国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书——61

统计微分回归方程
——微分方程的回归方程观点与解法

陈乃辉 著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

"十二五"国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书 61

统计微分回归方程

——微分方程的回归方程观点与解法

陈乃辉 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

统计微分回归方程，是统计回归分析与微分方程结合而成的，借此进而获得解决微分方程问题的新途径.

本书分为三部分.第一部分回归方程，为本书的理论基础，共3章；第二部分微分回归方程，为本书的主体，共10章，分别研讨了10类微分回归方程；第三部分微分方程，为本书的重点，共9章，用回归解法，分别研究了9类微分方程，研究内容包括：① 微分方程转化为变分方程形式；② 解的存在性；③ 方程的概率解；④ 解的最佳逼近性及唯一性；⑤ 解的稳定性；⑥ 方程的统计解；⑦ 模拟实验.

本书可作为相关领域中科研人员与大专院校研究生研究的参考书，也可作为大专院校研究生、高年级本科生的教科书.

图书在版编目(CIP)数据

统计微分回归方程：微分方程的回归方程观点与解法/陈乃辉著. —北京：科学出版社，2013.9

(信息与计算科学丛书；61)

ISBN 978-7-03-038672-4

Ⅰ. ①统… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①微分方程-研究 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2013) 第225233号

责任编辑：王丽平／责任校对：鲁 素

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年9月第 一 版 开本：B5 (720×1000)

2013年9月第一次印刷 印张：17 1/2

字数：360 000

定价：88.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编，科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于2004年9月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿，介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　　言

(一)

统计微分回归方程, 乃统计回归分析 (方程) 与微分方程的结合, 缘此进而获得解决微分方程问题的新途径.

统计回归分析 (方程) 理论的滥觞, 可溯源至 19 世纪初 Legendre、Gauss 在大地测量与天文测量中提出的所谓线性回归模型问题, 二百年来, 其一直处于数理统计学科的中心地位, 之所以如是, 在于统计回归方程所蕴涵的最佳逼近之性理. 抽象而言, 回归方程可表述为

$$\|f-u\|=\min_{h\in\mathcal{M}}\|f-h\| \quad (u\in\mathcal{M})$$

所谓解回归方程, 即是求已知泛函 f 于泛函子空间 $\mathcal{M}$ 中的最佳逼近元 (正交投影)u.

微分方程学科乃数学中的大家族, 其方程中不但含有欲求之函数项, 亦含有此函数的导函数项, 如此使其非常适合数理刻画物象世界的运动变化之规律. 微分方程可表述为

$$Tu=f \quad (\text{a.s.})(u\in\mathcal{M})$$

所谓解微分方程, 即是求已知函数 f 关于微分算子 T 在函数子空间 $\mathcal{M}$ 中的原象 u.

(统计) 微分回归方程, 作为 (统计) 回归方程与微分方程的结合, 一方面扩充了回归方程的疆域, 或言建立了一种新的方程类型, 另一方面为微分方程提供了一种新的观察视角与新的求解路径. 微分回归方程可表述为

$$\|f-Tu\|=\min_{h\in\mathcal{M}}\|f-Th\| \quad (u\in\mathcal{M})$$

所谓解微分回归方程, 即是求已知函数 f 在微分算子象空间 $T\mathcal{M}$ 中的最佳逼近元 (正交投影) 关于微分算子 T 于函数子空间 $\mathcal{M}$ 中的原象 u. 特殊地, 当 $f\in T\mathcal{M}$ 时, 微分回归方程旋退化为微分方程

$$\|f-Tu\|=0 \quad (u\in\mathcal{M})$$

即

$$Tu = f \quad (\text{a.s.})(u \in \mathcal{M})$$

就是于此处, 微分方程与微分回归方程连通.

对微分回归方程, 当其微分算子原象空间 $\mathcal{M}$ 为有限维空间时, 可采用待定系数法, 将其转化为 (拟线性) 回归方程求解.

对微分方程, 其微分算子原象空间 $\mathcal{M}$ 一般为可数无限维空间, 可将其转化为具有有限维微分算子原象空间的微分回归方程序列

$$\|f - Tu_s\| = \min_{h \in \mathcal{M}_s} \|f - Th\| \quad (u_s \in \mathcal{M}_s)(s \in \mathbb{N})$$

(其中 $\mathcal{M}_s$ 是 s 维空间且 $T\mathcal{M}_s \uparrow T\mathcal{M}$) 而获得微分方程的强解

$$u = \lim_{s \to \infty} u_s \quad (\text{a.s.})$$

(二)

本书分为三部分.

第一部分回归方程, 共 3 章, 是本书的基础. 回归方程已然形成较为成熟的理论体系. 作为后面微分回归方程、微分方程理论的直接依托, 于第 3 章线性回归方程给出基本回归方程类型 —— 线性回归方程与拟线性回归方程的理论结果; 而第 2 章正交投影定理, 既是第 3 章的理论基础, 亦是后续两部分的相关理论根据; 第 1 章绪论表达了本书对微分方程的观点.

