大学数学系列规划教材

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

（理工类）

主　编／杜先能　孙国正

副主编／蒋　威　王良龙　侯为波　祝东进

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

大学数学系列规划教材

概率论与数理统计

（理工类）

主　编　杜先能　孙国正
副主编　蒋　威　王良龙
　　　　侯为波　祝东进

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计:理工类/杜先能,孙国正主编. —2版. —合肥:安徽大学出版社,2012.11
大学数学系列规划教材
ISBN 978-7-5664-0584-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①杜… ②孙… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 212708 号

概率论与数理统计(理工类)
(大学数学系列规划教材)　　主　编　杜先能　孙国正

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
经　　销:全国新华书店
印　　刷:中国科学技术大学印刷厂
开　　本:170mm×240mm
印　　张:14.75
字　　数:281 千字
版　　次:2012 年 11 月第 2 版
印　　次:2013 年 1 月第 2 次印刷
定　　价:25.00 元
ISBN 978-7-5664-0584-5

责任编辑:武溪溪　张明举　　装帧设计:张同龙　李　军
责任印制:赵明炎

再版前言

本书自2004年出版以来，承蒙读者厚爱，先后印刷8次．在教学过程中，师生们发现了一些不足和错误，并不断提出了一些修改意见．

我们对全书进行了仔细的审阅，采纳了师生们提出的意见，在本书再版之际，对原书进行了适当的修改和补充．为了使本书在教学中更好地操作，修改的具体措施体现在下述几个方面：

(1)本书初版的结构受到一致的肯定，这次未加更改；

(2)对初版作了删繁就简的修改，如将第1～3章中的性质的推导过程进行了简化，删去了第4章定理6的证明；

(3)为了中学和大学知识更好的衔接和学习，我们在第1章增添了排列组合的知识；

(4)为了适用于不同程度的读者，我们适当增添了典型的习题，并对一些课后习题增加了解答提示．

由于编者水平有限，再版后书中的错误和缺陷在所难免，恳切希望读者给予批评指正．

编　者

2012年9月

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规划的一门数学学科.它是数学中与现实世界联系密切、应用广泛的学科之一.随着人类进入21世纪这个信息时代,随机现象的数学理论、方法已在自然科学及人文社会的各个领域有着极其广泛的应用.概率论与数理统计与其他学科相结合形成了许多边缘性学科,如金融统计学、生物统计学、医学统计学、数量经济学、统计物理学、统计化学等等.

本书是依据教育部颁发的教学大纲,同时参考近年来《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(概率论与数理统计部分),在编者多年教学与实践的基础上完成的.本书可作为高等学校理工科"概率论与数理统计"课程的教材或教学参考书.

全书共分七章:第一章至第四章为概率论部分,其内容有概率论的基本概念,一元与多元随机变量及其概率分布、数字特征,大数定律与中心极限定理等;第五章至第七章为数理统计部分,其内容有统计量及其概率分布、参数估计、假设检验等.

本书体现了编者在以下几方面的努力:

1. 通过例题细致地阐述了概率论与数理统计中的主要概念和方法及其产生的背景和思路,力求运用简洁的语言描述随机现象及其内在的统计规律性.

2. 对于书中的定理和结论,大多给出了简化、直观且严格的证明.对一些类似的结论给出了推导与证明的思路.有些结论用表格列出,便于对照、理解与掌握.

3. 按照国家标准，采用规范的概率统计用语. 注重提高学生运用概率统计的理论与方法去解决实际问题的能力. 书中例题与习题较丰富，包括大量的应用题，有助于培养学生分析问题与解决问题的能力.

本书的编写是在安徽大学、安徽师范大学、淮北煤炭师范学院三校数学系、教务处的领导和许多教师的大力支持下完成的. 安徽大学出版社为本书的出版做了大量的工作，在此表示感谢. 在本书的编写过程中，我们参阅了国内外许多教材，谨表诚挚谢意.

