

中国地质大学(武汉)“十二五”规划教材

信号与 线性系统

吴国平 主编

Xinhao yu Xianxing Xitong



中国地质大学出版社有限责任公司
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE YOUXIAN ZEREN GONGSI

014031900

TN911.6
172

中国地质大学(武汉)“十二五”规划教材

信号与线性系统

吴国平 主编



TN911.6
172



中国地质大学出版社有限责任公司
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE YOUXIAN ZEREN GONGSI



北航

C1720131

002130410

内容简介

本书系统地讨论了信号与线性系统的基本理论和方法。主要介绍信号、系统和系统分析的基本概念、连续时间系统的时域分析、连续时间信号的分解与分析、连续时间系统的频域分析、连续时间系统的复频域分析、连续时间系统的系统函数表示及特性分析、离散时间信号系统的时域分析和Z域分析、线性系统的状态变量分析。为帮助学生理解本教材的基本理论、方法,针对书中主要知识点,书中安排了适当的思考题和习题,书末附有习题的参考答案。本书可作为普通高等院校电类专业"信号与系统"课程的教材使用,也可供相关学科研究人员、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统/吴国平主编. —武汉:中国地质大学出版社有限责任公司,2014.2
ISBN 978-7-5625-3325-2

I. ①信…

II. ①吴…

III. ①信号理论-高等学校-教材②线性系统-高等学校-教材

IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 011916 号

信号与线性系统

吴国平 主编

责任编辑:彭琳

责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社有限责任公司(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)

邮编:430074

电话:(027)67883511

传真:(027)67883580

E-mail:cbb@cug.edu.cn

经销:全国新华书店

Http://www.cugp.cug.edu.cn

开本:787 毫米×1 092 毫米 1/16

字数:493 千字 印张:19.25

版次:2014 年 2 月第 1 版

印次:2014 年 2 月第 1 次印刷

印刷:武汉市籍缘印刷厂

印数:1—1 000 册

ISBN 978-7-5625-3325-2

定价:38.00 元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

前 言

“信号与系统”课程是电类、信息技术类专业的重要基础课程。其基本内容、基本理论、基本方法技术也是数字信号处理、图像处理与分析、语音处理与分析、模式识别、遥感遥测、智能预测等的重要基础。该课程是电类、信息技术类本科生主干课程和学位核心课程,是该类学科研究方向学生考研的必考专业课程之一。本书借鉴已出版同类教材的特色,参考作者公开出版的教材《信号分析与处理》,及近几年不断更新的授课电子和纸质教案内容,采用新的视角和思路对《信号与线性系统》教材进行了编写。在教材的编写中,规避了在信号与系统时域、频域、复频域分析中与信息技术发展不适应且繁杂的一些较陈旧的内容,以求达到教材内容合理、科学、精练、简约的目的;将内容限定为确定性信号和线性系统分析,避免了与“随机过程”、“统计信号分析”、“通信原理”等课程内容不必要的重合交叠;注重分析对象的物理属性,强调信号与系统的物理属性分析,没有过分注重数学推导和数学证明、没有过分强调以电路分析来展开对线性系统的分析。本书在了解电类专业基础课程的基础上,尽量地避免数学内容的重复展开,以简洁的形式介绍必要的数学、物理基础知识,使教材中心内容得到突出。为使读者更好地理解教材的基本内容、基本理论、基本概念、基本方法,书中给出了一些必要的思考题和习题。本书还对一些专用名词、术语、符号进行了统一整编,并给予了中英文对照,对一些基本物理单位进行了规整罗列,以方便学生的学习和理解。新编教材力图体现理论的系统性、内容的简洁性、结构的合理性、体系的先进性、教学的适应性与方便性。

本书为中国地质大学(武汉)“十二五”规划教材,由吴国平主编。傅华明、罗杰、杨敏、王青玲等参加了部分章节的编写,其中罗杰参加了第1章、第2章、第7章、第8章的编写,傅华明参加了第3章、第4章的编写,杨敏、王青玲参加了第5章、第6章、第9章的编写。

教材的编写得到了中国地质大学(武汉)教务处、中国地质大学(武汉)出版社、中国地质大学(武汉)机电学院的大力支持。研究生张辞、杜晓骏、张宇航、夏紫欣、郑宣明、高帆、程芳瑾、田苑等对教材编写的资料搜集、整理、文字处理、数学公式验证、例题、习题解答、验算、图表制作及文稿校核做了大量具体辛苦的工作。在长期的教学过程中,各位从事信号与系统教学的同仁的教学交流,历年学习“信号与系统”课程学生的体会给教材的编写提供了很好的帮助和促进作用。在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,编写的教材不可避免地存在疏漏和不足之处,敬请读者批评指正。

编 者

2014 元月于中国地质大学(武汉)

