线性代数

学习指导与解题能力训练

主编　宋新霞　李焱华　相丽驰

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

线性代数
学习指导与解题能力训练

主编　宋新霞　李焱华　相丽驰

中南大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与解题能力训练/宋新霞,李焱华,相丽驰主编.
—长沙:中南大学出版社,2014.1
ISBN 978-7-5487-1039-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①宋…②李…③相… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 019758 号

线性代数学习指导与解题能力训练

主编 宋新霞 李焱华 相丽驰

□责任编辑 刘颖维
□责任印制 文桂武
□出版发行 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路 邮编:410083
发行科电话:0731-88876770 传真:0731-88710482
□印 装 长沙理工大印刷厂

□开 本 787×1092 1/16 □印张 9.75 □字数 238 千字
□版 次 2014 年 1 月第 1 版 □2014 年 1 月第 1 次印刷
□书 号 ISBN 978-7-5487-1039-4
□定 价 26.00 元

前言

线性代数是各高校非数学专业重要的基础课程，它不仅是学习其他专业课程的基础，还是整个大学教育的一门基础课程，也是研究生入学考试必考的课程。在线性代数课程的学习中，学生不仅要获取必要的数学知识，为后续专业课打基础；更为重要的是，在获取数学知识的同时，要努力提高自己的抽象思维、逻辑思维、运算技能、综合应用等方面的能力。

目前，线性代数课程课时偏少，而内容较多，进度又快。加之，线性代数课程内容本身具有理论性强、抽象性强、概念多、定理多、计算量大、解题困难的特点，使得学生刚开始学习这门课程时，感到难以理解和接受，做习题时，有时感到无从下手。本书作为教学辅助读本，适合学生课下自主学习，有助于学生对课堂所学内容的理解消化、巩固提高。

本书编写过程中，主要参考了胡金德老师主编的《线性代数学习指导》，吴赣昌老师主编的《线性代数学习辅导与习题解答》和房宏、王学会老师主编的《线性代数习题精解与学习指导》，从中汲取了许多优点。本书包含矩阵、行列式、线性方程组、矩阵特征值与特征向量四章内容。每章从基础知识和主要内容和结论、典型例题和习题训练三个方面引导学生学习，各章最后附有习题参考答案。习题训练分为填空题、选择题、计算题和综合应用题四部分，题目数量多、知识点分布全面，既有基本题型也有综合应用类题型和考研题型，这也是本书的一大特点。本书最后附有近6年考研线性代数部分试题及答案，便于学生参考学习。

本书还可以作为经管类学生学期期末考试的复习资料。参加本书编写的还有吴慧玲、梁媛、鲁立刚、伍宪彬、徐园芬等教师。本书在编写过程中得到了本部门同仁的大力帮助和支持，在此深表谢意！

由于编者的水平有限，书中错误、疏漏之处在所难免，敬请同行们批评指正。

编者

2013年12月

目录

第 1 章　矩阵

1.1　基本要求

1. 理解矩阵有关概念；掌握矩阵的加、减、数乘的运算；熟练掌握矩阵乘法的技巧(重点内容).

2. 理解逆矩阵的概念与性质；掌握逆阵的求法.

3. 了解分块矩阵的有关概念与性质.

4. 熟练地掌握矩阵的初等变换，并用它把矩阵化为阶梯形矩阵，行最简形及标准形.

5. 会用初等变换求矩阵的逆和矩阵的秩.

6. 会运用矩阵运算解决一些简单的实际问题.

1.2　主要内容和结论

1.2.1　矩阵的定义

$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按照一定的次序排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素.

1.2.2　一些特殊的矩阵

1. 零矩阵：所有元素都为 0 的矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

2. 行矩阵：只有一行的矩阵 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

3. 列矩阵：只有一列的矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$.