由于编者水平有限，书中的错误和缺陷在所难免，恳请同行、读者提出宝贵意见.

编 者

2003 年 12 月

目 录

第 1 章

随机事件及其概率

概率论与数理统计是数学的一个重要分支，它是研究随机现象统计规律性的一门学科，其应用广泛，是科技、管理、经济等工作者必备的数学工具．本章通过随机试验介绍概率论中的基本概念——样本空间、随机事件及其概率，并进一步讨论随机事件的关系及其运算，概率的性质及其计算方法．

§1.1　随机事件及其运算

1. 随机现象及其统计规律性

自然界和人类社会中存在着许多现象，其中有一些现象，只要满足一定的条件，就必然会发生．例如，在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 必然沸腾；在没有外力作用的条件下，物体必然静止或作匀速直线运动；10 件产品中有 2 件次品，从中任意抽取 3 件，其中至少一件不是次品等等．所有这些现象，有一个共同特点：事前人们完全可以预言会发生什么结果．我们称这类现象为**确定性现象**或**必然现象**．研究这类现象的数学工具是线性代数、微积分学及微分方程等经典数学理论与方法．

但是在自然界和人类社会中，还存在着与必然现象有着本质差异的另一类现象．例如，向地面投掷一枚硬币，硬币可能是正面向上也可能反面向上；从含有 5 件次品的一批产品中抽取 3 件产品，取到次品的件数可能是 0，1，2，3 等等．这些现象的一个共同特点是：在同样的条件下进行同样的观测或实验，有可能发生多种结果，事前人们不能预言将出现哪种结果．这种在同样条件下进行同样的观测或实验，却可能发生种种不同结果的现象，称为**随机现象**或**偶然现象**．

表面上看来，随机现象的发生，完全是随机的、偶然的，没有什么规

律可循,但事实上并非如此.对一次或少数几次观测或实验而言,随机现象的结果确实是无法预料的,是不确定的.但是,如果我们在相同的条件下进行多次重复的实验或大量的观测,就会发现,随机现象结果的出现,具有一定的规律性,因而在某种程度上也是可以预言的.例如,各个国家各个时期的人口统计资料显示,新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是1∶1.在自然界和人类社会中,这种现象是普遍存在的,看起来好像是毫无规律的随机现象,却有着某种规律性的东西隐藏在它的后面.正如恩格斯所说:“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律.”(《马克思恩格斯选集》中译本第四卷243页,1972年版).我们称这种规律性为随机现象的**统计规律性**.本课程的任务就是要研究和揭示这种规律性.

2. 随机试验与事件

为了方便起见,我们把对某种自然现象进行的一次观测或作的一次实验,统称为**一个试验**.如果一个试验具备下列三个特性:

(ⅰ)试验可以在相同条件下重复进行;

(ⅱ)每一次试验的可能结果不止一个,而究竟会出现哪一个结果,在试验前不能准确地预言;

(ⅲ)试验所有的可能结果在试验前是明确(已知)的,而每次试验必有其中的一个结果出现,并且也仅有一个结果出现.

就称这种试验为**随机试验**,并用字母 E_1, E_2 等表示.对于一个试验 E,它的每一种可能出现的最简单的结果,称为**基本事件**或**样本点**,习惯上用 ω 表示.所有的基本事件组成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**,记为 Ω.

下面举一些例子来说明.

