普通高等学校“十二五”规划教材

数学物理方法

罗跃生　冯国峰　陈涛　于涛　国萃　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等学校"十二五"规划教材

数学物理方法

罗跃生　冯国峰　陈涛　于涛　国萃　编著

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本书主要内容包括复变函数及其应用和数学物理方程两大部分。为了教材的完整性，复变函数部分的一般理论将做简单的介绍。该部分的重点将放在多值函数单值分枝的确定、留数理论及其应用、级数和含参数的积分所表示的函数及其性质、积分变换等内容上。数学物理方程部分将从基础讲起，重点放在分离变量法及其相关的常微分方程特征值问题和特殊函数、格林函数法、积分变换法等方面的内容。

本书可作为具备一定数学分析、常微分方程、线性代数、复变函数基础的本科高年级学生或工科研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/罗跃生等编著. —北京:国防工业出版社,2013.8

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-118-08923-3

Ⅰ.①数... Ⅱ.①罗... Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 189539 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14¼ 字数 340 千字

2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 **定价** 32.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

本书作者在数十年的“数学物理方法”教学过程中，感觉到本课程对于工科学生来说学习起来会遇到许多困难，而本课程所介绍的方法在工程技术上却有着重大的作用。为此我们希望将本书写出更便于工科学生掌握，并能运用该课程所讲述的方法解决实际问题的特色。

本课程中的多值函数及其单值分枝的确定、含多值函数的积分、复积分的应用、积分变换及其应用、格林函数等方面都是学生学习的难点，所以在这些方面本书增加了讲解的内容，并相应地给出较多的例子。为了便于学生理解，在问题的引入、讲解角度等都做了一定的改变。力图从工科学生已掌握的数学知识入手，由浅入深地将学生引导到正确的方向上。例如，本书由辐角函数单值分枝的确定入手，由浅入深地过渡到一般多值函数，最后又到多值函数的复合函数以及四则运算的单值分枝确定，详细地讨论了单值分枝确定的原则、不同多值函数单值分枝确定的技巧和方法，并将其应用到含多值函数的积分等问题中。在“格林函数”一章即第18章中，用微积分学的概念和语言来引入格林函数的定义，使学生容易掌握求解格林函数的每一个步骤及其原理。在积分变换及其应用部分，本书结合实际应用的例子向学生展示其使用价值。在多年的教学实践中，我们体会到，这样安排教学内容对于学生的学习是有利的。

本书的主要内容及编写分工如下：第1章 复数的基本概念、第2章 解析函数由国萃编写，第3章 多值函数及其单值分支、第7章 含参变量的积分、第15章 亥姆霍兹方程在不同坐标系下的表现形式、第18章 格林函数、第19章 求解微分方程定解问题积分变换法的普遍原理由罗跃生编写，第4章 复变函数的积分、第5章 复数项级数和复变函数项级数由陈涛编写，第8章 傅里叶变换、第9章 拉普拉斯变换、第11章 典型方程的推导及基本概念、第12章 行波法、第13章 分离变量法、第16章 勒让德多项式、第17章 贝塞尔函数由冯国峰编写，第10章 二阶线性常微分方程的级数解法由于涛编写，第6章 留数理论及其应用由陈涛、罗跃生联合编写，第14章常微分方程的本特征值问题由于涛、罗跃生联合编写。本书由罗跃生统稿。

本书的出版得到了国防工业出版社的鼎力支持，作者在此表示衷心的感谢。在成稿的过程中，研究生吴限、赵佳、程海源、付美鑫等参与了文字打印工作。感谢他们的付出。

本书可作为高等学校理工科专业的研究生、本科生教材，也可供相关的工程技术人员参考。由于作者水平有限，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2012年12月30日

