全国高校教材学术著作出版审定委员会审定

理论力学

LILUN LIXUE

王瑞平 主编

$$F = -G\frac{mM}{r^2}$$

国防工业出版社
National Defense Industry Press

全国高校教材学术著作出版审定委员会审定

理论力学

王瑞平　主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

作者立足于教学，采用运动学，牛顿力学，拉格朗日力学以及哈密顿力学的以时序发展为主的编写方式。同时结合近代物理的发展以及应用，对目前流行的物理课程作了一些改进。从近代物理的观点，阐述了经典物理中一些结论，如牛顿时空观，坐标系，和对称性等；另一方面在论述中突出各物理量概念引入，量纲单位，以及与相关量之间的联系；解题中注重从问题出发，要求过程的规范性，简洁性以及对计算结果进行物理意义分析等。它是近代物理学习的入门基础，也是理论物理的必修课程之一。

本书是在笔者多年讲述该课程讲义基础上编写的基础物理教材，可做为综合大学物理专业和相关数学专业学生的教课书，以及对物理学科感兴趣的学者使用。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学 / 王瑞平 主编. —北京：国防工业出版社，2013.2

ISBN 978-7-118-08248-7

Ⅰ.①理… Ⅱ.①王… Ⅲ.①理论力学 Ⅳ.①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 004035 号

※

国防工业出版社 出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 13½ **字数** 304 千字

2013 年 2 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 36.00 元

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

前　　言

本教材是做为物理专业学生以及数学相关专业学生学习物理课程的教课书。物质世界最根本的三个概念是指物质、运动和相互作用。物理学科是自然界所有其他科学的基础，而人类最早进行的科学领域探究就是物理中对力学的研究。所谓力学是研究（宏观）物体机械运动所遵循的普遍基本规律的学科。这里机械运动指物体在空间相对位置随时间而改变的现象，是物质运动最基本也是最广泛的运动形态。

自然界所有的物质是运动的。对周围客体即物质进行研究，必须把它置于运动当中，置于它与其他物体之间的相互作用当中。对物理和化学运动，最显著的特征是它们受因果律的支配，即在一定边界条件中和初始条件下，物质的前一个运动状态唯一地决定后一个状态。

在17世纪，产生了一位杰出的物理学家牛顿（[英]1642年—1727年)。他集先人之大成和通过自己的研究与思考，开始了物理定量化，公理化的科学启程。到了18世纪和19世纪，经过拉格朗日（[法]1736年—1813年）以及哈密顿（[英]1805年—1865年］等数学家的归纳，使得力学研究求解公式化，结构化达到了一个颠峰水平。由于当时牛顿物理近乎能够对所有的自然现象给予合理解释与结果并且在理论上具有自洽的逻辑关系，被以后的科学家所赞誉和推崇，称为经典物理学。本教程即是对这个时期物理力学成就的学习论述。

19世纪末，由于电磁学的发展和人们对微观粒子如原子，原子核的研究，在20世纪前半叶产生了以爱因斯坦（[德/美]1878年—1955年）为代表的一大批杰出物理学家，诞生了近代物理学。这将会在以后的理论物理学习中论述。

经典物理做为对低速宏观物体（不特指，也用粒子或质点指宏观物体）的研究是合理的，近代物理也可以看做是它以电磁理论为标准的延拓或扩展。它也是人们日常生活中最常见和直观的事实。同时要看到，在经典物理中，仍有许多问题和算法需要人们去突破，如三体以上的非线形问题。其实用性还是具有很强的生命力。另外需指出的是，通常近代科学力学是广义的，指对能引起事物运动状态改变的各种原因的研究；这里是狭义，指非相对论力学部分或者说力学相对论。

通过对本课程的学习，编者力求让读者把握力学发展的脉络。书中对力学中的各物理量的概念，对应量纲以及采用SI单位制都作了较详尽的介绍，力求根据近代物理观点对经典力学做以分析。更主要的是笔者认为，学习物理的目的在于能够从实际中提炼出物理问题，对物理问题进行数学归纳，然后经过求解，结果可以通过实际的检验。这才是学习物理的要旨。