目 录

1 绪论	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 信号的概念	(2)
§ 1.3 信号的简单运算	(9)
§ 1.4 奇异信号	(11)
§ 1.5 系统的概念	(19)
§ 1.6 线性非时变系统的分析	(21)
思考题	(24)
习 题	(24)
2 连续时间系统的时域分析	(26)
§ 2.1 引言	(26)
§ 2.2 用算子符号表示微分方程	(28)
§ 2.3 冲激响应和零状态响应	(31)
§ 2.4 线性系统全响应时域求解	(41)
思考题	(43)
习 题	(43)
3 连续时间信号的分解与分析	(47)
§ 3.1 引言	(47)
§ 3.2 信号的分解	(47)
§ 3.3 信号的傅里叶级数	(50)
§ 3.4 周期信号的频谱	(55)
§ 3.5 非周期信号的频谱	(56)
§ 3.6 一些典型信号的频谱	(59)
§ 3.7 傅里叶变换的性质	(65)
§ 3.8 周期信号的傅里叶变换	(72)
§ 3.9 抽样信号的分析 and 抽样定理	(76)
思考题	(82)
习 题	(83)
4 连续时间系统的频域分析	(85)
§ 4.1 引言	(85)

§ 4.2	信号通过系统的频域分析方法	(86)
§ 4.3	理想低通滤波器的冲击响应与阶跃响应	(88)
§ 4.4	佩利-维纳准则	(92)
§ 4.5	希尔伯特变换	(94)
§ 4.6	信号的无失真传输	(95)
思考题		(97)
习 题		(97)
5	连续时间系统的复频域分析	(100)
§ 5.1	引 言	(100)
§ 5.2	拉普拉斯变换	(101)
§ 5.3	拉普拉斯变换的收敛区	(105)
§ 5.4	常用函数的拉普拉斯变换	(106)
§ 5.6	拉普拉斯变换的基本性质	(109)
§ 5.6	拉普拉斯反变换	(120)
§ 5.7	线性系统的拉普拉斯变换分析法	(130)
§ 5.8	阶跃信号作用于 RLC 串联电路的响应	(140)
§ 5.9	双边拉普拉斯变换	(144)
§ 5.10	线性系统的模拟	(149)
§ 5.11	信号流图	(155)
思考题		(161)
习 题		(161)
6	连续时间系统的系统函数表示及特性分析	(166)
§ 6.1	引 言	(166)
§ 6.2	系统函数的表示法	(167)
§ 6.3	系统函数极点和零点的分布与系统时域特性的关系	(171)
§ 6.4	系统函数极点和零点的分布与系统频率特性的关系	(175)
§ 6.5	波特图	(182)
§ 6.6	系统的稳定性	(188)
§ 6.7	反馈系统的稳定性	(193)
§ 6.8	根轨迹	(198)
思考题		(205)
习 题		(205)
7	离散时间信号系统的时域分析	(209)
§ 7.1	引 言	(209)
§ 7.2	离散时间信号及其描述方法	(209)
§ 7.3	常用序列及基本运算	(211)
§ 7.4	离散时间系统的描述与模拟	(219)

§ 7.5 离散时间系统的零输入响应	(225)
§ 7.6 离散时间系统的零状态响应	(227)
思考题	(231)
习 题	(231)
8 离散时间信号系统的 Z 域分析	(233)
§ 8.1 引 言	(233)
§ 8.2 Z 变换的定义及其收敛区	(233)
§ 8.3 Z 变换的性质	(241)
§ 8.4 反 Z 变换	(246)
§ 8.5 Z 变换与拉普拉斯变换的关系	(250)
§ 8.6 离散时间系统的 Z 变换分析法	(253)
§ 8.7 离散系统的系统函数	(256)
§ 8.8 离散时间序列的傅里叶变换	(260)
§ 8.9 离散时间系统的频率响应特性	(263)
思考题	(268)
习 题	(268)
9 线性系统的状态变量分析	(271)
§ 9.1 系统的状态变量描述	(271)
§ 9.2 系统状态方程的建立	(272)
§ 9.3 状态方程的求解	(277)
思考题	(283)
习 题	(283)
附 录	(285)
附录(一)	(285)
附录(二)	(285)
主要参考文献	(293)
参考答案	(294)

1 绪论

§ 1.1 引言

人类社会的发展离不开人类群体的活动,为了保证群体活动的协调和有序,人们之间就必须相互交流信息。信息要用某种方式表达出来,例如可以用语言、文字或图画来表达,也可以用收、发双方事先约定的编码来表达。这些语言、文字、图画、编码等,分别是按一定规则组织起来的,因而是含有了信息的一组约定的符号,这种用约定方式组成的符号统称为消息。消息依附于某一物理量的变化就构成了信号。

