高等院校数学教材同步辅导及考研用书

概率论与数理统计

高教版（第四版）浙江大学编

习题精解及考研辅导

（第2版）

周华任 等编

知识结构分析

典型方法归纳

各种题型集成

课后习题精解

考研真题精选

打磨能力训练

成就考试考研

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

概率论与数理统计习题精解及考研辅导

(第 2 版)

高教版《概率论与数理统计》(第四版)(浙江大学编)

周华任　等编

东南大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高等教育出版社的《概率论与数理统计(第四版)》(浙江大学编)编写的,包括了知识逻辑结构图,基本要求、重点与难点,主要概念及公式,重点、难点解答,课后习题精解,考研真题精选。内容广、题型多、技巧性强,可以使广大同学举一反三,触类旁通,开拓解题思路,更好地掌握概率论与数理统计的基本内容和解题方法。

本书可作为高等学校工科、理科(非数学专业)各专业的同步辅导教材和研究生入学考试的参考书,也可供工程技术人员、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题精解及考研辅导/周华任等编. —2版. —南京:东南大学出版社,2014.2

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

ISBN 978-7-5641-4014-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 027000 号

概率论与数理统计习题精解及考研辅导(第2版)

编　　者	周华任等
责任编辑	宋华莉
编辑邮箱	52145104@qq.com
出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼2号(邮编:210096)
网　　址	http://www.seupress.com
电子邮箱	press@seupress.com
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700 mm×1 000 mm　1/16
印　　张	19.75
字　　数	546千字
版　　次	2012年8月第1版　2014年2月第2版第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-4014-4
定　　价	36.00元
经　　销	全国各地新华书店
发行热线	025-83790519　83791830

(本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830)

第 2 版前言

这一版我们对本书第 1 版中的一些疏漏和不妥之处作了修改，增加 2013 年和 2014 年全国硕士研究生入学考试数学一、数学二和数学三的真题，增加了三套综合测试题。

书中不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

作者

2014 年 1 月

前　言

本辅导教材是根据高等教育出版社的《概率论与数理统计》(第四版)(浙江大学编)编写的,本书由以下几个部分组成:

1. 知识逻辑结构图:把本章的主要知识点用图解的方式表达出来。

2. 基本要求、重点与难点:根据考试及考研要求,提炼每章学习基本要求、重点、难点,使读者学习时一目了然。

3. 主要概念及公式:列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式,突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

4. 重点、难点解答:列出相应各章的重点、难点内容,并对重点、难点内容给出了相应的解释说明,以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

5. 课后习题精解:教材中课后习题丰富、层次多,许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论,因此我们对课后习题给出了详细的解答。由于有些题目解题方法多种多样,大多数习题我们只给出了一种参考解答,其他方法留给读者自己去思考。

6. 考研真题精选:精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答,这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强,可以使广大同学举一反三,触类旁通,开拓解题思路,更好地掌握概率论与数理统计的基本内容和解题方法。

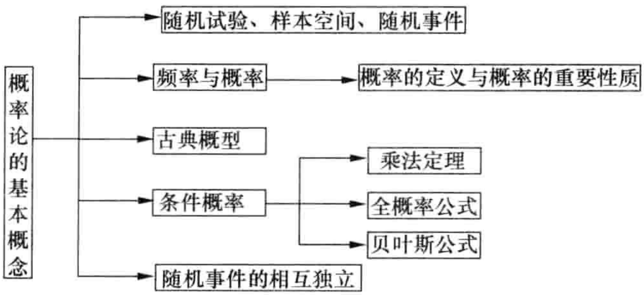
本辅导教材把原教材中的第十章到第十四章内容略去,涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的所有知识点,使得此书更符合教学的实际情况和研究生入学考试的要求,更为精炼和实用。

本书由周华任、蔡开华、钱岳红、陈玉金、李喜波、刘硕松、卢刚、任宝龙编写,由于作者的水平有限,书中的疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

目　　录

第一章　概率论的基本概念

知识逻辑结构图



基本要求、重点与难点

基本要求：

1. 熟悉、了解样本空间、随机试验、随机事件等概念.

2. 熟练掌握事件之间的关系和事件之间的运算.

3. 掌握概率的定义，会运用它的性质计算概率.

4. 掌握等可能概型，熟悉它的性质.

5. 弄懂条件概率的含义，掌握乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式.

6. 掌握独立性的概念，并记住在这个条件相应的事件的运算法则.

重点：掌握概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

难点：掌握计算有关事件概率的方法.

主要概念及公式

1. 样本空间：随机试验所有可能结果的集合.

2. 随机事件：样本空间的子集.

3. 频率：事件 A 发生次数与实验次数的比值.

4. 概率：设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，且满足非负性、规范性、可列可加性，称为事件 A 的概率.

5. 等可能概型：(1) 试验的样本空间只包含有限个元素. (2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型，也称为古典概型.