目 录

第 1 章 复数的基本概念 …… 1
1.1 复数及其运算 …… 1
1.1.1 复数的定义 …… 1
1.1.2 实部和虚部 …… 1
1.1.3 相等 …… 1
1.1.4 复数的四则运算 …… 1
1.1.5 复数的共轭运算 …… 1
1.2 复数的几何表示 …… 2
1.2.1 复平面 …… 2
1.2.2 复球面 …… 4
1.2.3 无穷远点 …… 4
1.3 复数的幂与方根 …… 5
1.3.1 复数的乘积与商 …… 5
1.3.2 复数的幂 …… 5
1.3.3 复数的根 …… 6
1.4 复数序列的极限 …… 6
1.4.1 复数的序列 …… 6
1.4.2 聚点与极限 …… 6
1.4.3 复数序列极限存在的充分必要条件——柯西判别法 …… 7
1.4.4 极限趋于无穷 …… 8
第 2 章 解析函数 …… 9
2.1 复变函数 …… 9
2.1.1 区域 …… 9
2.1.2 复变函数的定义 …… 10
2.1.3 复变函数的极限 …… 11
2.1.4 复变函数的连续性 …… 12
2.2 复变函数的导数 …… 13
2.2.1 导数与微分 …… 13
2.2.2 可导的充分必要条件 …… 15
2.2.3 求导的运算法则 …… 16

2.3 解析函数的定义和判定条件 …… 16
2.3.1 解析函数的定义 …… 16
2.3.2 函数解析的充分必要条件 …… 16
2.3.3 解析函数的运算法则 …… 17
2.4 解析函数与调和函数的关系 …… 17
2.4.1 调和函数 …… 17
2.4.2 共轭调和函数 …… 18
2.5 单值初等函数 …… 19
2.5.1 幂函数 …… 19
2.5.2 指数函数 …… 19
2.5.3 三角函数和双曲函数 …… 20
第3章 多值函数及其单值分支 …… 22
3.1 对数函数 $w = \ln z$ …… 23
3.2 幂函数 $w = (z - a)^{\alpha}$ …… 27
3.3 反三角函数和反双曲函数 …… 30
3.4 多值函数的四则运算 …… 32
3.5 多值函数的复合函数 …… 35
第4章 复变函数的积分 …… 38
4.1 复变函数积分的概念 …… 38
4.1.1 复变函数积分的定义 …… 38
4.1.2 积分的计算 …… 39
4.1.3 复变函数积分的几个基本性质 …… 40
4.2 柯西积分定理 …… 40
4.3 不定积分 …… 41
4.4 柯西积分公式及其推论 …… 42
第5章 复数项级数和复变函数项级数 …… 45
5.1 复级数 …… 45
5.1.1 复数列 …… 45
5.1.2 复数项级数 …… 45
5.1.3 复变函数项级数 …… 46
5.2 幂级数 …… 49
5.2.1 幂级数的敛散性质 …… 49
5.2.2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛半径的求法 …… 50
5.2.3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 和的解析性 …… 50

5.3 解析函数的泰勒展开 …… 52
5.3.1 泰勒定理 …… 52
5.3.2 一些初等函数的泰勒展开式 …… 53
5.4 解析函数的洛朗展开 …… 55
5.4.1 洛朗级数 …… 55
5.4.2 环形区域上解析函数的洛朗展开 …… 55

第 6 章 留数理论及其应用 …… 57

6.1 孤立奇点 …… 57
6.1.1 奇点的分类 …… 57
6.1.2 零点与极点的关系 …… 58
6.1.3 解析函数在无穷远点的性质 …… 59
6.2 留数定理 …… 60
6.2.1 留数的概念 …… 60
6.2.2 留数的求法 …… 60
6.2.3 在无穷远点处的留数 …… 61
6.2.4 留数定理 …… 62
6.3 用留数定理计算实积分 …… 63
6.3.1 $\int_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ 型积分的计算 …… 63
6.3.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分的计算 …… 64
6.3.3 含三角函数的无穷型积分的计算 …… 66
6.4 积分路线上有奇点类型积分的计算 …… 67
6.5 多值函数的积分 …… 70
6.5.1 含多值函数的无穷限反常积分 …… 70
6.5.2 含有两个幂函数乘积的积分 …… 72
6.5.3 利用含有对数函数的被积函数求其他积分 …… 74
6.6 其他积分例子 …… 75

