大学数学

下册

主编　李松林　兰华龙

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学

Daxue Shuxue

下册

主　编　李松林　兰华龙
副主编　李　应　邵文凯

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS · BEIJING

内容简介

大学数学系列教材分为上、下两册，本书是下册。

本书是编者们在多年教学经验的基础上，根据经济类、管理类专业人才培养方案，结合当前大学生的特点编写而成的，主要内容包括：矩阵及其线性运算与方阵行列式、矩阵的初等变换及初等矩阵、线性方程组与向量的线性相关性、矩阵问题的进一步讨论、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、统计推断等。本书编排结构合理，内容体系与时俱进，淡化数学理论，强化数学概念的直观性，渗透数学建模思想，难点处理独具匠心，习题选取灵活多变，通篇文字叙述清晰，重视知识与能力训练的统一，培养学生运用数学的意识，提高学生解决问题的能力。

本书适合普通高等学校经济类、管理类专业学生使用，也可作为其他相关人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学．下册/李松林，兰华龙主编．—北京：高等教育出版社，2013．3

ISBN 978-7-04-035006-7

Ⅰ．①大… Ⅱ．①李…②兰… Ⅲ．①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 018017 号

策划编辑 崔梅萍　责任编辑 崔梅萍　封面设计 李卫青　版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英　责任校对 杨凤玲　责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市白帆印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 21
字　　数 510 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013 年 3 月第 1 版
印　　次 2013 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 34.60 元

物 料 号 35006-00

前　言

大学数学是普通高等学校相关专业的一门重要基础课程，教学内容多，进度快，与专业知识结合紧密，在教学时不仅需要引导学生当前的学习，而且对学生的可持续发展应当有所启迪。本教材依照教育部最新制定的高等数学课程的教学基本要求，结合编者多年教学实践编写。

本书结构科学合理，体现以学生为主体。每一节列出学习目标，利于学生自学；以实际背景引入数学概念，利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际；例题习题的选择灵活多变，层次分明，利于满足不同专业不同层次的需要；分章提炼知识小结、应用与提高，利于学生拓宽解题思路、拓展学习内容。

本书重视知识的传授，更注重能力的培养，使学生在系统获得知识的同时，也能比较系统地提高能力，体现知识教学与能力训练的统一；重视培养学生运用数学的意识，通过典型例题，将多种计算方法列出，择优而取，既能牢固掌握知识，又能学到探求知识的思想方法和手段。

本书适度淡化数学理论，强化数学概念的直观性，一些定理的证明以几何解释或经济说明为主，给学生直观的理解；增加数学实验与数学软件介绍，解决学生利用现代技术解决高等数学的计算、应用问题，拓宽知识面，提升使用计算机解决数学的能力。

本教材下册共十章，主要内容包括：矩阵及其线性运算与方阵行列式、矩阵的初等变换及初等矩阵、线性方程组与向量的线性相关性、矩阵问题的进一步讨论、随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、统计推断等。各专业可根据专业培养目标和要求，选学相应的教学内容。

本教材下册由李松林、兰华龙任主编，李应、邵文凯任副主编，阮杰昌、蒋鹏忠、邹坤、李丹、高华参加编写。下册由李松林、兰华龙统稿完成。

在全书的编辑出版过程中，高等教育出版社给予了大力帮助与支持，编辑认真核实，反复斟酌，改正了书稿中的一些疏漏；西南民族大学雷开彬教授审阅了本教材下册的全书稿，并对全书的章节安排、框架设计和内容组织，提出了许多宝贵的意见和建议，在此一并致谢。

鉴于编者水平有限，书中难免出现一些缺点和错误，敬请读者与同行批评指正。

编　者

2013 年 1 月

目　录

第1章 矩阵及其线性运算与方阵行列式

矩阵、行列式是研究线性方程组的一种数学工具,有关矩阵的理论构成了线性代数的基本内容.矩阵在数学与其他自然科学、社会科学特别是经济学中有着广泛的应用.

本章介绍矩阵的概念及性质、矩阵的线性运算、矩阵的乘法以及方阵行列式的相关概念、性质.

§1.1 矩阵的相关概念

学习目标

1. 理解矩阵的相关概念;
2. 熟悉特殊矩阵的特征;
3. 掌握矩阵的性质.

一、矩阵的概念

引例1 某高校学生甲和乙第一学期的大学数学、大学英语、计算机文化基础成绩如下表所示.

科目 / 分数 / 学生	大学数学	大学英语	计算机文化基础
学生甲	90	78	91
学生乙	76	89	82

以上数据可以用一个两行三列的矩形数表来表示:

$$\begin{pmatrix} 90 & 78 & 91 \\ 76 & 89 & 82 \end{pmatrix}.$$

引例2 把某商品从产地 A_1、A_2 运往销地 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 的运输量如下(单位:吨).