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(e_j) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

6. 条件概率：设 A、B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在 A 发生条件下 B 发生的条件概率.

7. 独立性：A、B 为两个事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A、B 相互独立，简称 A、B 独立.

8. 事件关系.

$(A、B)$ 事件相等：$A=B$；$(A、B)$ 积事件：$A\cap B$；

$(A、B)$ 和事件：$A\cup B$；$(A、B)$ 差事件：$A-B$；

$(A、B)$ 互不相容：$A\cap B=\varnothing$；A 与 B 互逆：$A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$.

9. 概率性质：

(1) $P(\varnothing)=0$

(2) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$（$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立）

(3) $P(B-A)=P(B)-P(A)$[条件为 $A\subset B$]

(4) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(5) $P(A)\leqslant P(S)=1$

10. 乘法定理：$P(AB)=P(B\mid A)\cdot P(A)$

11. 全概率公式：

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n)$$

12. 贝叶斯公式

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

13. 加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

14. 随机试验

(1) 可以在相同条件下重复进行.

(2) 每次试验结果可能不止一个.

(3) 进行一次试验不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中具有以上三个特点的试验称为随机试验.

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件；

每次试验中总是发生的，称为必然事件；

每次试验中都不会发生的，称为不可能事件.

15. 概率的三个性质：

(1) 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$ 则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$

重点、难点解答

1. 计算条件概率 $P(B|A)$ 的方法有两种：

(1) 按条件概率的定义，直接求出 $P(B|A)$，注意在求 $P(B|A)$ 时，已知 A 也发生，样本空间 S 中所有不属于 A 的样本点被排除，原有的样本空间 S 缩减为 $S'=A$. 在缩减了的样本空间 $S'=A$ 中计算事件 B 的概率就得到 $P(B|A)$.

(2) 在 S 中计算 $P(AB)$ 及 $P(A)$，再由公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 来求.

2. 事件的独立性是概率论中的一个重要的概念. 概念论与数理统计中的很多内容都是在独立的

前提下讨论的. 在实际应用中，对于事件的独立性，往往不是根据定义来判断而是根据实际意义来加以判断. 根据实际背景判断事件的独立性，往往并不困难.

3. 使用全概率公式和贝叶斯公式，寻找完备事件组的两个常用方法：

(1) 从第一个试验入手，分解其样本空间，找出完备事件组.

如果所求概率的事件与前后两个试验（两个工序）有关，且这两个试验（或工序）彼此关联，第一个试验（工序）的各种结果直接对第二个试验产生影响，而问第二个试验（工序）出现结果的概率，这类问题是属于使用全概率公式的问题. 将第一个试验的样本区间分解成若干个互不相容的事件之和. 这些事件就是所求的一个完备事件组.

(2) 从事件 B 发生的两两互不相容的诸原因找完备事件组.

如果事件 B 能且只能在"原因"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 下发生，且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容，那么这些"原因"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 就是一个完备事件组.

4. 事件独立性在概率计算和证明中的应用.

应用独立性有助于简化概率计算，常用到以下三个命题.

(1) 四对事件 A, B；$\overline{A}, B$；$A, \overline{B}$；$\overline{A}, \overline{B}$ 之中有一对相互独立，则其余三对也相互独立，换言之，上面四对事件要么都相互独立，要么都不相互独立.

(2) 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么，若把其中任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个事件相应地换成它们的对立事件，则所得的 n 个事件仍然相互独立.

(3) 有限个独立事件的积的概率等于这些事件的概率的乘积. 即

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

课后习题精解

1. 写出下列随机事件的样本空间 S：

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，如连续查出了 2 个次品就停止检查，或检查了 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

【解】 (1) $S = \left\{ \dfrac{i}{n} \,\middle|\, i = 0, 1, \cdots, 100n \right\}$，其中 n 为班的人数.

(2) $S = \{10, 11, \cdots\}$.

(3) $S = \{00, 100, 0100, 0110, 1100, 1010, 1011, 0111, 1101, 1110, 1111, 0101\}$，0 表示次品，1 表示正品.

(4) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

2. 设 A, B, C 为三个事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生.

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生.

(3) A, B, C 中至少有一个发生.

(4) A, B, C 都发生.

(5) A, B, C 都不发生.

(6) A, B, C 中不多于一个发生.

(7) A, B, C 中不多于两个发生.

(8) A, B, C 中至少有两个发生.

【解】 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ (2) $AB\overline{C}$ (3) $A\cup B\cup C$ (4) ABC (5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$ (7) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ (8) $AB\cup BC\cup AC$.

3. (1) 设A,B,C是三个事件,且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求$A,B,C$至少有一个发生的概率.

(2) 已知$P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(C)=\frac{1}{5}$,$P(AB)=\frac{1}{10}$,$P(AC)=\frac{1}{15}$,$P(BC)=\frac{1}{20}$,$P(ABC)=\frac{1}{30}$,求$A\cup B$,$\overline{A}\,\overline{B}$,$A\cup B\cup C$,$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$,$\overline{A}\,\overline{B}C$,$\overline{A}\,\overline{B}\cup C$的概率.