第 7 章 含参变量的积分 …… 77

7.1 解析函数的定义域延拓 …… 77
7.2 含参变量的积分 …… 78
7.3 Γ 函数 …… 80
7.4 B 函数 …… 85

第 8 章 傅里叶变换 …… 87

8.1 傅里叶积分公式 …… 87
8.1.1 傅里叶级数的三角形式 …… 87

8.1.2　傅里叶级数的复指数形式 …… 88
8.1.3　非周期函数的展开问题 …… 88
8.2　傅里叶变换 …… 89
8.3　单位脉冲函数——δ 函数 …… 89
8.3.1　δ 函数的定义 …… 90
8.3.2　广义傅里叶变换 …… 90
8.4　傅里叶积分的性质 …… 91
8.5　傅里叶变换的应用 …… 93

第 9 章　拉普拉斯变换 …… 95

9.1　拉普拉斯变换的概念 …… 95
9.2　拉普拉斯变换及其逆变换的定义 …… 96
9.3　拉普拉斯变换的存在定理 …… 97
9.4　周期函数的拉普拉斯变换 …… 99
9.5　关于拉普拉斯变换的积分下限问题 …… 100
9.6　拉普拉斯变换的基本性质 …… 100
9.7　象原函数的求法 …… 104
9.8　拉普拉斯变换的应用 …… 106
9.8.1　解常系数线性微分方程的初值问题 …… 106
9.8.2　求解常系数线性微分方程的边值问题 …… 107
9.8.3　解某些变系数线性微分方程 …… 107
9.8.4　求解某些积分方程、微分积分方程 …… 108
9.8.5　解常系数线性微分方程组 …… 108

第 10 章　二阶线性常微分方程的级数解法 …… 110

10.1　二阶线性常微分方程的常点和奇点 …… 110
10.2　方程常点邻域内的解 …… 110
10.3　方程正则奇点邻域内的解 …… 112

第 11 章　典型方程的推导及基本概念 …… 119

11.1　典型方程的导出 …… 119
11.1.1　弦的微小横振动方程 …… 119
11.1.2　在固体中的热传导方程 …… 121
11.1.3　拉普拉斯方程和泊松方程 …… 123
11.2　定解条件 …… 123
11.2.1　初始条件 …… 124
11.2.2　边界条件 …… 124
11.2.3　定解问题及其分类 …… 126

11.2.4 定解问题的适定性 …… 127
11.2.5 叠加原理 …… 128

第 12 章 行波法 …… 129

12.1 行波法 …… 129
12.1.1 弦振动方程的达朗贝尔解法 …… 129
12.1.2 达朗贝尔公式的物理意义 …… 130
12.1.3 依赖区间、决定区域和影响区域 …… 131
12.1.4 有累积效应与无累积效应 …… 131
12.1.5 非齐次方程与齐次化原理 …… 132
12.2 延拓法求解半无限长振动问题 …… 133
12.2.1 半无限长弦的自由振动问题 …… 133
12.2.2 半无限长弦的强迫振动问题 …… 134
12.3 高维波动方程的初值问题 …… 135
12.3.1 平均值法求解三维波动方程初值问题 …… 136
12.3.2 降维法 …… 137

第 13 章 分离变量法 …… 139

13.1 有界弦的自由振动 …… 139
13.1.1 分离变量法的求解过程 …… 139
13.1.2 关于求解过程的评注 …… 142
13.1.3 波动方程的物理意义 …… 143
13.2 有限长杆上的热传导问题 …… 144
13.2.1 使用分离变量法求解第一类齐次边界条件的定解问题 …… 144
13.2.2 使用分离变量法求解其他类型的齐次边界条件定解问题 …… 145
13.3 非齐次方程的求解问题 …… 146
13.4 非齐次边界条件的处理 …… 149