运输量/t 销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	12	5	4	8
A_2	7	23	12	0	6

从产地 A_1 运送商品到销地 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 的运输量分别为 10,12,5,4,8 吨,从产地 A_2 运送商品到销地 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 的运输量分别为 7,23,12,0,6 吨. 运输量可用一个两行五列的矩形数表表示:

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 5 & 4 & 8 \\ 7 & 23 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

上面所举的两个数表,其中各个数或元素是不能互换位置的,因为每个位置具有不同的含义.

引例 3 三元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

将其未知量的系数与常数项按照原来顺序组成一个三行四列矩形数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

这样的数表在数学上称为矩阵.

定义 1.1.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵,简记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$,其中 a_{ij} 表示位于数表中第 i 行第 j 列的数,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元(或者元素). 常用大写英文黑体字母来表示矩阵,如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$. 元素是实数的矩阵称为实矩阵,元素属于复数域的矩阵称为复矩阵. 本书中若无特殊说明,一般是指实矩阵.

两个矩阵的行数相等,列数也相等时,称它们为同型矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ 是同型矩阵,且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij} = b_{ij}\ (i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,并记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

二、特殊矩阵

下面一些特殊矩阵是在今后应用中经常遇到的矩阵.

1. 行矩阵　矩阵只有一行元素,即 $m=1$, $\boldsymbol{A}=(a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n})$.

2. 列矩阵　矩阵只有一列元素,即 $n=1$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$.

3. 零矩阵　所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵. 记作 $\boldsymbol{O}=(0)_{m\times n}$.

注意,不同型的零矩阵是不相同的.

4. 方阵　行数和列数相等(即 $m=n$)的矩阵称为 n 阶方阵,记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

在 n 阶方阵中,从左上角到右下角的 n 个元素称为 n 阶方阵的主对角线元素. 特别地,只有一行一列的一阶方阵实际上是一个数.

5. 对角矩阵　主对角线以外的元素全是零的方阵称为对角矩阵. 形如

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n 阶对角矩阵.

6. 数量矩阵

主对角线上元素全相等的对角矩阵称为数量矩阵.

7. 单位矩阵

在对角阵中若 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$,即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

则称之为单位矩阵,有时候为了突出单位矩阵的阶数,将 n 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{E}_n$.

例如,$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 分别称为二阶、三阶单位矩阵.

8. 上(下)三角形矩阵

主对角线以下的元素全是零的方阵称为上三角形矩阵;主对角线以上的元素全是零的方阵称为下三角形矩阵,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为上三角形矩阵；

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

为下三角形矩阵.

9. 转置矩阵

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,称 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

例如，矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的转置矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

习题 1.1

A 组

1. 填空题

(1) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角形矩阵,又是下三角形矩阵,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是________矩阵.

(2) 与矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$同型的单位矩阵是________.

2. 写出下列矩阵：

(1) $a_{ij} = i - j$ 的 3×2 矩阵；

(2) $a_{ij} = ij$ 的 4 阶方阵；

(3) 主对角线元素全为零的四阶数量矩阵.

3. 设有 A、B、C 三类商品去年和今年的价格如下表所示(单位:元)：

	去年	今年
A	100	200
B	90	50
C	120	150

试用矩阵表示上述表格.

B　组

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 则 $a=$________, $b=$________.

2. 某地区生产同一产品的有 C_1,C_2 两个厂, 有三家销售店 D_1,D_2,D_3, 用 a_{ij} 来表示第 i 厂家供应第 j 店的产品量, 构造矩阵 $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix}50 & 100 & 200\\ 150 & 200 & 0\end{pmatrix}\quad(单位:件),$$

指出 $\boldsymbol{A}$ 的实际含义.

3. 设 $\begin{pmatrix}a+2b & 2a-b\\ 2c+d & c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, 求 a,b,c,d 的值.

§1.2　矩阵的线性运算

学习目标

1. 熟悉矩阵的线性运算法则;
2. 熟练掌握矩阵的线性运算.

矩阵的意义不仅在于把一些数据根据一定的顺序排列成行列形式,而且还在于对它定义了一些有理论意义和实际意义的运算,使它真正成为有用的工具.

一、矩阵的加法

定义 1.2.1　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n.$$

需要指出的是,两个矩阵相加是有条件的,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必须是同型矩阵. 例如

$$(1\quad 2\quad 3)+(2\quad -1\quad -2)=(3\quad 1\quad 1),$$

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

由于矩阵的加法归结为元素的加法,也就是数的加法,所以,不难验证加法满足下列运算规律:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;(交换律)

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;(结合律)

(3) 零矩阵　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,即任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和与之同型的零矩阵相加仍为 $\boldsymbol{A}$.

(4) 负矩阵　对于任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,存在 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$,满足 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,则称 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

由性质(4)可以定义减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

二、数乘矩阵

定义 1.2.2　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$,规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.$$

数乘矩阵满足下列运算规律:

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

例 1　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$,求 $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$ 及 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解　$$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 0 & -9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7 & 3\\ -2 & -9 & 5\end{pmatrix}.$$

同理　$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ -2 & 9 & -1\end{pmatrix}$.