在电磁现象被人类认识之前,信息的交流与传输是由直接作用于人类感觉器官的信号来实现的,例如烽火、鼓声、旗语、书信等。在这里传输的是直接作用于人耳的声信号或直接作用于人眼的光信号。这些传输信息的方式,或信息含量少,或传输速度慢,或传输距离受限,有着种种不足之处。在电被人类认识之后,因其传输信息快速、便捷,用电作为信息载体的电信号的传输就得到了快速发展。自 1837 年莫尔斯发明电报以来,传输电信号的通信方式得到了广泛运用与迅速发展,现在电话、电报、无线广播、电视已成为人们生活中不可缺少的部分。而为适应生产活动全球化的需要,人类已经实现了环绕全球的电信号通信,并正向超越地球的太阳系通信扩展。在信息传输理论中也常将直接作用于人类感官的信号统称为消息。消息一般并不便于直接传输,所以要利用一些转换设备,把各种不同的消息转变成为便于传输的电信号。电信号常常是随着时间变化的电压或电流等电的量,这种变化是与语言的声音变化或者图画的色光变化等相对应的。这样变化着的电压或电流,分别构成了代表声音、图像和编码等消息的信号,因而信号中也就包含了消息中所含有的信息。所以,带有信息的信号是信息传输技术的工作对象。

信号的传输,需要用许多不同功能的单元组织起来的一个复杂系统来完成。从广泛的意义上说,一切信息的传输过程都可以看成是通信,一切完成信息传输任务的系统都是通信系统,例如电报、电话、电视、雷达、导航等系统均属之。以一个电视系统来说,在这个系统中,所要传输的信息包含在一些配有声音的画面之中。在传输这些画面时,先要利用电视摄像机把画面的光线色彩转变成图像信号,并利用话筒把声音转变成伴音信号,这些就是电视要传输的带有信息的原始信号。然后,把这些信号送入电视发射机,发射机能够产生一种反映上述信号变化的便于传播的高频电信号。最后,由天线将这些高频电信号转换为电磁波发射出去,在空间传播。电视接收者用接收天线截获了电磁波的一小部分能量,把它转变成为高频电信号送入电视接收机。接收机的作用正好和发射机相反,它能从送入的高频电信号中恢复出原来的图像信号与伴音信号,并把这两种信号分别送到显像设备和发声设备,使接收者能看到传输的画面,听到传输的声音。这个过程,可以用一个简明的方框图表示,如图 1-1 所示。这个图表

示了一般通信系统的组成,其中转换器指的是把消息转换为电信号或者反过来把电信号还原成消息的装置,如摄像、显像、话筒、喇叭等设备装置。因为这些装置同时完成了从一种形式的能量转换为另一种形式的能量的工作,所以也常称之为换能器。信道指的是信号传输的通道,在有线电话中它就是导线;在利用电磁波传播的无线电通信系统中,它可以是电磁波传播的空间,也可以是波导或同轴电缆;在近来发展的光通信中,则是光导纤维。发射机和接收机也可以看成是信号通道的一部分,因此有时也称它们为信道机。所以一个通信系统的工作,主要包括消息到信号的转换、信号的处理和信号的传输等。

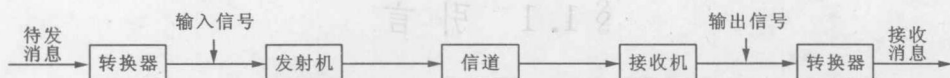


图 1-1 通信系统的组成

与信号传输技术同时发展起来的还有信号处理技术。信号处理的研究领域较少涉及信号的传输,而更多的是考虑信号收到以后的解释。这些信号可能是通信中所传输的信号,也可能是包含有信息的某些数据,诸如生物学中的信号(例如脑电、心电数据)、计算机打印的科学实验数据、商业数据、气象资料等。这里的基本问题是分析收到的信号或数据,从中提取出有用的信息。特别是在存有使信号含糊不清的噪声或干扰的情况下,提取所需要的确切信息。信号处理技术包含有滤波、变换、增强、压缩、估值与识别等内容。自 20 世纪 80 年代以来,随着高速数字计算机的发展及大规模集成电路技术的进步,信号处理的理论与方法都有了很大的发展,并取得了广泛的运用。如多媒体通信、影碟机、高清晰电视、数码相机以及机械振动分析,机械故障诊断,心电、脑电分析等。

信号传输与信号处理是两个独立的学科,但两者又密切相关,在发展中相互影响、相互促进。如处理带有不确定性的随机信号的技术,就密切依赖于研究信息传输所发展起来的理论,而信号处理技术的运用又大大提高了信号传输的质量,扩展了通信的距离。信号传输与信号处理的共同的理论基础之一是信号分析与系统分析,即要研究信号的特性、系统的分析方法、系统各组成部分对信号产生何种影响等问题。

信息的传输与处理技术,除了应用在通信领域外,自 20 世纪 40 年代以来也被广泛应用于其他许多技术领域,如各种雷达与声纳、自动化与遥测数据的处理、全息技术、计算机技术,以至天文学、地震学、生物学、经济学等领域。

由以上简略的叙述可以看出,信号与系统的基本理论和基本分析方法是通信、电信、测控、自控、计算机及相关学科的重要专业基础课程。本章分别介绍信号、系统、系统分析的基本概念和方法等,详细介绍常用信号和奇异信号的定义和基本特征。

§ 1.2 信号的概念

在信号传输系统或信号处理系统中传输处理的主体是信号。系统所包含的各种电路、设备则是为实施这种传输或处理的各种手段。因此,电路、设备的设计和制造的要求,必然要取决于信号的特性。随着待传输或处理的信号日益复杂,相应地,系统中的元器件、电路、设备和