考虑到学生的知识接受能力，本书按时间顺序编写。物体的机械运动描述；牛顿力学，包括质点与质点组力学；刚体力学，主要论述刚体的转动；分析力学，即拉格朗日力学和哈密顿力学。在各章后附有习题和答案，供学生参考。理论与应用并重，题目排列并没有严格按书中内容，学生可依据能力选择。这些习题当中，大部分选自周衍柏先生所编相应课程以及物理习题参考书，在此说明。学习本课程，学生只须具备高等数学的基础知识即可。整个课程为 54 学时编写。

由于编者个人水平所局限，书中难免会存在缺点和错误，敬请广大读者批评提正。

王瑞平

于兰州大学

2012 年 10 月

目　　录

第 1 章　质点运动学

首先介绍物体机械运动的几何描述和常见的坐标系形式。

1.1　物体的（机械）运动描述：位矢、速度和加速度

一、基本概念

对具体运动而言，运动具有相对性。运动的相对性包含着两层含义：

（1）任何“运动”是相对于“静止”而言。它们是相互依存的统一体，在数学上称为共轭关系。

（2）“运动”和“静止”本身是相对的，是由观察角度不同所确定。A 视 B 在运动，反过来，B 也可视 A 在运动。再如行驶的火车，对于站台讲，它是运动的；对于火车上的旅客而言，它却是静止的。

运动所具有的相对性属性，称为运动的相对性原理或运动的相向性。

1. 参考系—坐标系和时钟

由于物体运动的相对性，研究物体运动，总是依据观察者参照某一个“静止”的物体去描述。把作为参照的“静止”物体称为参照物。同时描述物体运动还需用时间去记录过程。参考系统应理解为在参照物上建立的坐标系统 K，和固定在坐标系里的时钟 T。

坐标系 K（简称框架）是指确定了单位与方向的参照系，用来定量描述物体在空间的位置。坐标系原点 O 指参照点或观察点。空间坐标为三维实空间 R^3，是物体运动的定域量度。它具有各向同性和均匀性的特性。一维量度为尺度，量纲表示为 L。SI 单位制中单位为米（m）。

时钟 T 用以记录物体运动过程的时间量度，定量描述物体运动状态发生改变过程。时间特性为具有均匀性。时间量纲表示为 T。SI 单位制中单位为秒（s）。

力学中的 SI 单位制中，尺度和时间都是基本量纲。另一个基本单位是物体的质量，用 M 表示。此外包括两个辅助单位，平面角度单位为弧度（rad）；立体角单位为球面度（sr）。

1967 年第 13 届国际计量大会规定：

（1）1s 定义：^{133}Cs 原子基态两个超精细能级间跃迁对应辐射的 9192631770 个周期；

（2）1m 定义：^{86}K 原子 $2p_{10}-5d_5$ 跃迁的 1650763.73 个波长。或者指光在真空中于 1/299792458 s 所走过的距离。其中光速 c 是自然界最重要的普适常数之一，在真空中

$$c = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

时空问题是物理学最重要的问题之一，它是描述物质运动的“背景”。同时坐标系选择合适，可以使求解问题和答案简洁。16 世纪哥白尼（［波］1473 年—1543 年）的“日心说”和古典派托勒密“地心说”的争辩，归根到底也是坐标系选择的不同。

2. 质点（宏观粒子）

当研究客体，即运动物体的形状、大小与所研究的问题无关，或者说它自身尺度远小于其运动空间尺度情况下，物体抽象为一个“点”，它的物理属性（主要指力学属性）如质量视为集中在这个点上。这个运动物体称为质点，有时也称为（宏观）粒子。比如：

（1）在太阳系中，地球绕太阳转动。地球半径 $R_{\oplus}=6.4\times10^3$ km；而地球和太阳的平均距离为 1 个天文单位（AU），即 1.5×10^8 km 或者说 500s 光年。