第 14 章 常微分方程的本特征值问题 …… 154

14.1 二阶线性常微分方程的本征值问题 …… 154
14.2 斯特姆-刘维尔方程的本征值问题 …… 156
14.3 两类本征值问题的相互转化 …… 157

第 15 章 亥姆霍兹方程在不同坐标系下的表现形式 …… 158

15.1 拉普拉斯算子在不同坐标系下的表现形式 …… 158
15.2 球坐标系和柱坐标系中亥姆霍兹方程的变数分离 …… 162
15.3 圆内的狄里希累问题 …… 165

第 16 章　勒让德多项式 …… 167
16.1　勒让德方程的求解 …… 167
16.2　勒让德多项式的生成函数和递推公式 …… 170
16.3　勒让德级数 …… 171
16.4　连带的勒让德多项式 …… 173
第 17 章　贝塞尔函数 …… 176
17.1　贝塞尔方程及其求解 …… 176
17.2　贝塞尔函数 …… 177
17.3　贝塞尔函数的性质 …… 179
17.3.1　母函数和积分表示 …… 179
17.3.2　微分关系和递推公式 …… 179
17.3.3　半阶函数 …… 181
17.3.4　贝塞尔函数的零点和衰减振荡特性 …… 183
17.4　贝塞尔方程的固有值问题 …… 184
17.5　贝塞尔函数的应用 …… 186
17.6　球贝塞尔函数和变型(虚宗量)贝塞尔函数 …… 187
第 18 章　格林函数 …… 189
18.1　亥姆霍兹方程的格林函数 …… 189
18.2　格林函数的性质 …… 192
18.3　广义格林函数 …… 195
18.4　全空间上的格林函数——基本解 …… 197
18.5　求特殊形状区域内格林函数的电像法 …… 201
18.6　含时间问题的格林函数及其应用 …… 203
18.7　格林函数的级数解法 …… 206
第 19 章　求解微分方程定解问题积分变换法的普遍原理 …… 211
19.1　基本原理 …… 211
19.2　一些积分变换的例子 …… 214
参考文献 …… 218

第 1 章　复数的基本概念

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数的定义

实数 x 可看成实轴上的点，复数可看成直角坐标系 xOy 上的点，也可由有序实数对 (x,y) 定义，记为 $z=(x,y)$ 或者 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x、y 均为实数。这样，实数 x 就可用实轴上的点 $(x,0)$ 或者 $z=x$ 表示，y 轴上的点可用 $(0,y)$ 或者 $z=\mathrm{i}y$ 来表示，当 $y\neq 0$ 时，把这些数 $z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数，且规定 $\mathrm{i}^2=-1$。

1.1.2　实部和虚部

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 中 x 称为复数 z 的实部，y 称为复数 z 的虚部，分别记为

$$x=\mathrm{Re}\,z\,,\quad y=\mathrm{Im}\,z$$

1.1.3　相等

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等，当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等，即 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$。

1.1.4　复数的四则运算

若有表达式 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则规定：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)\,,\quad z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\ (z_2\neq 0)$$

显然，在进行复数运算时，可利用加法和乘法的交换律、结合律、乘法对加法的分配律以及除数和被除数同时乘一个非零复数其商不变的性质。另外要指出的是，在复数域中复数是不能比较大小的。

1.1.5　复数的共轭运算

实部相同而虚部互为相反数的两个复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 互称为共轭复数，复数 z 的共轭用 $\bar{z}$ 表示。如果 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$。

显然 $\bar{\bar{z}}=z$。特别地，实数的共轭还是该实数本身。共轭复数的性质如下：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2\neq 0)$