4. 对角矩阵：主对角线以外的元素均为 0 的矩阵. 若 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 n 阶对角矩阵，其对角元分别为 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{nn}$，则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可记为

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn})=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

5. 单位矩阵：主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵，若 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{E}$ 可记为

$$\boldsymbol{E}=\operatorname{diag}(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 数量矩阵：主对角线上的元素全为非零常数 k 的 n 阶对角矩阵，记作

$$k\boldsymbol{E}=\operatorname{diag}(k,\ k,\ \cdots,\ k)=\begin{bmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{bmatrix}.$$

7. 上三角矩阵：主对角线下方的元素全为零的矩阵，如 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角矩阵：主对角线上方的元素全为零的矩阵，如 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. 对称矩阵：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

9. 反对称矩阵：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

10. 正交矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.

11. 准对角矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S \end{bmatrix}.$$

1.2.3 矩阵的运算

1. 矩阵的加法

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵加法的运算规律为(设 A、B、C 都是 $m\times n$ 矩阵):

(1)结合律: $A+(B+C)=(A+B)+C$.

(2)交换律: $A+B=B+A$.

(3)减法为: $A-B=A+(-B)$, 若 $A=(a_{ij})$, 则 $-A=(-a_{ij})$为 A 的负矩阵.

2. 数与矩阵的乘法

数 k 与矩阵 A 的乘积记作 kA 或 Ak,

$$kA=Ak=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律(A, B 为 $m\times n$ 矩阵, k、l 为任意常数):

$$①k(lA)=(kl)A \quad ②(k+l)A=kA+lA \quad ③k(A+B)=kA+kB$$

3. 矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}$　$B=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$

则

$$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

注: 只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时, 两个矩阵才能相乘.

在运算可进行的条件下矩阵乘法满足以下运算规律:

(1) $(AB)C=A(BC)$.

(2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.

(3) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$.

对于方阵 A 及自然数 k, $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$称为方阵 A 的 k 次幂, 方阵的幂具有以下性质:

(1) $A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$.

(2) $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$($k_1$, k_2 为自然数).

注: 矩阵的乘法不满足交换律, 一般地:

$$AB\neq BA \quad (AB)^k\neq A^kB^k$$

4. 矩阵的转置

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到一个新的矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$. 运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，叫做方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$. 运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，λ 为数)

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^{n}|\boldsymbol{A}|$.

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

行列式的定义及计算方法见第二章.

1.2.4 矩阵的逆

1. 定义：对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

2. 矩阵可逆的充分必要条件

定理 1：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理 2：若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下的方阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

推论：若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$)，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵(或满秩矩阵). 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵(或降秩矩阵).

3. 方阵的逆矩阵的运算规律($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵，数 $k\neq 0$)：

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. (特别地：$(\boldsymbol{A}^{k})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{k}$，$k$ 为正整数).

(5) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

4. 伴随矩阵的运算规律($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵，数 $k \neq 0$).

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

(2) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(3) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^T$.

(5) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

(6) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

(7) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

5. 求逆矩阵的一般方法

方法 1：用伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

方法 2：初等变换法(见 1.2.5 矩阵的初等变换和初等矩阵)，即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1})$$

对数值可逆矩阵而言，这是基本且常用的方法.

方法 3：用定义，即求一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

1.2.5　矩阵的初等变换与初等矩阵

(1) 初等变换

矩阵的初等变换包括以下三种：

①交换矩阵的两行(列)；

②用数 $k \neq 0$ 乘矩阵的某一行(列)；

③某一行(列)的 l 倍加到另一行(列)上.

(2) 初等矩阵

对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 施行一次初等变换后所得到的矩阵称为初等矩阵.

①第一种初等矩阵：交换 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)和第 j 行(列)得到的矩阵，记作 $\boldsymbol{E}(i, j)$；

②第二种初等矩阵：用非零数 k 乘以 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)得到的矩阵，记作 $\boldsymbol{E}(i(k))$；

③第三种初等矩阵：将 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行(i 列)的 k 倍加到第 i 行(j 列)上得到的矩阵，记作$\boldsymbol{E}(i, j(k))$.