第二部分微分回归方程, 共 10 章, 是本书的主体, 此部分亦是为照顾第三部分微分方程中的 9 章而对应设置的. 在此 10 章中, 于原理和方法有代表性地分别研讨了一阶常系数线性常微分回归方程、初值二阶常系数线性常微分回归方程、边值二阶常系数线性常微分回归方程、 多项式系数一阶线性常微分回归方程、一阶常系数线性偏微分回归方程、初值双曲型偏微分回归方程、 初值抛物型偏微分回归方程、初边值抛物型偏微分回归方程、矩形边值椭圆型偏微分回归方程及初边值双曲型偏微分回归方程.

从定解条件观之, 有初值的, 有边值的, 亦有初边值的; 大致在初值情形, 其微分算子原象空间 $\mathcal{M}$ 之基 (函数) 选为幂函数系; 在边值情形, 其微分算子原象空间 $\mathcal{M}$ 之基选为正弦 (或余弦) 三角函数系, 如是其相应的微分算子矩阵会较为简单, 但其方程将不得不限制为只含偶次求导项; 在初边值情形, 其微分算子原象空间 $\mathcal{M}$ 之基多选为幂函数系与正弦 (或余弦) 三角函数系的结合, 只是于初边值双曲型偏

微分回归方程类型, 尝试使用基为幂函数系的微分算子原象空间, 如此将消解对方程的限制, 然其相应的微分算子矩阵会较为复杂, 使得演绎到第三部分对应的微分方程时, 其解之存在性的证明, 一时难以促得.

从系数观之, 多为常系数的, 然亦代表性地考察了一种变系数的 —— 多项式系数一阶线性常微分回归方程, 由于后者的相对复杂性, 其对应的微分方程之研究尚有待完善.

第三部分微分方程, 共 9 章, 是本书的重点. 在 9 章中, 对应于第二部分的 9 类微分回归方程 (除初边值双曲型偏微分回归方程), 用所谓回归解法, 分别研究了一阶常系数线性常微分方程、 初值二阶常系数线性常微分方程、边值二阶常系数线性常微分方程、多项式系数一阶线性常微分方程 (变系数一阶线性常微分方程)、一阶常系数线性偏微分方程、初值双曲型偏微分方程、初值抛物型偏微分方程、初边值抛物型偏微分方程、矩形边值椭圆型偏微分方程, 特别地在第 17 章多项式系数一阶线性常微分方程中, 也探讨了变系数线性微分方程的一般解决之道.

在每种微分方程的研究中, 皆必含有的 7 个项目为

(1) 微分方程转化为变分方程形式;

(2) 解的存在性;

(3) 方程的概率解;

(4) 解的最佳逼近性及唯一性;

(5) 解的稳定性;

(6) 方程的统计解;

(7) 模拟实验.

解的存在性 (即投影空间序列之极限的研究) 是难点, 其工具主要为矩阵分析; 微分方程转化为变分方程形式, 为研究微分方程提供了一个新视角; 模拟实验, 可谓是本书理论正确性的第二重保险, 亦是寻道的另一门路.

(三)

在对微分方程的看法上, 本书于其中函数的定义域空间上, 增设了概率测度结构, 此意义有三:

(1) 理论上, 提升了微分方程的内蕴与品质;

(2) 应用上, 使微分方程更适合于刻画实际物象, 因为实际自变量取值机会各处均等的情形 (这对应于 Lebesgue 测度), 只是理想化、简单化的特例;

(3) 计算上, 引出了与概率解相对的统计解的概念, 它将繁杂、困难的积分运算变为简明的矩阵代数运算, 从而大为简化了方程解的计算.

(四)

就微分方程回归解法的求解计算, 其操作技术上是易于程式化的, 一般步骤如下:

第 1 步: 具体确定对应类微分算子矩阵的当下值 D_s;

第 2 步: 获取自变量 (作为随机变量或随机向量) 的简单样本, 这可运用计算机软件中的伪随机数生成函数功能得到, 或从实际物象中观测得到;

第 3 步: 据样本确定基函数统计量 $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_s$ 与非齐次项统计量 $\widetilde{f}$;

第 4 步: 使用统一的矩阵代数公式

$$\left(\widehat{\beta}_{\boldsymbol{k}}\right)^{1\leqslant k\leqslant s}=\left(D_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_s D_s\right)^{-1}D_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{f}$$

计算微分方程解的基系数;

第 5 步: 将解的基系数与对应的基函数相配合, 卒得微分方程的 (统计) 解.

上述计算方法容易用计算机软件 (如 SAS) 编程, 而形成一个简单且具有较强普适性的算法 (如附录中展示的两例程序), 而最终在计算机上实现计算, 另外这里的微分算子矩阵 D_s 为带状稀疏矩阵, 此有利于提高计算效率.