(2) $\overline{\overline{z}} = z$ (3) $|z| = |\overline{z}|$

(4) $|z|^2 = z\cdot\overline{z} = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2$ (5) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$， $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$

类似的结果可推广到 n 个复数的运算上。

例 1-1 化简 $\overline{\mathrm{i}^3}$ 和 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$。

解 $\overline{\mathrm{i}^3} = \overline{\mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}} = \overline{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$。

$$\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}^2 + (1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}} = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{-3-\mathrm{i}}{2}。$$

1.2 复数的几何表示

复数有不同的几何表示法，如复平面（用平面上的点表示复数，这个平面称为复平面）或复球面(用球面上的点表示复数，这个球面称为复球面)表示法。

1.2.1 复平面

1．复数的点表示法

一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x, y) 唯一确定。因此，点 (x, y) 与复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 是一一对应的，如图 1-1 所示，称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴，称表示复数 z 的平面为复平面或 z 平面。

2．复数的向量表示法

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可由从原点 O 到点 z 所引的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示，如图 1-1 所示。可见，复数、点、向量三者的关系如图 1-2 所示。

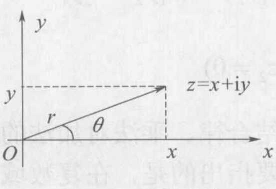

图 1-1 复数的点表示法

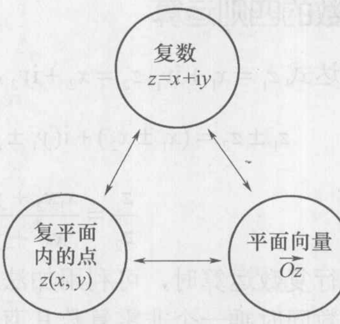

图 1-2 复数的向量表示法

这样，在处理和复数相关的问题时，就会更具有直观性。在物理学中，如力、速度、加速度等都是用向量表示的，因此复数有时也可表示实际的物理量。

3．复数的三角表示法

如图 1-1 所示，我们能够借助于点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定点 $z = x + \mathrm{i}y$ 。向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模，记为 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。显然，对于任意复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 有

$$|x| \leqslant |z|，\quad |y| \leqslant |z|，\quad |z| \leqslant |x| + |y|$$

根据向量的运算及几何知识，可以得到两个重要的不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|，\quad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$$

如图 1-3 所示。

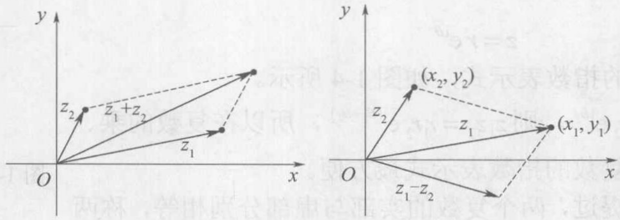

图 1-3　复数的三角表示法

其次，向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向的夹角 θ 满足 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，称为复数 z 的辐角 (Argument)，记为 $\theta=\operatorname{Arg} z$，满足 $\tan(\operatorname{Arg} z)=\tan\theta=\dfrac{y}{x}$。对任一非零复数 z 均有无穷多个辐角 $\operatorname{Arg} z$，它们彼此相差 2π 的整数倍。而满足条件 $-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$ 的辐角却只有一个，称该值为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值或 z 的辐角主值，记为 $\arg z$。于是有

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

值得注意的是，当 $z=0$ 时，其模为零，辐角无意义。当 $z\neq0$ 时，其辐角主值 $\arg z$ 可以由 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按如下关系来确定：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & (x>0)\\ \dfrac{\pi}{2} & (x=0,y>0)\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & (x<0,y\geqslant0)\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & (x<0,y<0)\\ -\dfrac{\pi}{2} & (x=0,y<0)\end{cases}$$