（2）在原子体系中，电子绕原子核的运动。原子尺度为埃（$1\text{Å}=10^{-10}$ m）的量级；电子尺度小于 10^{-3} 费米（1 fm $=10^{-15}$ m）。可视电子的运动为一个“点”的运动。

严格讲在原子体系中，原子和电子已不是宏观粒子。但在卢瑟福散射问题中，对 α 粒子在费米量级，相对于原子在埃的量级，入射 α 粒子做为“点”处理，仍得到非常精确的结果。

宏观粒子即质点是由大量的原子组成的物体，具有如下特性：

（1）可识别性：每个质点可以标记；这有别于微观粒子的全同性。

（2）排他性：两个粒子不能同时占据一个位置；称为豪斯道夫性质。

（3）运动连续性：运动轨迹不会有突变。在数学上，可以用“流形”去描述。

3. 位矢 $\boldsymbol{r}$

在规定了坐标系 K 中，通常是直角坐标系中（笛卡儿坐标），质点 P 相对于原点 O 的空间位置可以用 3 维数组 (x,y,z) 坐标表示。计算时采用位矢 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 最为简便。位矢 $\boldsymbol{r}$ 是一个向量，如图 1.1.1 所示。向量的量值指它的大小，也称为模。位矢的量值 $r=|\boldsymbol{r}|$ 也称为矢径，表示质点 P 到观察点 O 的距离。r 为长度量纲［r］$=L$，SI 单位为米（m）。

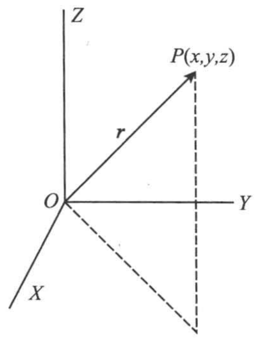


图 1.1.1　笛卡儿坐标系

在直角坐标系中，位矢表示为

$$\boldsymbol{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \tag{1.1.1}$$

还经常采用平面极坐标系。在极坐标系中，如图 1.1.2 所示，描述平面上一点为

$$\boldsymbol{r}=\rho\hat{e}_\rho \tag{1.1.2}$$

其中

$$\begin{cases}\rho=\rho(\phi)\\ \phi=\phi(t)\end{cases} \tag{1.1.3}$$

式中：ρ 为质点 P 的矢径；ϕ 为极角。其主值变化范围为

$$0\leqslant\rho<\infty;\quad 0\leqslant\phi<2\pi \tag{1.1.4}$$

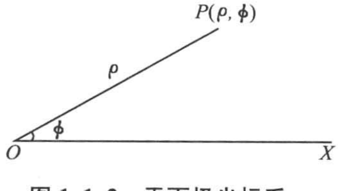


图 1.1.2　平面极坐标系

极坐标与平面直角坐标的关系（坐标变换式）为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\varphi=y/x\end{cases} \tag{1.1.5}$$

数学中，常见的坐标系及相应的单位基矢有：① 直角坐标系 $P(x,y,z)$：$\hat{i}$，$\hat{j}$，$\hat{k}$；

② 柱坐标系 $P(\rho,\phi,z)$：$\hat{e}_\rho$，$\hat{e}_\phi$，$\hat{e}_z$；③球面坐标系 $P(r,\theta,\phi)$：$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\phi$；④自然坐标系 $P(\xi,\eta,\zeta)$：$\hat{\tau}$；$\hat{n}$；$\hat{b}$。规定坐标系单位基矢满足正交归一条件和右手螺旋法则（正方向），即满足关系

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij};\ \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1.1.6}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases};\ \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{偶交换}) \\ -1 & (\text{奇交换}) \\ 0 & (\text{相等时}) \end{cases}$$