E_1:掷一颗骰子,观察出现的点数.其样本空间为

$$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\};$$

E_2:将一枚质地均匀的硬币连掷两次,观察出现正、反面的情况.样本空间为

$$\Omega_2=\{(\text{正面},\text{正面}),(\text{正面},\text{反面}),(\text{反面},\text{正面}),(\text{反面},\text{反面})\};$$

E_3:记录电话交换台一小时内接到呼唤的次数.样本空间为

$$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

E_4:五件产品中有三件正品(分别记为 Z_1, Z_2, Z_3)和两件次品(分别记为 C_1, C_2),现从中任意取两件,观察取出的产品的正、次品情况.样本

空间为 $\Omega_4=\{(Z_1,Z_2),(Z_1,Z_3),(Z_2,Z_3),(Z_1,C_1),(Z_1,C_2),(Z_2,C_1),(Z_2,C_2),(Z_3,C_1),(Z_3,C_2),(C_1,C_2)\}$；

E_5：从一大批某类电子元件中，任意抽取一件，测试其使用寿命. 样本空间为 $\Omega_5=\{t|t\geqslant 0\}$ 或 $\Omega_5=[0,+\infty)$.

从上述样本空间中，可以发现它们中有的是数集，有的不是数集；有的数集是有限集，有的则是无限集.

当研究随机试验时，人们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现，而更关心的是满足某些条件的样本点在试验后是否出现. 例如，在 E_5 中，测试某类电子元件的使用寿命以便确定该批元件的质量. 若假定使用寿命超过 1000 小时为正品，则人们关心的是试验结果是否大于 1000 小时. 满足这个条件的样本点组成了样本空间的子集，我们把样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用大写字母 A,B,C 等表示，必要时也可用 A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2 等表示，也可以用语言描述加花括号来表示. 例如，在 E_3 中，{呼唤次数不超过 5 次}，E_4 中{取出的两件产品中恰有一件次品}等都是这种表示方法. 显然，基本事件就是仅含一个样本点的随机事件；一个样本空间，可以有许多随机事件.

随机试验中，若组成随机事件 A 的某个样本点出现，则称**事件 A 发生**，否则称**事件 A 不发生**. 如 E_1 中，若用 A 表示{出现奇数点}，即$\{1,3,5\}$，它是 Ω_1 的子集，是一个随机事件，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，当且仅当掷出的点数是 1，3，5 中的任何一个时，则称事件 A 发生.

由于样本空间 Ω 是其本身的一个子集，因而也是一个随机事件，又因为样本空间 Ω 包含所有的样本点，所以每次试验必定有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，因而称 Ω 为**必然事件**. 又因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集，所以 $\varnothing$ 也是一个随机事件，由于 $\varnothing$ 不包含任何一个样本点，故每次试验 $\varnothing$ 必定不发生，因而称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

必然事件与不可能事件已无随机性而言，在概率论中，为讨论方便，仍把 Ω 与 $\varnothing$ 当作两个特殊的随机事件.

3. 随机事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集，故事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算完全类同，但要注意其特有的事件意义.

设 Ω 是给定的一个随机试验的样本空间，事件 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是 Ω 的子集.

(1) 包含关系

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称 A 是 B 的**子事件**，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 这种包含关系的几何直观如图 1.1 所示. 当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 时，称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

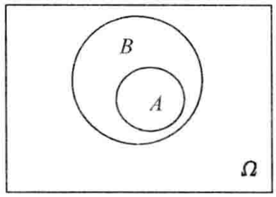

图 1.1

(2) 和事件

{事件 A 与事件 B 中至少有一个发生}的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 是由属于事件 A 或属于事件 B 的样本点组成的集合，其几何直观如图 1.2 所示(阴影部分).

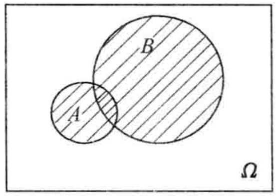

图 1.2

一般地，把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生}的事件称为这 n 个事件的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地，把可列个事件即{$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生}的事件称为这可列个事件的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

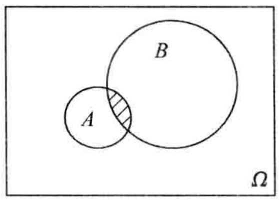

图 1.3

(3) 积事件

{事件 A 与事件 B 同时发生}的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 事件 $A\cap B$ 是由既属于事件 A 又属于事件 B 的样本点组成的集合，其几何直观如图 1.3 所示(阴影部分).