特别地，一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面的位置是关于实轴对称的，所以若 z 不在原点和负实轴上，就有 $\arg\bar{z}=-\arg z$。通过直角坐标与极坐标的关系，可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z，即有

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

则称上式为非零复数 z 的三角表示式。其中

$$\begin{cases}r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\tan(\operatorname{Arg} z)=\dfrac{y}{x}\\ x=r\cos\theta,y=r\sin\theta\end{cases}$$

4．复数的指数表示法

在$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的基础上，引进著名的欧拉(Euler)公式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\exp\{\mathrm{i}\theta\}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

则z又可以表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

称上式为非零复数z的指数表示式，如图1-4所示。

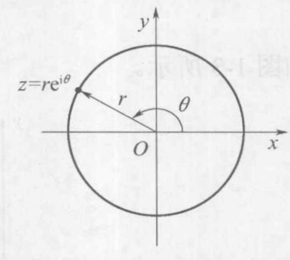

图1-4　复数的指数表示法

若$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，所以在复数的乘、开方等运算中，运用复数的指数表示式最方便。

在本章第1.1节提过，两个复数的实部与虚部分别相等，称两个复数相等。由本节知识可知：两个复数相等，其模必相等，其辐角可相差2π的整数倍。反之，如果两个复数的模及辐角分别相等(或相差2π的整数倍)，则这两个复数必相等。

1.2.2　复球面

前面建立了复数与复平面上点的一一对应关系，下面将建立复数与复球面上点的对应关系，以此来合理地引入无穷远点。具体做法如下：

(1) 取一个在原点O与复平面相切的球面。

(2) 过原点做一条垂直于复平面的直线与球面交于另一点N, N称为北极，原点O记为点S，S称为南极。

(3) 在复平面上任取一点z，将N与复平面上的点z相连,此线段交球面于点P，这样就建立了球面上(不包括北极N)的点与复平面上点的一一对应关系，如图1-5所示。

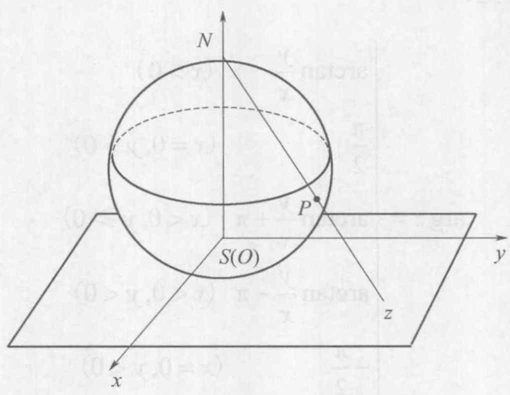

图1-5　复球面

1.2.3　无穷远点

北极N可以看成与复平面上一个模为无穷大的假想点相对应，这个假想点称为无穷远点，并记为∞。这样，完全可以用球面上的点来表示复数。复平面加上点∞后称为扩充复平面，与它对应的就是整个球面，称为复球面。

值得注意的是，通常认为复数域的无穷远点是一个点，它与微积分中的∞是不同的概念。这里的无穷远点∞，它的实部、虚部与辐角都没有意义，规定它的模是正无穷，即$|\infty|=+\infty$。显然，复平面上的每一条线都经过无穷远点。关于数∞的四则运算规定如下：

(1) $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 无意义。

(2) $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$。

(3) 当 $a \neq 0$ 时，$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \cdot \infty = \infty, \dfrac{a}{0} = \infty, \dfrac{\infty}{a} = \infty, \dfrac{a}{\infty} = 0$。

1.3　复数的幂与方根

1.3.1　复数的乘积与商

由欧拉公式，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp\{\mathrm{i}\theta\} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，容易验证

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

因此，利用复数 z 的指数表示式即可得到复数的乘除，令 $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则有

$$z_1 z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\quad (z_2 \neq 0)$$

于是有

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\quad (z_2 \neq 0)$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1-1}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1-2}$$