结构等也日益复杂。这就是信号分析具有重要研究意义的原因。

广义地说,信号是一类变化的某种物理量,它们可以是时间和其他变量的函数。只有变化的量中才可能含有信息。最常见的电信号是随着时间变化的电量,它们通常是电压或电流,在某些情况下,也可以是电荷或磁通。信号可表示为时间的函数,所以在信号分析中,信号和函数常通用。信号可按不同方式进行分类,通常的分类如下。

1. 确定信号与随机信号

当信号依赖于变量变化可表示为一确定的函数时,给定某一变量值,就可以确定一相应的函数值。这样的信号就称为确定信号。但是,带有信息的信号往往具有不可预知的不确定性,它们是一种随机信号。随机信号不是一个确定的函数,当给定某一变量值时,其函数值并不确定,而只知道此信号取某一数值的概率。严格地说,除了实验室发生的有规律的信号外,一般的信号都是随机的。因为对于接收者来说,信号如果是完全确定了的函数,就不可能由它得到任何新的信息,因而也就失去了传输信号的目的。但是,对于确定信号的分析仍然具有重要意义,因为有些实际信号与确定信号有相近的特性。例如,乐音在一定时间内近似于周期信号。从这一意义上来说,确定信号是一种近似的、理想化了的信号,做这样的处理,能够使问题分析大为简化,以便于工程中的实际应用。在信号传输过程中,除了人们所需要的带有信息的信号外,同时还会夹杂着如噪声、干扰等人们所不需要的信号,它们大都带有更大的随机性质。本书将主要对确定性信号进行分析。

2. 连续信号与离散信号

确定信号表示为确定的函数,如果在某一时间间隔内,对于一切变量值如时间值,除了若干不连续点外,该函数都给出确定的函数值,该信号就称为连续信号。如图 1-2(a)、图 1-2(b)所示的两个函数,都是在时间间隔 $-\infty < t < \infty$ 内的连续信号,只是在 $t < 0$ 的范围内,两者的信号值均为零。

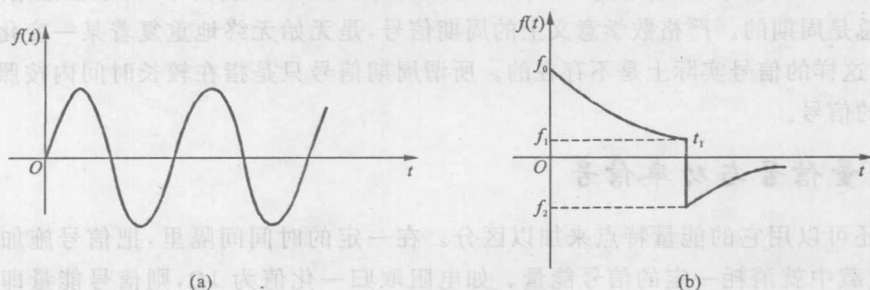


图 1-2 连续信号

这里 $t=0$ 是一个任意选取的起始时间的参考点。这种在 $t < 0$ 其值为零的函数,称为有始函数。应注意的是,连续信号中可以包含有不连续点。如图 1-2(b)中所示函数 $f(t)$,在 $t=0$ 和 $t=t_1$ 处是不连续的,因在该两点处

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t + \epsilon) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t - \epsilon)$$

实际上,所谓连续信号是指它的时间变量 t 是连续的。因此,为了更加确切,也常把这种信号称作连续时间信号。若用 $f(t_0^+)$ 表示 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \epsilon)$, 用 $f(t_0^-)$ 表示 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 - \epsilon)$, 则 $f(t_0^+) - f(t_0^-)$ 称为在 $t = t_0$ 处的不连续值。显然,图 1-2(b) 中信号在 $t = 0$ 处的不连续值是 f_0 , 这是一正值; 在 $t = t_1$ 处的不连续值是 $f_2 - f_1$, 是一负值。有时信号函数的不连续点也称为断点。在断点处不连续值常称为跳变值, 如不连续值为正则称为正跳变, 为负则称为负跳变。

和连续信号相对应的是离散信号。这里代表离散信号的时间函数只在某些不连续的时间值上给定函数值, 如图 1-3 所示。图中函数 $f(t_k)$ 只在 $t_k = -1, 0, 1, 2, 3$ 等离散时刻给出函数值(图中括号内的数值)。所以, 所谓离散信号, 实际上指的是它的时间变量 t 取离散值 t_k , 因而这种信号也常称为离散时间信号。当 $t_k < 0$ 时, 如果函数值 $f(t_k)$ 均为零, 则这种离散时间函数也是有始的。离散时间信号可以在均匀的时间间隔上给出函数值, 也可以在不均匀的时间间隔上给出函数值, 但一般都采用均匀间隔。连续时间信号有时也称为模拟信号, 而幅度也取离散值的离散时间信号则有时也称为数字信号。