一般地，把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生}的事件称为这 n 个事件的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地，把可列个事件即{$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生}的事件称为这可列个事件的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4) 差事件

{事件 A 发生而事件 B 不发生}的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$(或 $A\backslash B$). 事件 $A-B$ 是由属于事件 A 但不属于事件 B 的样本点组成的子集，其几何直观如图 1.4 所示(阴影部分)，并有 $A-B=A-AB$.

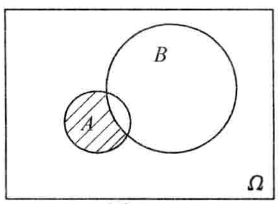

图 1.4

(5) 互不相容(或互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$(即 A 与 B 同时发生是不可能事件),则称此二事件是**互不相容(或互斥)事件**. 显然,互不相容的事件 A 与事件 B 没有公共的样本点,几何直观如图1.5所示.

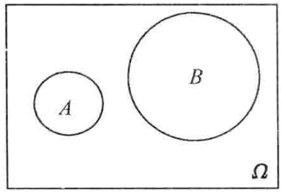

图1.5

若 A 与 B 互斥,则其和事件 $A\cup B$ 可简记为 $A+B$. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中,任意两个不同的事件都满足 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$,则称这 n 个事件是**两两互不相容(两两互斥)**的. 这时,其和事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 也可简记为

$$\sum_{i=1}^{n} A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n.$$

两两互斥的概念可以推广到可列个事件的情形,并且把 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 简记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(6) 对立(或逆)事件

在一个随机试验中,若只考虑某事件 A 是否发生,则相应的样本空间 Ω 被划分为 A 与 $\Omega-A$ 两个子集. 这时,把事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的**对立事件(或逆事件)**,记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\Omega-A$. 显然 $\overline{A}$ 表示事件 A 不发生,且有 $A\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=\Omega$. 由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件,故 $\overline{A}$ 与 A 又称为**相互对立(或互逆)事件**,其几何直观如图1.6所示.

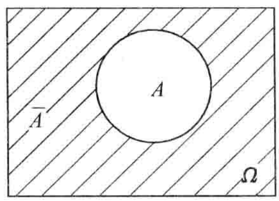

图1.6

在进行事件运算时经常要用到下面的定律:

交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

幂等律: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

德·摩根(De Morgan)律: $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$, $\quad\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

例 1 设随机事件 A,B,C,则

(ⅰ) B 发生但 A 不发生的事件为 $B-A=B\overline{A}$;

(ⅱ) A 与 B 至少发生其一的事件为 $A\cup B$;

(ⅲ) A 与 B 至少有一个不发生的事件为 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$;

(ⅳ) A 发生,B,C 都不发生的事件为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A(\overline{B\cup C})$;

(ⅴ) A,B,C 中至少有两个发生的事件为 $AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(ⅵ) A,B,C 中恰有一个发生的事件为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(ⅶ) A 发生但 B 与 C 中至少有一个不发生的事件为 $A(\overline{B}\cup\overline{C})=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})$.

§1.2 随机事件的概率

在实际问题中,常常需要对随机事件发生的可能性大小进行定量描述,而“概率”的概念正是源于这种需要而产生的.

1. 概率的统计定义

(1) 频率

若设 n_A 是 n 次试验中事件 A 发生的**次数**(或**频数**),则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$. 频率 $f_n(A)$ 有如下性质:

性质 1 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

性质 2 $f_n(\Omega)=1$;

性质 3 若 A 与 B 互斥,即 $AB=\varnothing$,则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

证 性质 1,2 是显然的. 现证性质 3. 我们用 $n_{A\cup B}$ 表示在 n 次试验中 $A\cup B$ 的频数,n_B 表示在 n 次试验中 B 发生的频数,因 A 与 B 互斥,故必有 $n_{A\cup B}=n_A+n_B$,从而必有

$$f_n(A\cup B)=\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A+n_B}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=f_n(A)+f_n(B).$$

先看下面的例子.