注： 初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆矩阵仍是同类型的初等矩阵.

$$\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1} = \boldsymbol{E}(i, j) \quad \boldsymbol{E}^{-1}(i(k)) = \boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad \boldsymbol{E}^{-1}(i, j(k)) = \boldsymbol{E}(i, j(-k))$$

(3) 初等矩阵与初等变换的关系

对 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，相当于将 $\boldsymbol{A}$ 矩阵左乘以相应的 $\boldsymbol{m}$ 阶初等矩阵.

同样，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换，相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘以相应的 $\boldsymbol{n}$ 阶初等矩阵.

结论： $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，可以表示成一系列初等矩阵的乘积，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$，其中，$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 是初等矩阵.

(4) 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}],$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

(5)矩阵的等价与化简

①等价：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经一系列初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$

结论： $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PBQ}$

②行阶梯矩阵：如果矩阵中元素全为零的行，简称零行(如果存在)全部位于非零行(元素不全为零的行)的下方，各非零行的左起第一个非零元素的列序数有上至下严格递增(即必在前一行的第一个非零元素的右下位置)，则称此矩阵为行阶梯矩阵.

$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$就是行阶梯矩阵.

③行最简矩阵：若行阶梯矩阵中的非零行的第一个元素为 1，且 1 所在列的其他元素全为零，则称此行阶梯矩阵为行最简形矩阵.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$为行最简形矩阵.

④标准形矩阵：若 $m \times n$ 阶矩阵的左上角为一个 r 阶单位阵，其余元素全为零，即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n},$$

则称此矩阵为标准形矩阵，它由 m，n，r 三个数唯一确定，其中 r 为标准形矩阵中非零行的行数.

结论：

①矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总能经过一系列初等行变换化成行阶梯矩阵和行最简形矩阵.

②矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总能经过一系列初等变换化成标准形$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，即：$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，且标准形是唯一的.

1.2.6 矩阵的秩

(1)矩阵的秩的定义

$r(\boldsymbol{A}) = r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的非零的子式的最高阶数是 r

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中有一个 r 阶子式不等于零，而所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

性质：

①初等变换不改变矩阵的秩；两个同型矩阵等阶$\Leftrightarrow$秩相等；

②若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有某个 s 阶子式不为 0，则 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant s$；

③若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有 t 阶子式全为 0，则 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant t$；

④$0 \leqslant r(\boldsymbol{A}_{m \times n}) \leqslant \min\{m, n\}$.

(2)求矩阵秩的方法

$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形 $\boldsymbol{B}$，$r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ 中非零行的行数.

(3)关于矩阵秩的结论

①$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

②n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow$秩$(\boldsymbol{A})=n$.

③$r(\boldsymbol{A})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

④$r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

⑤$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})\quad k\neq 0$.

⑥$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}$.

⑦若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$.

⑧$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

⑨$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1.\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$

1.2.7 分块矩阵

(1)分块矩阵

用几条纵线和横线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子矩阵，把子矩阵看作原矩阵的一个元素，就得到了分块矩阵.

特别地，$\boldsymbol{A}$ 以行分块

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{A}_1\\ \hdashline \boldsymbol{A}_2\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \boldsymbol{A}_m\end{array}\right],$$

$\boldsymbol{A}_i=[a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}]$是一个子矩阵.

$\boldsymbol{B}$ 以列分块

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \vdots & b_{mn}\end{array}\right]=[\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{B}_n],$$

其中 $\boldsymbol{B}_j=\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{B}$ 的一个子矩阵.

这时，$\boldsymbol{A}$ 被看成以子矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 为元素的 $m\times 1$ 矩阵(称为以行分块)，$\boldsymbol{B}$ 被看成以子矩阵 $\boldsymbol{B}_j$ 为元素的 $1\times n$ 矩阵(称为以列分块).