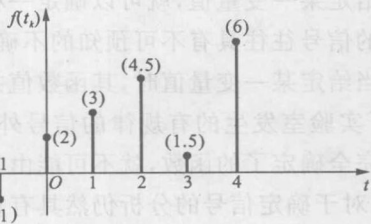


图 1-3 离散信号

3. 周期信号和非周期信号

用确定的函数表示的信号, 又可分为周期信号和非周期信号。以时间周期信号为例, 它是指每隔一定时间 T , 周而复始且无始无终的信号。对于连续周期信号, 其表示式可以写作

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (\text{任意整数})$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程, 便可确定它在任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期 T 趋于无穷大, 则成为非周期信号。正弦信号是最典型的周期信号, 对于任意给定的频率, 正弦信号总是周期的。严格数学意义上的周期信号, 是无始无终地重复着某一变化规律的信号。当然, 这样的信号实际上是不存在的。所谓周期信号只是指在较长时间内按照某一规律重复变化的信号。

4. 能量信号与功率信号

信号还可以用它的能量特点来加以区分。在一定的时间间隔里, 把信号施加在一电阻负载上, 负载中就消耗一定的信号能量。如电阻取归一化值为 1Ω , 则信号能量即为信号的平方值在该时间间隔上的积分。把这能量值对于时间间隔取平均, 即得在此时间内信号的平均功率。即 $W = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |e(t)|^2 dt$, 现在, 如果将时间间隔无限趋大, 即 $\lim_{T \rightarrow \infty} W =$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |e(t)|^2 dt$, 则一般信号均将属于下述两种情况之一: 信号总能量为有限值而信号平均功率为零; 信号平均功率为有限值而信号总能量为无限大。属于前一种情况的信号称为能量信号, 因为它们只能从能量去加以考察, 而无法从平均功率去考察; 属于后一种情况的

信号称为功率信号,对于它们,总能量就没有意义,因而只能从功率去加以考察。不难理解,在时间间隔无限趋大的情况下,周期信号都是功率信号;只存在于有限时间内的信号是能量信号;存在于无限时间内的非周期信号可以是能量信号,也可以是功率信号,这要根据信号是何种函数而定。

无论将信号如何分类,表示信号的函数一定要表征信号携带的全部信息特性。所以信号首先表现为它的变化特性,通常由信号随变量变化的波形来描述。这里信号的特性本质上是指信号的形状特征和信号随时间变化快慢的特性。所谓变化的快慢,一方面的意义是同一形状的波形重复出现的周期短或长,另一方面的意义是信号波形本身的变化速率。图 1-4 表示一个周期性的脉冲信号,这个信号对时间变化的快慢,一方面由它的重复周期 T 表现出来,另一方面由脉冲的持续时间 τ 以及脉冲上升和下降边沿陡直的程度及幅度等表现出来。

除了时间特性外,信号还具有频率特性。对于一个复杂信号,可以用傅里叶分析法把它分解为许多不同频率的正弦分量,而每一正弦分量则以它的振幅和相位来表征。各个正弦分量可以将其振幅和相位分别按频率高低依次排列成频谱。这样的频谱,同样也包含了信号的全部信息量。信号频谱中各分量的频率,理论上说可以扩展至无限,但是由于原始信号的能量一般均集中在频率较低的范围内,高于某一频率的分量,在工程实用上可以忽略不计。这样,每一信号的频谱都有一个有效的频率范围,这个范围称为信号的频带。

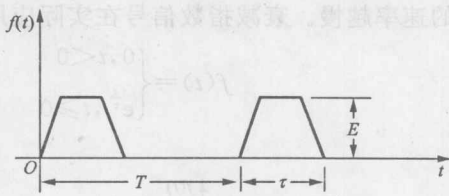


图 1-4 周期性脉冲信号

信号的频谱和信号的时间函数既然都包含了信号所带有的全部信息量,都能表示出信号的特点,那么信号的时间特性和频率特性之间,就不可能互不相关、互相独立,而必然具有密切的联系。例如,在图 1-4 中,重复周期 T 的倒数就是这周期性脉冲信号的基波频率,周期的长或短分别对应着低的或高的基波和谐波频率。同时,脉冲持续时间 τ 和边沿的陡度决定着脉冲中的能量向高频方向分布的程度,也就是决定着信号的频带宽度。有关信号的这些特性,将在第 3 章中做进一步讨论。

对于描述随机过程的随机信号,因为具有某种程度上的不确定性,每次测量所得的结果在细节上都是不同的,不大可能会重复出现,因此是一组随机的过程或数据。图 1-5 就是一个典型的随机过程四次测量所得到的结果。从图中可见,在同一时刻(例如 t_1)四次测量值都是不相同的。对随机信号的分析需要从统计的观点进行讨论,并用概率方法来确定。随机信号也有连续与离散之分。对于随机信号的分析也同样可以从时间特性与频率特性两方面进行讨论。随机信号分析的基本理论和方法将会在后来的课程里具体介绍。