(五)

基于微分方程回归解法的模式, 可以自然而然地衍生出微分方程的有限元解法.

通常微分方程有限元解法的理路大致如是: (1) 将微分方程转化为变分方程 (问题) 形式, (2) 对变分方程用里茨–伽辽金方法求解, (3) 特别地, 取里茨–伽辽金解法中的基函数为分片函数, 即达到微分方程有限元解法. 此路中第 (1) 步的完成方法, 目前主要还是基于 1940 年左右美国数学家弗里德里希斯 (K.Friedrichs) 的 “双线性泛函” 型变分方程之工作, 但其仅适合于对称正定微分算子方程, 具体可见者, 尚廖廖如施图姆–刘维尔型常微分方程、泊松椭圆型偏微分方程而已. 正是由于此, 在通常路数下微分方程的有限元解法, 其适行范围受到相当的限制.

有鉴于如上困局, 作者对变分方程及其解的定义略作推广, 并缘之于此, 已将书中第三部分所述的 9 类各式微分方程全部转化为变分方程形式, 而对应此变分方程的里茨–伽辽金解, 其实为相应的微分回归方程 (族) 的解, 事至于此, 若再将微分回归方程投影空间的幂函数型之基函数系, 换成分片函数型之基函数系, 即可获得此 9 类微分方程 (包括抛物型、双曲型偏微分方程) 的有限元解法. 当然, 此有限元解法的路数, 不仅仅适用于这 9 类微分方程, 而其适用范围有多大, 本书无暇顾及.

如是思想或许可作另著而演绎之.

(六)

在更广泛的意义下观之, 回归方程、微分回归方程、甚至微分方程, 皆为变分方程的特殊情形.

变分方程是现实 (物理) 世界行为准则 —— 最小作用原理的数理刻画形式.

(七)

本书的出版, 获得石钟慈院士主持的国家出版基金项目的资助, 在此表示感谢; 科学出版社的王丽平编辑, 对书稿作了认真仔细的编辑工作, 亦表示感谢.

鉴于作者德能莫逮, 且所作欠于岁月之砺炼, 书稿中尚需改进与琢磨者, 一定不少, 甚或错漏之处, 在所不免, 诚望专家、学者体察, 并予以批评指正, 以利修葺和完善, 庶几臻于有功. 周易曰: “参伍以变, 错综其数; 通其变, 遂成天地之文, 极其数, 遂定天下之象.”

陈乃辉

2013 年 2 月于北京清河

目　录

第三部分 微 分 方 程

第一部分　回 归 方 程

第 1 章　绪　　论

1.1　回归方程与微分回归方程

一、回归方程

回归方程是方程概念的推广.

下面的回归方程定义, 为就 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 之背景而作的.

定义 1.1.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)\triangleq\left\{f(\omega):f\text{为}(\Omega,\mathscr{F})\text{上的可测函数},\int_\Omega f^2(\omega)\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$, $f(\omega)\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$, $\mathcal{M}\subset L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为闭凸集, 称方程

$$\begin{cases}\|f(\omega)-y(\omega)\|=\min\limits_{h(\omega)\in\mathcal{M}}\|f(\omega)-h(\omega)\|\\ y(\omega)\in\mathcal{M}\end{cases}\tag{1.1.1}$$

为 $f(\omega)$ 关于 $\mathcal{M}$ 的回归方程, $\mathcal{M}$ 为投影空间, $y(\cdot)$ 为回归函数, $\sigma^2=\min\limits_{h(\omega)\in\mathcal{M}}\|f(\omega)-h(\omega)\|^2$ 为误差方模.

注 1.1.1　在 $f(\omega)\in\mathcal{M}$ 的情形下, 回归方程即变为方程

$$y(\omega)=f(\omega)\quad(\text{a.s.})(y(\omega)\in\mathcal{M})\tag{1.1.2}$$

注 1.1.2　回归方程可以视为一类最简单的变分方程

$$J[y(\omega)]=\min_{h(\omega)\in\mathcal{M}}J[h(\omega)]\quad(y(\omega)\in\mathcal{M})\tag{1.1.3}$$

其中 $J[h(\omega)]=\|f(\omega)-h(\omega)\|\ (h(\omega)\in\mathcal{M})$.

回归方程具有简洁的几何意义 (图 1.1), 其蕴意为空间 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中一点 $f(\omega)$(被投影元素) 到一子集 $\mathcal{M}$(投影空间) 的正交投影 $y(\omega)$, 换言之, 为空间 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中一子集 $\mathcal{M}$ 关于一点 $f(\omega)$ 的最佳逼近元 $y(\omega)$.

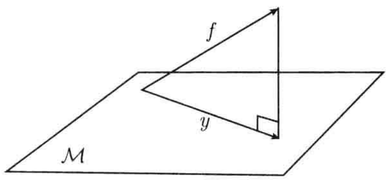

图 1.1