(2)关于分块矩阵的结论

①设对角块矩阵(准对角矩阵)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$

A 可逆$\Longleftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Longleftrightarrow|\boldsymbol{A}_i|\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, s$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{bmatrix}.$$

②若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 可逆$\Longleftrightarrow|\boldsymbol{A}_1|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_2|\neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & \end{bmatrix}.$$

③三角块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_{n\times n}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆$\Longleftrightarrow|\boldsymbol{B}|\neq 0$，$|\boldsymbol{C}|\neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}.$$

1.3 典型例题

例 1 求与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$可交换的所有矩阵.

分析: 利用待定系数

解 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b&c\\0&a_1&b_1&c_1\\0&a_2&b_2&c_2\\0&a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$$

由 $AB=BA$，得

$a_1=0$，$b_1=a$，$c_1=b$，$d_1=c$，

$a_2=0$，$b_2=a_1=0$，$c_2=b_1=a$，$d_2=c_1=b$，

$a_3=0$，$b_3=a_2=0$，$c_3=b_2=0$，$d_3=c_2=a$.

因此，$B=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{bmatrix}$，其中 a，b，c，d 为任意实数.

例 2　已知 $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$\Lambda=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}$，求 A^5.

分析： Λ 是对角矩阵，Λ^5 易求，而 $PP^{-1}=P^{-1}P=E$

解　$P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，$\Lambda^5=\begin{bmatrix}2^5&0\\0&4^5\end{bmatrix}=32\begin{bmatrix}1&0\\0&32\end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}A^5&=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\\&=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\\&=P\Lambda E\Lambda E\Lambda E\Lambda E\Lambda P^{-1}\\&=P\Lambda^5P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}32\begin{bmatrix}1&0\\0&32\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=16\begin{bmatrix}33&-31\\-31&33\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注： 本题的关键在于利用矩阵乘法的结合律，即

$(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1}$.

例 3　已知矩阵 $A=[1, 2, 3]$，$B=[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$，$C=A^{\mathrm{T}}B$，求 C^n.

分析： 由已知 A、B 均为行矩阵，$BA^{\mathrm{T}}=3$.

解　
$$\begin{aligned}C^n&=\overbrace{(A^{\mathrm{T}}B)(A^{\mathrm{T}}B)\cdots(A^{\mathrm{T}}B)}^{n个}=A^{\mathrm{T}}\overbrace{(BA^{\mathrm{T}})(BA^{\mathrm{T}})\cdots(BA^{\mathrm{T}})}^{n-1个}B\\&=A^{\mathrm{T}}(BA^{\mathrm{T}})^{n-1}B=3^{n-1}A^{\mathrm{T}}B=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例 4　求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解 方法 1：用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\neq0;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1,\ A_{22}=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=3,\ A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}=-1.$$

故
$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

方法 2：用初等行变换 $[A\ \vdots\ E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E\ \vdots\ A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right],$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

例 5　设 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

分析：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是具体给出的矩阵，不能通过上题求法算出．考虑用定义求其逆矩阵.

解　因为　$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$

所以　$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$

即：$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\dfrac{(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})}{2}=\boldsymbol{E}$

由定义知$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$

例 6　设列矩阵 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$．证明

(1)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$；

(2)当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

证　(1)$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})$

而$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-2)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$．因此，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=1$$

(2)假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$

得　$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

即　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

又因为　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$

所以　$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T=0$

从而　$\boldsymbol{X}=0$

这与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 7　已知两个线性变换$\begin{cases}x_1=2y_1+y_3\\x_2=-2y_1+3y_2+2y_3,\\x_3=4y_1+y_2+5y_3\end{cases}$　$\begin{cases}y_1=-3z_1+z_2\\y_2=2z_1+z_3\\y_3=-z_2+3z_3\end{cases}$，求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换.

解　由已知

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$