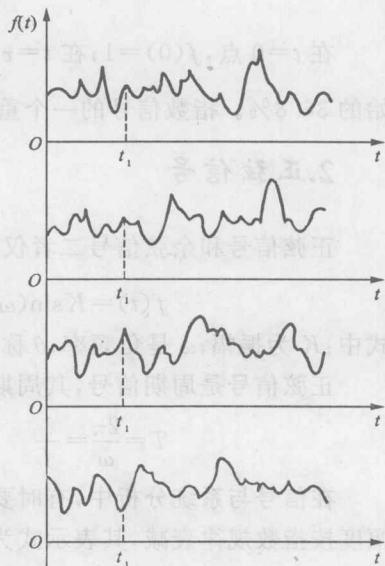


图 1-5 随机过程四次测量的结果

作为本课程基本理论和方法的要求,下面具体介绍几

种后续章节中常用的连续时间信号。

1. 指数信号

指数信号的表示式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (1-1)$$

式中： a 是实数； K 为常数。若 $a > 0$ ，信号将随时间而增长；若 $a < 0$ ，信号则随时间衰减。在 $a = 0$ 的特殊情况下，信号不随时间变化，成为直流信号。常数 K 表示指数信号在 $t = 0$ 点的初始值。指数信号的波形如图 1-6 所示。

指数 a 的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率， $|a|$ 越大，增长或衰减的速率越快。通常，把 $|a|$ 的倒数称为指数信号的时间常数，记作 τ ，即 $\tau = \frac{1}{|a|}$ ， τ 越大，指数信号增长或衰减的速率越慢。衰减指数信号在实际应用上比较常遇到，如图 1-7 所示，其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

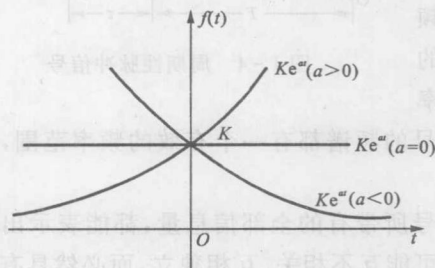


图 1-6 指数信号

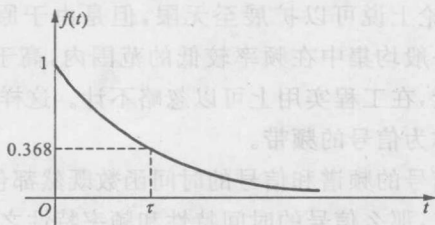


图 1-7 单边指数衰减信号

在 $t = 0$ 点， $f(0) = 1$ ；在 $t = \tau$ 处， $f(\tau) = \frac{1}{e} \approx 0.368$ 。也就是说，经时间 τ ，信号衰减到原初始的 36.8%。指数信号的一个重要特征是它的微分和积分仍是指数形式。

2. 正弦信号

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$ ，经常统称为正弦信号，一般写作

$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta) \quad (1-2)$$

式中： K 为振幅； ω 是角频率； θ 称为初相位。其波形如图 1-8 所示。

正弦信号是周期信号，其周期 T 与角频率 ω 和频率 f 满足下列关系式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

在信号与系统分析中，有时要遇到衰减的正弦信号，其波形如图 1-9 所示，此正弦振荡的幅度按指数规律衰减，其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ke^{-at} \sin(\omega t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

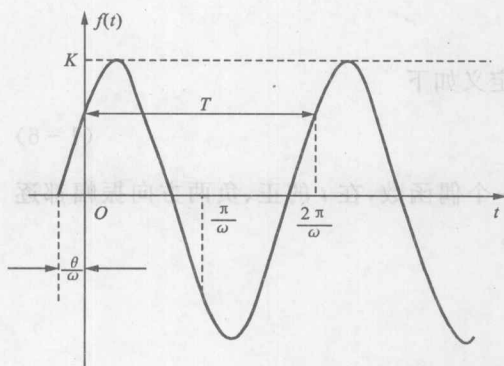


图 1-8 正弦信号

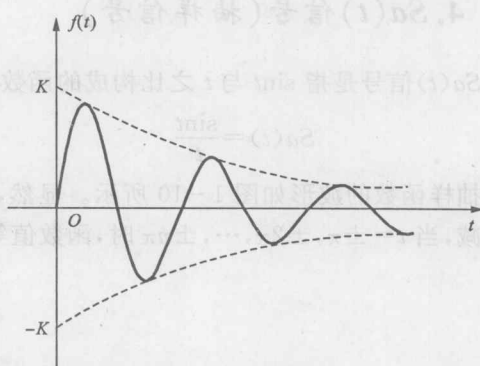


图 1-9 指数衰减的正弦信号

由欧拉公式可知

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

所以正弦信号可用复指数信号表示为

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

与指数信号的性质类似,正弦信号对时间的微分与积分仍为同频率的正弦信号。

3. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数,则称为复指数信号,其表示式为

$$f(t) = Ke^{st} \quad (1-4)$$

其中

$$s = \sigma + j\omega$$

K 为常数; σ 为复数 s 的实部; ω 是其虚部。借助欧拉公式将式(1-4)展开,可得

$$Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t} = Ke^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)] \quad (1-5)$$