式中：δ 为 Kronecker 符号；ε 为 Levi－civita 符号。

二、运动（学）方程和轨道——对质点运动的描述

在确定好坐标系 K 后，可以对质点 P 运动做定量描述。

1. 运动学方程

质点 P 在空间位置随时间的变化用位矢 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1.7}$$

其分量为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.1.8}$$

式（1.1.7）和式（1.1.8）即为运动学方程。它反映了质点空间位置随时间的改变。运动学方程即为动力学微分方程的解。

由质点运动连续性可知，空间位置是关于时间 t 的单值连续函数；由动力学可知，通常要求它们是二阶可微的：x，y，$z \in C^2$ $[t : t \in T]$。

2. 运动轨道 l 和路径 s

通常粒子在空间某已知曲线

$$l: \begin{cases} F_1(x,y,x) = 0 \\ F_2(x,y,x) = 0 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

上运动，这条曲线称为轨道。轨道 l 可以通过在式（1.1.8）中，把时间参数 t 消去得到。

二维空间平面运动中轨道表示，对直角坐标

$$l: y = y(x) \tag{1.1.10}$$

对极坐标

$$l: \rho = \rho(\phi) \tag{1.1.11}$$

与运动方程的单值连续相对应，轨道 l 也是单值连续的，一般要求满足 C^2 类曲线。

质点在轨道上的轨迹称为路径，通常用 s 表示，即 $s = s(t)$，它沿着轨道 l 运动，可以做为质点运动的自然（内禀）参数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \tag{1.1.12}$$

质点运动可以按轨道划分为直线运动（斜率＝0）和曲线运动（斜率≠0）。另外对通常的轨道和路径并不做严格区分。

三、位移、速度和加速度

1. 位移 $\Delta \boldsymbol{r}$

如图 1.1.3 所示，假定质点沿轨道 l 运动，t 时刻在 P_A点，位矢为 $\boldsymbol{r}_A$；$t+\Delta t$ 时刻，运动到 P_B，位矢为 $\boldsymbol{r}_B$。则称在时间间隔 Δt 内，质点的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \overrightarrow{P_A P_B} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A \qquad (1.1.13)$$

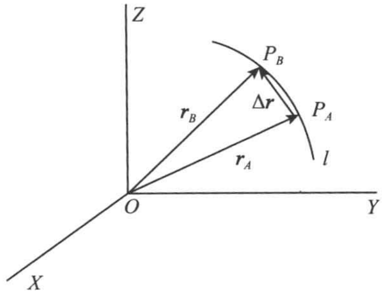


图 1.1.3　质点位移示意图

位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 表征了质点经过 Δt 时间，下一时刻的运动方向和地点。其微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 指向粒子的运动方向，且是路径 s 曲线的切线方向。

位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与质点 P 在时间间隔 Δt 内行走的路径 Δs 是有区别的。前者是向量，后者是标量；前者是直线段，后者可以是曲线。如对封闭曲线，质点运动一周，则 $\Delta \boldsymbol{r}=0$；但 $\Delta s \neq 0$。但在微分条件下，有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$。

2. 速度 $\boldsymbol{v}$

速度是用来反映质点运动快慢的运动量，它指在单位时间内质点发生的位移（时间变化率）。可以把速度分为平均速度和瞬时速度。

（1）平均速度 $\boldsymbol{v}_m$：定义质点在时间间隔 Δt 内的平均速度为

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad (1.1.14)$$

即质点的位移与其所需时间之比。

（2）瞬时速度（速度）$\boldsymbol{v}$：对平均速度取极限，定义质点的瞬时速度为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1.1.15)$$

对时间的导数采用牛顿符号。速度即位矢单位时间的变化率，它是一个向量，方向为粒子的运动方向，它也是平滑轨迹的切线方向。速度的量值 v 也称为速率，其量纲 $[v]=\mathrm{LT}^{-1}$，SI 单位制为 m/s；其他导出单位有 km/h；cm/s 等。瞬时速度的量值是速率 $v=|\boldsymbol{v}|=\dot{s}$。