三、矩阵的乘法

定义 1.2.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,并把此乘积记作

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}.$$

特别地,当行矩阵$(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is})$与列矩阵$\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}$相乘时,即

$$(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}),$$

就是一个数 c_{ij},这表明 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列位置上的元素 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

易知,只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘.矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数、列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 32\\ -8 & -16\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

注意:一般地,

(1) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$(不满足交换律);

(2) $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但却可能有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,不一定有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$(不满足消去律);

(4) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}$.

由例 2 可知,矩阵乘法不满足交换律、消去律.但在假设运算都可行的情况下,矩阵的乘法仍满足下列运算律:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;(结合律)

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;(左分配律)

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;(右分配律)

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$ (其中 λ 为常数).

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

例 3 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 3×3 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,其乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 是 2×3 矩阵.由定义 1.2.3 有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times0+1\times1+(-1)\times1 & 2\times2+1\times1+(-1)\times5 & 2\times0+1\times1+(-1)\times(-1)\\ 3\times0+0\times1+2\times1 & 3\times2+0\times1+2\times5 & 3\times0+0\times1+2\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 16 & -2\end{pmatrix}.$$

有了矩阵的乘法运算,就可以对任意非负整数定义矩阵的幂.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,定义

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A},$$

其中 k 为非负整数.

例 4 已知矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}^2$,$\boldsymbol{A}^3$ 及$\boldsymbol{A}^4$.

解

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵的乘法满足结合律,所以矩阵的幂满足以下运算规律:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l},\quad (\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl},$$

其中 k,l 为非负整数. 又因为矩阵乘法不满足交换律,所以对任意两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,一般有 $(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 5 已知矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 因为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2 \quad -1 \quad 2),$$

所以

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\left[(2 \quad -1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right](2 \quad -1 \quad 2) = 2\boldsymbol{A},$$

故有

$$\boldsymbol{A}^n = 2^{n-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^{n-1} & 2^n \\ 2^{n+1} & -2^n & 2^{n+1} \\ 2^n & -2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

例 6 某公司下属甲、乙、丙三个工厂,全年消耗Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 4 种原材料数量用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 甲 \\ 乙 \\ 丙, \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array} \end{array}$$

而 4 种原材料的单价顺次为 6 万元,10 万元,4 万元,2 万元,表示为矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6\\10\\4\\2\end{pmatrix},$$

试求该公司甲、乙、丙三个工厂全年消耗总额.

解 用矩阵 $\boldsymbol{P}$ 表示甲、乙、丙三个工厂全年消耗总额,则

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}5&2&0&8\\7&1&4&3\\2&9&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\10\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}66\\74\\126\end{pmatrix},$$

即甲、乙、丙三个工厂全年消耗总额分别为 66 万元,74 万元,126 万元.

例 7(人口迁移的动态分析) 对城乡人口流动作年度调查,发现有一个稳定地向城镇流动的趋势:每年农村居民的 2.5% 移居城镇,而城镇居民的 1% 迁出.现在总人口的 60% 位于城镇.假如城乡总人口保持不变,并且人口流动的这种趋势继续下去,那么一年以后住在城镇的人口所占比例是多少?两年以后呢?10 年以后呢?

解 设开始时,乡村人口为 y_0,城镇人口为 z_0,一年以后有

乡村人口 $$\frac{975}{1\,000}y_0+\frac{1}{100}z_0=y_1,$$

城镇人口 $$\frac{25}{1\,000}y_0+\frac{99}{100}z_0=z_1,$$

或写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{975}{1\,000}&\frac{1}{100}\\\frac{25}{1\,000}&\frac{99}{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}.$$

两年以后,有

$$\begin{pmatrix}y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{975}{1\,000}&\frac{1}{100}\\\frac{25}{1\,000}&\frac{99}{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{975}{1\,000}&\frac{1}{100}\\\frac{25}{1\,000}&\frac{99}{100}\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}.$$

10 年以后,有

$$\begin{pmatrix}y_{10}\\z_{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{975}{1\,000}&\frac{1}{100}\\\frac{25}{1\,000}&\frac{99}{100}\end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}.$$

习题 1.2

A 组

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1\quad -2)$，求 $\boldsymbol{AB}$.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$.

3. 计算下列乘积.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 4\end{pmatrix}$；　　(2) $(1\quad 0\quad -2)\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\4 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2$ 为二阶单位矩阵，求 $(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & -1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & -2 & 2\\0 & 3 & -1\end{pmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

6. 计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\\5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 8 & -1\\2 & 0 & 3\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\0 & 4 & 2\\7 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

B 组

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\2 & -1 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$.

3. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & -1 & 2\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，设 $f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-1$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，验证：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.