如图 1-6 所示。

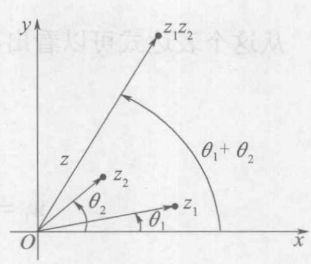

图 1-6　复数的乘积与商

对于式(1-1)和式(1-2)，读者要正确理解。由于辐角的多值性，等式的两端均表示由无穷多个数(角度)构成的数集，因此式(1-1)和式(1-2)应理解为等式两端可能取值的全体是相同的。

特别当 $|z_2| = 1$ 时可得 $z_1 z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，说明单位复数 $(|z_2| = 1)$ 乘任何数，几何上相当于将此数所对应的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\,z_2$。

1.3.2　复数的幂

由 $z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，可把此结论推广到有限个复数的情况。特别地，当 $z = z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时，有

$$z^n = (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

当 $r = 1$ 时，就得到德摩弗(De MoiVre)公式：

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

例 1-2　求 $(1+\mathrm{i})^5$。

解　因为 $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以有

$$(1+\mathrm{i})^5 = (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4(1+\mathrm{i})。$$

1.3.3 复数的根

对于复数 z，若存在复数 w 满足 $w^n=z$，则称 w 为 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$。为从已知的 z 求 w，这里给出 z 和 w 的指数表示式，假设

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

下面找出 r 与 ρ 的关系、θ 与 φ 的关系。

显然

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

由此得

$$|w|=\rho=\sqrt[n]{r},\quad \operatorname{Arg}w=\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

故

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

由上式可知，当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的值；当 k 取其他整数值时，将重复出现上述 n 个值。因此，一个复数 z 的 n 次方根共有 n 个不同的值，即

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

从这个表达式可以看出，n 个不同的值分别为

$$w_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right]$$

在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值表示以原点为中心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

1.4 复数序列的极限

1.4.1 复数的序列

按一定顺序排列的复数 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n(n=1,2,\cdots)$ 称为复数序列，记作 $\{z_n\}$。一个复数序列等价于两个实数序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的有序组合。

1.4.2 聚点与极限

1．聚点

任给 $\varepsilon>0$，存在无穷多个 z_n 满足

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

则称 z 为复数序列 $\{z_n\}$ 的一个聚点。

2. 极限

任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon) > 0$，使当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

则称 z 为复数序列 $\{z_n\}$ 的极限，或称复数序列 $\{z_n\}$ 收敛于 z，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$。易证，当 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$。

3. 聚点与极限

有的序列可以有多个聚点。例如，实数序列

$$\{x_n\} = \frac{1}{3}, -\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{6}, \frac{5}{7}, -\frac{6}{8}, \cdots$$

就有两个聚点 1 和−1。当序列的极限存在时，序列的极限是此序列的唯一聚点。

在实数序列 $\{x_n\}$ 中，数值最大的聚点称为 $\{x_n\}$ 的上极限，记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$；数值最小的聚点称为 $\{x_n\}$ 的下极限，记作 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$，对于上述的实数序列，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1$$

上极限与下极限的概念在计算级数收敛半径时常会用到。

1.4.3 复数序列极限存在的充分必要条件——柯西判别法

任给 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对任意正整数 p，有

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

是 $\{z_n\}$ 极限存在的充分必要条件。

证明

(1) 充分性。设任给 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，使当 $n > N(\varepsilon)$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$，则有

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon, \quad |y_{n+p} - y_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

由微积分中的柯西判别法知，必存在实数 x_0 和 y_0，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

因此当 $n \to \infty$ 时，z_n 的极限存在，即

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + \mathrm{i}y_n) = x_0 + \mathrm{i}y_0$$

(2) 必要性。设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$，根据极限定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有

$$|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对任意正整数 p，有