质点运动按速度划分为匀速直线运动和曲线变速运动。显然理论研究更关注后者。

3. 加速度 $\boldsymbol{a}$

加速度是反映速度变化快慢的运动量。定义加速度 $\boldsymbol{a}$ 为速度对时间变化率

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \qquad (1.1.16)$$

式中：$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$，为 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内速度的变化。加速度量纲为 $[a]=\mathrm{LT}^{-2}$。SI 单位 m/s^2。如地表附近重力加速度 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$。此外还有其他实用单位。

质点运动可以按加速度分类：匀加速直线运动和变加速运动，直线加速运动或曲线加速运动。理论力学主要研究运动物体的加速度——速度的改变情况。

显而易见，在对物体运动描述时，速度 $\boldsymbol{v}$ 是最为重要的。这不仅是由于它直接反映了物体运动的快慢的可观测量，而且当它已知时，可以判断物体在下一时刻的位置。通常速度为位置和时间的函数

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) \qquad (1.1.17)$$

上述关系称为粒子的运动状态。而加速度视为粒子运动状态发生了变化。

位矢、速度和加速度之间为微积分关系，只要知道其中一个以及初始条件，就可知道其余 2 个。以下将讨论在不同坐标系中速度与加速度求法。

1.2　直角坐标系中速度、加速度的求法

在运动学中，一般在 R^3 空间或线度坐标系中，已知运动轨迹，即已知位矢，求得质点的速度与加速度。这里首先介绍在直角坐标系中，质点的速度和加速度求解。

在直角坐标系中已知位矢为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \tag{1.2.1}$$

单位基矢固定，它们与质点运动无关。

1. 速度 $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \tag{1.2.2}$$

速率（指速度的量值）为

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \tag{1.2.3}$$

2. 加速度 $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \tag{1.2.4}$$

其量值为

$$a = |\boldsymbol{a}| = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^{1/2} = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} \tag{1.2.5}$$

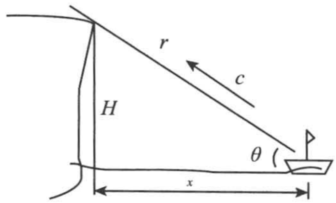
解题中，求解速度和加速度通常指求它们的量值。

例题 1.1　在岸边高度 H 处以匀速 c 拉绳索拖船，示意图为例题 1.1 所示。问：

(1) 船速 v 快还是绳速快?

(2) 船做匀速运动吗?

(3) 定量计算 v。



例题 1.1 示意图

解：(1) 船速快，因为在相同时间船行进距离大（大角对大边）。设在 Δt 间隔内，船行进 Δx，对应绳长 Δr。则 $\Delta x > \Delta r$。

$$\Delta x / \Delta t > \Delta r / \Delta t \tag{1}$$

取极限：$v > c$。(也可从极限考虑：无穷远两者相同，近处绳距大于船距。即船速要大)

(2) 做变速运动，因为 $v = v\ (\theta,\ c)$ 崖上俯角 θ 随时间改变，而绳速为一常量。

(3) 由于 $x^2 + h^2 = r^2$，两边对时间微分，得船速

$$v = \dot{x} = (r/x)c = c/\cos\theta \quad (\dot{r} = c) \tag{2}$$

例题 1.2　椭圆规尺问题。如例题 1.2 图所示，长度为 L 的直尺 AB 的端点 A、B 沿直线轨道导槽 OY 和 OX 滑动。已知 A 点以匀速 c 在 Y 轴上运动。求直尺上一点 M

的轨道方程、速度，以及加速度。M 点距 A、B 点距离分别为 a 和 b：$a+b=L$。

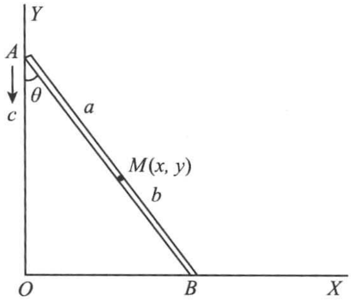
解：如例题图 1.2 选择参数 θ，M 点坐标为

$$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ y = b\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

