right) d\Omega \geq 0 \quad (2.1.20)$$



由于对任意一个域  $\Omega$  都成立，则由式 (2.1.20) 可得

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (2.1.21)$$

利用能量守恒定律，消去式 (2.1.21) 中的  $\rho r$  可得

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla_x \cdot \mathbf{q} \right) \geq 0 \quad (2.1.22)$$

由于  $\nabla_x \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{\nabla_x \cdot \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}(T)}{T^2}$ ，再乘以  $T (> 0)$ ，可得

$$\rho \left( T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad}(T)}{T} \geq 0 \quad (2.1.23)$$

引入一个新的变量，即比自由能  $\psi$  ( $\psi = e - Ts$ )，可得如下 Clausius-Duhem 不等式

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad}(T)}{T} \geq 0 \quad (2.1.24)$$

在小变形假设下可以写成

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad}(T)}{T} \geq 0$$

或

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (2.1.25)$$

如果该物理过程是一个等温绝热过程，例如不考虑温度变化的、小变形范围内的弹塑性变形过程，则 Clausius-Duhem 不等式简化为如下形式

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.1.26)$$

## 2.2 经典率无关塑性理论

本节将介绍经典率无关塑性本构理论的基本框架，并将应变张量作为基本的（驱动）参量，介绍塑性理论在应力空间下的表述形式（详见康国政，2010）。同时，只针对小变形范围的塑性理论，并且不讨论相关的张量运算法则，这方面内容读者可阅读相关张量分析的论著。

### 2.2.1 应力和应变张量的定义

假定在  $[0, T]$  时间区间内，可变形物体内一点  $\mathbf{x}$  处的位移场已知，并记作  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ，则在小变形假设的前提下，该点处的应变张量定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad (2.2.1)$$

设空间坐标系的基矢为  $\{\mathbf{e}_i\}$ ，则可用分量形式来表述，即

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i \quad \text{且} \quad \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j} + u_{j,i} \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.2.3)$$

其中,  $\otimes$  代表两个同阶张量的乘积。则用分量表述可得

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad (2.2.4)$$

与之对应的应力张量可写成

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.2.5)$$

## 2.2.2 热力学变量的选择

对不考虑温度变化的时间无关塑性, 由上节讨论的热力学第二定律, 即 Clausius-Duhem 不等式的特殊形式式 (2.1.26) 可得

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_k} : \dot{\mathbf{V}}_k \geq 0 \quad (2.2.6)$$

其中,  $\psi$  为比自由能, 取决于可观察变量和内变量, 即

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{V}_k) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{V}_k) \quad (2.2.7)$$

该式中忽略了温度的影响,  $\mathbf{V}_k$  为描述材料变形必需的内变量。由式 (2.2.7) 可得应力张量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.2.8)$$

在描述材料的塑性变形过程中, 需要涉及反映材料应变硬化行为的内变量, 即分别反映各向同性硬化和随动硬化的内变量。对于各向同性硬化, 通常取累积塑性应变作为反映其演化的内变量, 即

$$p = \int_0^t \left( \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \quad (2.2.9)$$

也可取为耗散塑性功, 即

$$w_p = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau) d\tau \quad (2.2.10)$$

而对随动硬化, 可选取内变量  $\boldsymbol{\beta}$  来反映其演化规律。

与弹性应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  对应的热力学变量为应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  一样, 与上述反映应变硬化过程的内变量对应的热力学变量为

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad (2.2.11)$$

$R$  称为各向同性变形抗力,  $\boldsymbol{\alpha}$  称为背应力张量, 则式 (2.2.6) 可展开为

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - R\dot{p} - \boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \geq 0 \quad (2.2.12)$$