此结果表明,一个复指数信号可以分解为实、虚两部分。其中,实部包含余弦信号,虚部则为正弦信号。指数因子的实部 σ 表征了正弦和余弦函数振幅随时间变化的情况。若 $\sigma > 0$, 正弦、余弦信号是增幅振荡;若 $\sigma < 0$, 正弦和余弦信号是衰减振荡。指数因子的虚部 ω 则表示正弦与余弦信号的角频率。两个特殊情况是:当 $\sigma = 0$ 时,即 s 为虚数,则正弦信号、余弦信号是等幅振荡;而当 $\omega = 0$ 时,即 s 为实数,则复指数信号成为一般的指数信号;若 $\sigma = 0$ 且 $\omega = 0$, 即 s 等于零,则复指数信号的实部和虚部都与时间无关,成为直流信号。

虽然实际上不能产生复指数信号,但是它概括了多种情况,可以利用复指数信号来描述各种基本信号,如直流信号、指数信号、正弦或余弦信号以及增长或衰减的正弦与余弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。在信号分析理论中,复指数信号是一种非常重要的基本信号。

4. $Sa(t)$ 信号(抽样信号)

$Sa(t)$ 信号是指 $\frac{\sin t}{t}$ 与 t 之比构成的函数, 它的定义如下

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-6)$$

抽样函数的波形如图 1-10 所示。显然, 它是一个偶函数, 在 t 的正、负两方向振幅都逐渐衰减, 当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时, 函数值等于零。

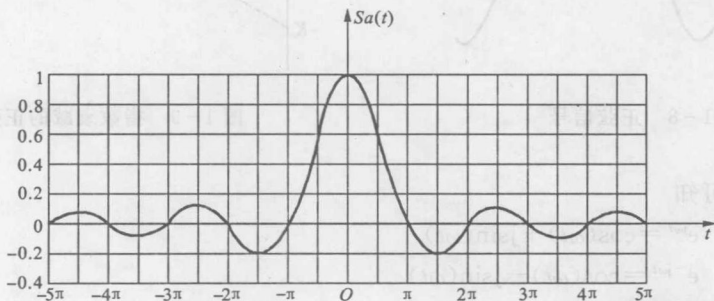


图 1-10 $Sa(t)$ 函数

$Sa(t)$ 函数还具有以下性质

$$\int_0^{\infty} Sa(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1-7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi \quad (1-8)$$

一般的抽样函数还可表示为 $Sa(x)$, 即

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (1-9)$$

5. 钟形信号(高斯函数)

钟形信号(或称高斯函数)的定义是

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-10)$$

其中 E 表示信号的幅度, 波形如图 1-11 所示。令 $t = \frac{\tau}{2}$ 代入函数式求得

$$f\left(\frac{\tau}{2}\right) = E e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.78E$$

这表明函数式中的参数 τ 是当 $f(t)$ 由最大值 E 下降为 $0.78E$ 时, 所占据的时间宽度。钟形信号在随机信号分析中占有重要地位。

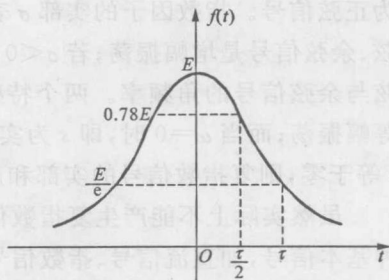


图 1-11 钟形信号

§ 1.3 信号的简单运算

所谓对信号的处理,从数学意义来说,就是将信号经过一定的数学运算转变为另一信号。这种处理的过程可以通过算法来实现,也可以让信号通过一个实体的电路来实现。本节将介绍一些简单的信号处理,如叠加、相乘、平移、反褶、尺度变换等,至于对信号复杂的处理运算将在后面再逐步介绍。

1. 信号的相加与相乘

信号叠加的现象出现很多,如卡拉 OK 中演唱者的歌声与背景音乐的混合就是一种信号叠加的过程,影视动画中添加背景也是如此。在信号传输过程中也常有不需要的干扰和噪声叠加进来,影响正常信号的传输。信号相乘则常用于如调制解调、混频、频率变换等系统的分析。

两个信号的相加(乘)即为两个信号的时间函数相加(乘),反映在波形上则是将相同时刻对应的函数值相加(乘)。图 1-12 就是两个信号相加的一个例子。

2. 信号的延时

一般的,当信号通过多种不同路径传输时,信号所用的传输时间不同,因而产生延时的现象。如电视台发射的电波信号,经接收天线附近的建筑物反射再传送到天线的信号,它一比直接传输到天线的信号在时间上要滞后,从而造成重影现象。音频多径传输则产生混响。在雷达、声纳及地震探矿中反射的信号也比发射的信号要延迟一段时间。这些都可以看作信号在时间上的右延迟。

信号 $f(t)$ 延时 t_0 后的信号表示为 $f(t-t_0)$,显然 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的值 $f(0)$ 在 $f(t-t_0)$ 中将出现在 $t=t_0$ 时刻,因此就其波形而言,相当于保持信号形状不变而沿时间轴右移 t_0 的距离。如 t_0 为负值则向左移动,图 1-13 为信号延时的示例。