轨道方程：由上式消去 θ，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

这是椭圆方程，a 和 b 对应的是长短半轴（共轭半径）。



例题 1.2 图

对式（1）求导，得速度分量为

$$\dot{x} = a\dot{\theta}\cos\theta; \quad y = -b\dot{\theta}\sin\theta \tag{3}$$

式中：$\dot{\theta}$ 是参数 θ 的时间变化率。M 点速率为

$$v_M = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \dot{\theta}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \tag{4}$$

又由 A 点坐标 $x_A=0$；$y_A=L\cos\theta$。依题意，A 点速度已知 $\dot{y}_A=-L\dot{\theta}\sin\theta=-c$。所以

$$\dot{\theta}=\frac{c}{L\sin\theta} \tag{5}$$

上式代入式（4），得

$$\begin{aligned} v_M &= c\,\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}{L\sin\theta} = c\sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2+\left(\frac{b}{L}\right)^2\cot^2\theta} \\ &= c\sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2+\left(\frac{b}{L}\right)^2\left(\frac{y_A}{x_B}\right)^2} = c\sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2+\left(\frac{b}{L}\right)^2\frac{L^2-{x_B}^2}{{x_B}^2}} \\ &= c\sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2+\left(\frac{b}{x_B}\right)^2-\left(\frac{b}{L}\right)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

式中：x_B 为规尺端点 B 点坐标。

类似求加速度。式（3）对时间求导得

$$\begin{cases} \ddot{x} = a\ddot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} = -b\ddot{\theta}\sin\theta-b\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases} \tag{7}$$

又由式（5）得

$$\ddot{\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}^2=-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{c}{L}\right)^2 \tag{8}$$

将式（5）和式（8）代入式（7），得

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{ac^2}{L^2}\dfrac{1}{\sin^3\theta} \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

加速度量值为

$$a_M = |\ddot{x}| = \frac{ac^2}{L^2}\frac{1}{\sin^3\theta} = \frac{aL}{{x_B}^3}c^2 = \frac{abL}{{x_B}^3}\left(\frac{c^2}{b}\right) \tag{10}$$

1.3　极坐标系中速度、加速度的求法

对质点平面运动，还经常采用极坐标系。质点在极坐标中按惯例用（ρ，ϕ）表示位置，其中 ρ 为位径，ϕ 为极角。在极坐标系中，质点速度、加速度的求法如下。

设质点 P 沿平面轨迹曲线 l 运动，其速度沿切线方向。基矢：矢径 ρ 增加的方向 $\hat{e}_\rho$；极角 ϕ 增加的方向 $\hat{e}_\phi(\hat{e}_\phi \perp \hat{e}_\rho)$。

位矢表示为

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{e}_\rho \qquad (\rho = \rho(\phi),\ \phi = \phi(t)) \tag{1.3.1}$$

数学引理：单位向量 $\boldsymbol{A}$ 的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 垂直于单位矢量，且 $|\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}\theta| = 1$。其中 θ 为圆心角。

证明：由 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = 1$，两边微分

$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \mathrm{d}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = 0;\Rightarrow 2\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0;$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0;\Rightarrow \boldsymbol{A}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\mathrm{d}\boldsymbol{A}\neq 0)$

如图 1.3.1 所示。对单位圆，$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 为等腰三角形底边。有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}\theta| = 1$。

单位矢量的微分其平动微分为 0，可以视为单位圆的转动（方向为 $\boldsymbol{A}$ 的正方向（逆时针））。

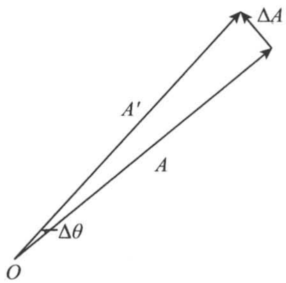


图 1.3.1　单位向量的差分

1. 速度 $\boldsymbol{v}$

对速度矢量进行分解

$$\boldsymbol{v} = v_\rho\hat{e}_\rho + v_\phi\hat{e}_\phi \tag{1.3.2}$$

式中：v_ρ和 v_ϕ分别称为径向速度和横向速度；有时也记为 $v_{/\!/}$和 $v_\perp$；或者 v_R和 v_T。以下分别求解。

对式（1.3.1）求导

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}(\rho\hat{e}_\rho)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\hat{e}}_\rho \tag{1.3.3}$$