将一枚硬币抛 50 次、500 次各若干遍. 现摘录有关数据如表 1.1(表中 n_A 表示 n 次试验中事件 $A=\{$出现正面$\}$的频数). 历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)、费勒(Feller)和皮尔逊(Pearson)等也作过大量的这类试验,所得的有关数据见表 1.2.

表 1.1

试验序号	$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	24	0.48	253	0.506
5	18	0.38	251	0.502

表 1.2

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲　丰	4040	2048	0.5056
费　勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述两表可以发现，当抛掷硬币次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 总在常数 0.5 附近波动，并且呈现逐渐稳定于 0.5 的倾向. 频率的这种逐渐的"稳定性"就是前面所说的统计规律性，它揭示了随机现象内部隐藏着必然规律. 这里的常数 $p=0.5$ 称为频率 $f_n(A)$ 的稳定值，它能反映事件 A 发生的可能性大小. 一般地，每个随机事件都有相应的常数 p 与之对应，因此，我们可以用频率的稳定值定量地描述随机事件发生的可能性大小.

(2) 概率

定义 1　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一实数，记为 $P(A)$. 如果它满足下列条件：

(ⅰ) **非负性**　对每一个事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ⅱ) **规范性**　$P(\Omega)=1$；

(ⅲ) **可列可加性**　若 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots)$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i); \tag{1.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**. 其中(1.1)称为概率的**可列可加性**.

由概率的定义可以推得概率的一些性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$. (1.2)

证 由于 $\Omega=\Omega+\varnothing+\cdots$,所以

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+\cdots,$$

因此 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 (有限可加性)若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.3}$$

证 由于

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\cdots$$

由可列可加性及性质 1 得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

推论 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件,则

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.4}$$

证 由于 $A\cup\overline{A}=\Omega$ 且 $A\,\overline{A}=\varnothing$,由性质 2 得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

所以

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 3 设 A,B 是两事件,则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.5}$$

证 由于 $A=(A-B)\cup AB$ 且 $(A-B)\cap AB=\varnothing$,由可加性

$$P(A)=P(A-B)+P(AB),$$

移项即得(1.5).

特别地,若 $A\supset B$,由于此时 $AB=B$,于是 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,再由 $P(A-B)$的非负性,可得当 $A\supset B$ 时必有

$$P(A)\geqslant P(B). \tag{1.6}$$

性质 4 设 A,B 为两事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.7}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-A)$且 $A\cap(B-A)=\varnothing$,由可加性

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

类似可得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC). \tag{1.8}$$

用数学归纳法可以证明,对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&\quad+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}\tag{1.9}$$

2. 概率的古典定义

在讨论一般随机试验之前，我们先讨论一类最简单的随机试验，这类试验有如下两个特点：

（ⅰ）所有可能的试验结果仅有限种；

（ⅱ）每个结果出现的可能性相同.

我们把这类随机试验称为**等可能概型**. 由于它是概率论发展初期的主要研究对象，因此亦称为**古典概型**.

下面讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，且每个样本点出现的概率都相同，于是有

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}),$$

又由于基本事件是两两互不相容的，于是

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_1\}).$$

从而得

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n.$$

对于任一随机事件 A，若 A 包含 m 个样本点，即设 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$，则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_m}\})\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{m}{n},\end{aligned}$$

即

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点的总数}}.\tag{1.10}$$

这表明在古典概型中，任何事件 A 的概率的计算公式为 A 中所包含的样本点的个数除以样本空间 Ω 中所含样本点的总数. 即事件 A 的概率只与 A 中所含的样本点的个数有关，而与 A 包含的是哪几个具体的样本点是无关的.

例 2 把一枚质地均匀的硬币连掷两次，设事件 $A=\{$出现两个反面$\}$，$B=\{$出现的两个面相同$\}$，试求 $P(A)$ 与 $P(B)$.