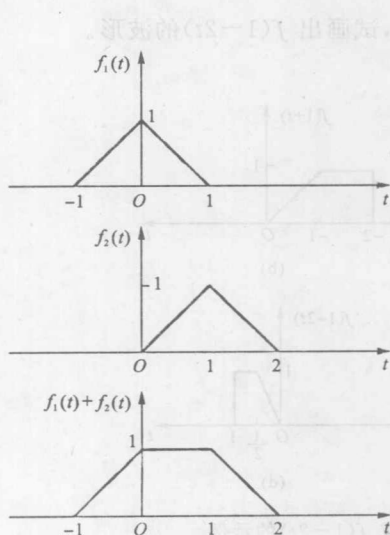


图 1-12 两个信号相加的例子

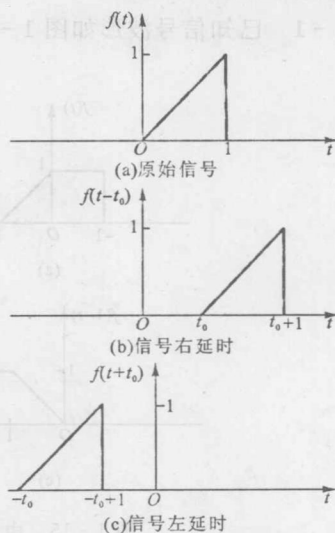


图 1-13 信号的延时示例

3. 信号的尺度变换与反褶

当时间坐标的尺度发生变换时将使信号产生展缩,如录像带当播放慢镜头时时间尺度变大造成信号展宽。而在快镜头时,则时间尺度变小而造成信号压缩。如倒放则造成信号反褶。

信号 $f(t)$ 经尺度变换后的信号记为 $f(at)$, 其中 a 为一常数。显然在 t 为某值 t_1 时的值 $f(t_1)$ 在 $f(at)$ 的波形中将出现在 $t = \frac{t_1}{a}$ 的位置, 因此, 如 a 为正数, 当 $a > 1$ 时, 信号波形被压缩; 而 $a < 1$ 时, 信号波形被展宽。如 $a = -1$ 则 $f(at)$ 的波形为 $f(t)$ 波形对称于坐标纵轴的反褶。当 a 为负值且绝对值不等于 1 时, 则反褶与尺度变换同时存在。图 1-14 为尺度变换的示例。

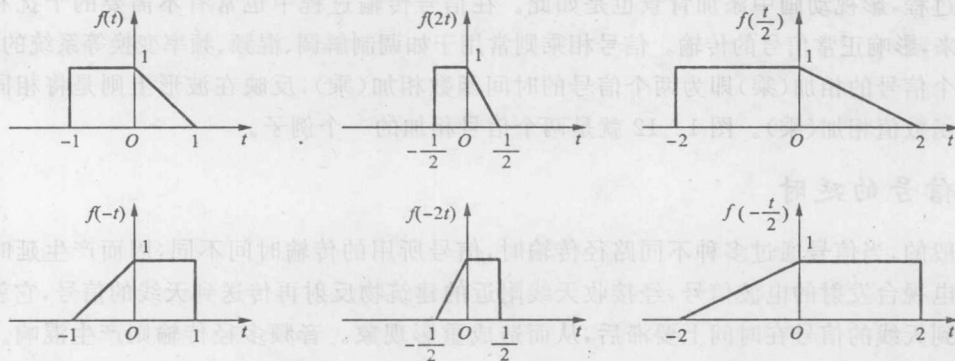


图 1-14 信号的尺度变换示例

在信号简单处理过程中常有综合时延、尺度变换与反褶的情况, 这时相应的波形分析可分步进行。分步的次序可以有所不同, 但因为在处理过程中, 坐标轴始终是时间 t 。因此, 每一步的处理都应针对时间 t 进行。

例题 1-1 已知信号波形如图 1-15(a) 所示, 试画出 $f(1-2t)$ 的波形。

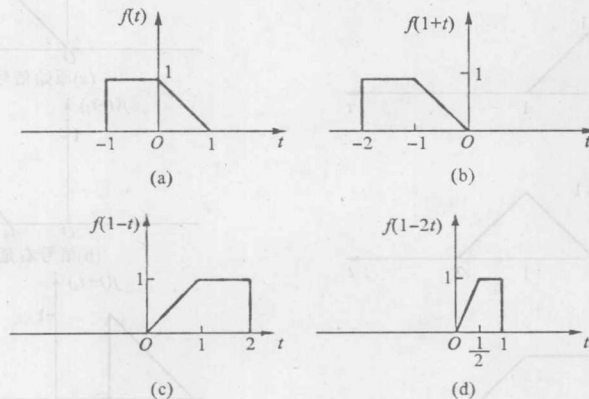


图 1-15 由信号 $f(t)$ 形成 $f(1-2t)$ 的示例