上式中右端第一项 $\dot{\rho}\hat{e}_\rho$：这是位矢沿径向的变化，反映的是径向速度；第二项 $\rho\dot{\hat{e}}_\rho$：径矢方向的改变，期待是速度的横向速度。以极角 ϕ 为中间参数（小角度，极角 ϕ 与圆心角 θ 同量级）

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \frac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi}\cdot\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

由数学引理，单位矢量的微分与其垂直 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi}\perp\hat{e}_\rho = 0$；利用了极角 $\mathrm{d}\phi$ 与圆心角 $\mathrm{d}\theta$ 为平行线同位角，即

$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}\theta}\right| = 1;\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi} = \hat{e}_\phi$$

得到

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\phi}\hat{e}_\phi \tag{1.3.4}$$

上式利用单位圆弧长微分与角微分同量级性质。它的方向正是横向方向。同理可证

$\frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} = -\hat{e}_\rho$。负号表示方向指向极点，即有

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{e}_\rho \tag{1.3.5}$$

式（1.3.4）代入式（1.3.3）得

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \tag{1.3.6}$$

式（1.3.6）和式（1.3.2）比较，在极坐标中，径向速度和横向速度分别表示为

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\phi = \rho\dot{\phi} \end{cases} \tag{1.3.7}$$

速率为

$$v = (v_\rho^2 + v_\phi^2)^{1/2} \tag{1.3.8}$$

这里极角随时间变化率 $\dot{\phi}$，称为角速度，常记为 ω，单位 rad/s。引入角速度矢量 $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{e}_z(\hat{k})$，有对称关系式

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}_\rho\,; \quad \dot{\hat{e}}_\phi = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}_\phi \tag{1.3.9}$$

2. 加速度 $\boldsymbol{a}$

把加速度分解为径向和横向两部分

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = a_\rho\hat{e}_\rho + a_\phi\hat{e}_\phi \tag{1.3.10}$$

式中：a_ρ、a_ϕ分别称为径向和横向加速度。或分别记为 $a_{/\!/}$ 和 $a_\perp$；或者 a_R和 a_T。可以证明

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\ a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) \end{cases} \tag{1.3.11}$$

加速度量值为

$$a = (a_\rho^2 + a_\phi^2)^{1/2} \tag{1.3.12}$$

由于径向和横向的速度分量大小和方向同时发生改变，一般分为两项：$\ddot{\rho}$ 为相对径向加速度，$(-\rho\omega^2)$ 为向心加速度。$\rho\ddot{\phi}$ 为相对切向加速度，$2\dot{\rho}\omega$ 为科氏加速度。

这里 $\ddot{\phi}$ 称角加速度，单位为 rad/s^2。对科氏加速度一方面是由于径向速度方向的改变，另一方面是横向速度的矢径变化产生。

这样表述：极坐标中，径向加速度为相对径向加速度与向心加速度之和；横向加速度为相对切向加速度与科氏加速度之和。

例题 1.3 证明加速度表达式（1.3.11）。

解：由速度表示式

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{e}_\rho) + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi) \tag{2}$$

上式右边第一项

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\rho}\hat{e}_\rho) = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi \tag{3}$$

第二项

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi) = \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\phi}{\mathrm{d}t} = (\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho \tag{4}$$

式 (3)、式 (4) 代入式 (2)，整理即有

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\ a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\phi}) \end{cases} \tag{5}$$

