普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济管理数学基础

陈殿友　术洪亮　张朝凤　编著

线性代数习题课教程

（第2版）

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

陈殿友　术洪亮　张朝凤　编著

线性代数习题课教程

（第2版）

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与普通高等教育"十一五"国家级规划教材《线性代数(第2版)》(陈殿友,术洪亮主编,清华大学出版社,2013)配套的习题课教材,内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和方阵的对角化、二次型.

本书仍按《线性代数》的结构分为6章,各章首先概括主要内容和教学要求,继之进行例题选讲、疑难问题解答及常见错误类型分析,最后给出练习题、综合练习题及参考答案与提示.

与主教材《线性代数》配套的除了《线性代数习题课教程》外,还有《线性代数教师用书》(习题解答)和供课堂教学使用的《线性代数电子教案》.

本书可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业线性代数课程的习题课教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题课教程/陈殿友,术洪亮,张朝凤编著. --2版. --北京:清华大学出版社,2014

(经济管理数学基础)

ISBN 978-7-302-34622-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①陈…②术…③张… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-题解 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第290847号

责任编辑: 佟丽霞
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 刘玉霞
责任印制: 杨 艳

出版发行: 清华大学出版社
网 址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址: 北京清华大学学研大厦A座 邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 三河市中晟雅豪印务有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 170mm×230mm **印 张**: 12.5 **字 数**: 228千字
版 次: 2006年9月第1版 2014年1月第2版 **印 次**: 2014年1月第1次印刷
印 数: 1~3500
定 价: 19.90元

产品编号: 053436-01

“经济管理数学基础”系列教材总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”，具备了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大展身手，产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建立确定性模型的基本数学工具. 第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建立随机性模型的基本数学方法. 第三类为模糊性模型，即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建立模糊性模型的基本数学手段.

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过学习，学生可以掌握这些课程的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程. 为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与主教材配套的电子教案和教师用书(习题解答). 该系列教材内容涵盖了教育部大学数学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面向 21 世纪课程”教材和国家“十五”规划教材的成果，同时也凝聚了作者们多年来在大学数学教学方面积累的经验. 本系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意体现时代的特

点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一．注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用．把数学实验内容与习题课相结合，突出数学应用和数学建模的思想方法．借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维．总之，本系列教材体现了现代数学思想与方法，建立了后续数学方法的接口，考虑了专业需求和学生动手能力的培养，并使教材的系统性和文字简洁性相统一．

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授．“经济管理数学基础”系列教材中主教材在每节后面都配备了习题，有的主教材在每章后还配备了总习题，其中(A)题是体现教学基本要求的习题，(B)题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题．书末给出了习题的参考答案，供读者参考．该系列教材中的习题课教程旨在帮助学生全面、系统、深刻地理解、消化主教材的主要内容，使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识，并综合运用所学知识分析、处理和解决经济管理及相关领域中的某些数学应用的问题．每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还列出了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示．

自本教材问世以来，许多同行提出了许多宝贵的意见。结合我们在吉林大学的教学实践经验，以及近年来大学数学课程教学改革的成果，我们对本系列教材进行了修订、完善．本次修订的指导思想是：(1)突出数学理论方法的系统性和连贯性；(2)加强经济管理的实际应用的引入和数学建模解决方法的讲述；(3)文字力图简洁明了，删繁就简；(4)增加了实际应用例题和习题。

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，吉林大学公共数学教学与研究中心吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作．清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持．在此一并致谢．

“经济管理数学基础”系列教材编委会

2013年8月

前　　言

经济管理数学基础《线性代数习题课教程》自 2006 年 9 月出版以来，受到了同行专家和读者的广泛关注，对本教材提出了许多宝贵的意见. 针对上述意见，结合我们在吉林大学的教学实践和教学改革以及大学数学教育发展的需要，我们对本教材进行了修订、完善.

根据本次修订的指导思想，紧密配合《线性代数(第 2 版)》主教材的需要，我们对第 1 章进行了较大的修改，增加了逆序数的习题，以加强与考研大纲接轨. 重点修订了行文体例和文字叙述，增加了实际应用例题和习题.

本次修订工作 1～2 章由张朝凤副教授负责，第 3～4 章由陈殿友教授负责，第 5～6 章由术洪亮副教授完成，全书由陈殿友统稿. 在本教材的修订过程中，得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院和清华大学出版社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本教材修订的编务工作，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中的错误和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 8 月

第 1 版前言

本书是依据经济类、管理类、金融类、人文类各专业对线性代数课程的教学要求而编写的，是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“经济管理数学基础”系列教材中的《线性代数》的习题课教材.

本书密切配合《线性代数》一书，内容充实，题型全面，每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答及常见错误类型分析，还配有练习题、综合练习题及参考答案与提示. 参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者. 本书体现了现代数学思想与方法，总结学习规律，解决疑难问题，提示注意事项，特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

本书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和方阵的对角化、二次型. 全书共分 6 章，第 1,2 章由张朝凤编写，第 3,4 章由陈殿友编写，第 5,6 章由术洪亮编写，全书由陈殿友统稿. 青年教师孙鹏、侯影、朱本喜、卢秀双及研究生李健完成了本书稿的录入、排版、制图工作.