例题 1.4　质点涡旋运动。已知 $\rho = a\mathrm{e}^{b\phi}, \phi = ct$，求质点的速度 v 和加速度和 a。

解：由

$$\rho = a\mathrm{e}^{b\phi};\quad \phi = ct \tag{1}$$

所以速度分量为

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} = \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} = abc\,\mathrm{e}^{b\phi} = bc\rho \\ v_\phi = \rho\dot{\phi} = c\rho \end{cases} \tag{2}$$

即速率为

$$v = (v_\rho^2 + v_\phi^2)^{1/2} = (b^2+1)^{1/2}c\rho \tag{3}$$

加速度由

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = bc\dot{\rho} - c^2\rho = (b^2-1)c^2\rho \\ a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = 2bc^2\rho \end{cases} \tag{4}$$

所以加速度量值为

$$a = (a_\rho^2 + a_\phi^2)^{1/2} = (b^2+1)c^2\rho \tag{5}$$

质点涡旋运动时，其速度与加速度都正比于位径 ρ。

1.4　自然坐标系以及其中速度、加速度的求解

自然坐标系又称伴随坐标系。自然坐标系通常质点运动轨道 l 已知，在对求质点约束问题时是常用的坐标系。

一、自然坐标系

如图 1.4.1 所示，质点空间运动，形成光滑轨迹曲线 l。位矢以路径为自然参数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)\quad (s = s(t)) \tag{1.4.1}$$

沿切线方向

$$\hat{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{1.4.2}$$

显然其为单位切向向量。

主法线方向：定义曲率向量

$$\boldsymbol{N}=\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{\rho}\hat{n} \tag{1.4.3}$$

其中

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta};\quad \hat{n}=\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\theta} \tag{1.4.4}$$

这里 $|\boldsymbol{N}|=1/\rho$ 称为曲率，表征曲线的弯曲程度；其倒数 ρ 称曲线曲率半径（其对应端点 C 为曲率中心）；$\hat{n}$ 为垂直于 $\hat{\tau}$ 的单位矢量，方向指向曲线凹侧。即法向单位向量为

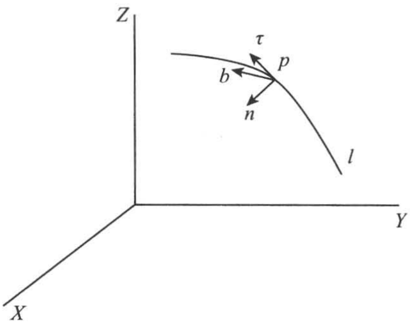


图 1.4.1　质点运动的自然坐标

$$\hat{n}=\rho\boldsymbol{N} \tag{1.4.5}$$

副法线方向：根据右手法则，定义单位向量为

$$\hat{b}=\hat{\tau}\times\hat{n} \tag{1.4.6}$$

式中：$\hat{b}$ 为副法向单位向量。

这 3 个单位向量 $(\hat{\tau},\hat{n},\hat{b})$ 构成随曲线变动的坐标系的基向量，这个坐标称为自然或伴随坐标系。$\hat{\tau},\hat{n}$ 所在平面称密切面；$\hat{n},\hat{b}$ 平面称法平面；$\hat{b},\hat{\tau}$ 平面称从切面。对平面曲线，$\hat{b}$ 为常矢量（即 $\hat{k}$），为曲线所在平面的法线。

需要说明的是，在微分几何中，对空间曲线一般地还引入绕率矢量：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\kappa}\hat{n} \tag{1.4.7}$$

式中：$1/\kappa$ 为曲线绕率，其倒数 κ 为绕率半径。曲率表征曲线扭曲程度，总为“+”；绕率表征扭曲程度，可“+/−”。

二、速度、加速度求法

1. 速度 $\boldsymbol{v}$

式（1.4.1）对时间求导

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=v\hat{\tau} \tag{1.4.8}$$

注意，这里只存在切向速度。

2. 加速度 $\boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}s}\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

在副法线方向不存在加速度分量。切向加速度和法线加速度分别为