书中不足之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2006 年 8 月

目　录

第1章 行 列 式

本章介绍用行列式的性质及展开定理计算行列式，介绍利用 Cramer 法则求解 n 元线性方程组的方法.

本章重点 n 阶行列式的性质、展开定理和计算方法.

本章难点 行列式的计算.

一、主要内容

n 阶行列式的定义，n 阶行列式的性质，代数余子式，行列式展开定理，Cramer 法则.

二、教学要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质.
3. 熟练掌握行列式的计算方法.
4. 熟练掌握行列式按行(列)展开定理.
5. 掌握 Cramer 法则.

三、例题选讲

例 1.1 已知 3□452□为一个 6 级排列，将数字 1 和 6 填入□内，使其成为奇排列.

解 我们可以将数字 1 和 6 随意填入两□内，然后求此排列的逆序数. 如果逆序数是奇数，该排列即为所求；如果逆序数为偶数，由定理 1.1，将数字 1 和 6 的位置对调，便得所求排列.

现将数字 1 填入第 1 个□内，将数字 6 填入第 2 个□内，得排列 314526，则

$$\tau(314526) = 2 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4.$$

即排列 314526 为偶排列，由定理 1.1，将数字 1 和 6 的位置对调，便得奇排列 364521.

例 1.2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\-1&0&2&1\\0&1&0&-1\end{vmatrix}.$$

分析 对于元素是数字的行列式,通常运用行列式的性质将其化为三角行列式来计算,或将其某一行(列)化成有较多 0 元素之后,再按该行(列)展开降阶.

解 方法 1

$$D\xlongequal[(-1)r_2+r_4]{r_1+r_3}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&0&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&0&0&2\end{vmatrix}=2.$$

方法 2

$$\begin{aligned}D&\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+(-1)A_{31}+0\cdot A_{41}\\&=(-1)^{1+1}M_{11}-(-1)^{3+1}M_{31}\\&=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&0&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&-1&2\\1&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}\\&=-1-(-3)=2.\end{aligned}$$

注 也可按第 2 列或第 2 行或第 4 行展开.

方法 3

$$D\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\\0&1&0&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&3\\1&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=2.$$

例 1.3　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c+d & 1 \\ b & c & a+d & 1 \\ c & d & a+b & 1 \\ d & a & b+a & 1 \end{vmatrix}.$$

分析　将第 1 列、第 2 列加到第 3 列，然后提取公因子.

解

$$D \xlongequal[c_2+c_3]{c_1+c_3} \begin{vmatrix} a & b & a+b+c+d & 1 \\ b & c & a+b+c+d & 1 \\ c & d & a+b+c+d & 1 \\ d & a & a+b+c+d & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \\ d & a & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.4　计算 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & -8 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　由

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5 D,$$

故 $D=0$.

注　若 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 为反对称行列式. 此题是奇数阶反对称行列式，故 $D=0$.

例 1.5　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

分析　各行元素之和相等.

解

$$D\xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{各列加到}}\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\ x & -1 & x+1 & -1\\ x & x-1 & 1 & -1\\ x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{去第 1 行}]{\text{后 3 行分别减}}x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 0 & 0 & x & -x\\ 0 & x & 0 & -x\\ 0 & 0 & 0 & -x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}x\begin{vmatrix}0 & x & -x\\ x & 0 & -x\\ 0 & 0 & -x\end{vmatrix}$$

$$=x^4.$$

例 1.6　计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix},\quad \text{其中 } a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n.$$

分析　这是 $|\nwarrow|$ 型行列式，可用主对角线元素化其为上(下)三角形来计算.

解　方法 1

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_i \times \frac{1}{a_{i-1}}} \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{(-1)c_i + c_1} \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

方法 2

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i \times \left(-\frac{1}{a_{i-1}}\right) + r_1} \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

注　此题的行列式结构特殊，一些行列式的计算都可先化成$|\nwarrow|$，再按照此题的方法计算，如例 1.6.

例 1.7　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i \neq a_i, i=1,2,\cdots,n$.

分析　行列式的特点为第 j 列($j=1,2,\cdots,n$)除元素 x_j($j=1,2,\cdots,n$)外都

相同,所以后 $n-1$ 行分别减去第 1 行化成例 1.5 行列式的结构,再用例 1.5 的方法求解.

解 后 $n-1$ 行分别减去第 1 行,则

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{x_i-a_i} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

例 1.8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

分析 行列式中行(列)各元素之和相等,故将第 $2,3,\cdots,n$ 列(行)加到第 1 列(行),提出公因子 $x+(n-1)a$,然后再用后 $n-1$ 行分别减去第 1 行.

解

$$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i+c_1}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$