(3) 已知$P(A)=\frac{1}{2}$,(i) 若A,B互不相容,求$P(A\overline{B})$,(ii) 若$P(AB)=\frac{1}{8}$,求$P(A\overline{B})$.

【解】 (1)
$$\begin{aligned}&P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{5}{8}+P(ABC).\end{aligned}$$

由$ABC\subset AB$,已知$P(AB)=0$,故$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,得$P(ABC)=0$.

所求概率为$P(A\cup B\cup C)=\frac{5}{8}$.

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$.

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}.$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20}.\end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}.$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B}-\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60}.$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\,\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

(3) (i) $P(A\overline{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}$.

(ii) $P(A\overline{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

4. 设A,B是两个事件.

(1) 已知$A\overline{B}=\overline{A}B$,验证$A=B$.

(2) 验证事件A和事件B恰有一个发生的概率为$P(A)+P(B)-2P(AB)$.

【解】 (1) 由已知$A\overline{B}=\overline{A}B$,故有$(A\overline{B})\cup(AB)=(\overline{A}B)\cup(AB)$,从而$A(\overline{B}\cup B)=(\overline{A}\cup A)B$,即$AS=SB$,故有$A=B$.

(2) A,B恰好有一个发生的事件为$A\overline{B}\cup\overline{A}B$,其概率为
$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)&=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A(S-B))+P(B(S-A))\\&=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-2P(AB).\end{aligned}$$

5. 10片药片中有5片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取5片,求其中至少有2片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

【解】 (1) $P=1-P$(取到的5片药片均不是安慰剂)$-P$(取到的5片药片中只有1片是安慰剂)

$$=1-\frac{C_5^0C_{10-5}^5}{C_{10}^5}-\frac{C_5^1C_{10-5}^4}{C_{10}^5}=\frac{113}{126}.$$

(2) $P=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12}.$

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码. (1) 求最小号码为 5 的概率. (2) 求最大号码为 5 的概率.

【解】 (1),(2) 有同一样本空间且所含元素个数为 C_{10}^3.

(1) 记 $A=$"最小号码为 5"，A 的有利事件数为 C_5^2；故 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$

(2) 记 $B=$"最大号码为 5"，则 B 的有利事件数为 C_4^2，故 $P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}.$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客，问一个订货为 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

【解】 取发给顾客 9 桶油漆的所有可能情况为样本空间，其中含样本数为 C_{17}^9. 记 A 为正确的发放，则 A 含有的样本数为 $C_{10}^4C_4^3C_3^2$，从而

$$P(A)=\frac{C_{10}^4\cdot C_4^3\cdot C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2\,431}$$

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品，1 100 件正品，任取 200 件. (1) 求恰有 90 件次品的概率. (2) 求至少有 2 件次品的概率.

【解】 (1) $P=\frac{C_{400}^{90}\cdot C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}$

(2) 设 $B=\{$至少有 2 件次品$\}$，则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{400}^1C_{1\,100}^{199}+C_{1\,100}^{200}}{C_{1\,500}^{200}}$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

【解】 设 $A=\{$4 只鞋中至少有 2 只配成一双$\}$，则$\overline{A}=\{$4 只鞋中没有 2 只能配成一双$\}$，$\overline{A}$ 的基本事件数可考虑从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只，有 $C_5^4 2^4$ 种取法，而总的事件数为从 10 只鞋中任取 4 只，有 C_{10}^4 种取法，则

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

【解】 所有可能的排列构成样本空间，其中包含的样本点数为 A_{11}^7. 设 $A=\{$正确的排列$\}$，则 A 包含的样本点数为 $C_1^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1=4$，则

$$P(A)=\frac{4}{A_{11}^7}=0.000\,002\,4$$

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

【解】 设 $X=\{$杯中球的最大个数$\}$，则

$$P(X=1)=\frac{4\times3\times2}{4\times4\times4}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\frac{4\times3\times2+4\times3}{4\times4\times4}=\frac{9}{16}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{4\times4\times4}=\frac{1}{16}$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱，每个部件用 3 只铆钉，若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

【解】 设 $A=\{$发生一个部件强度太弱$\}$，则 A 所含的样本点数为 $C_{10}^{1}C_{47}^{27}\dfrac{27!}{(3!)^9}$.

将 50 只铆钉装在 10 个部件上的所有装法的全体看作样本空间，则所包含的样本点数为 $C_{50}^{30}\dfrac{30!}{(3!)^{10}}$.

故 $$P(A)=\frac{C_{10}^{1}\cdot C_{47}^{27}\cdot\dfrac{27!}{(3!)^9}}{C_{50}^{30}\cdot\dfrac{30!}{(3!)^{10}}}=\frac{1}{1\,960}$$

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

【解】 (1) 共有 $5+2+3+2=12$ 名学生，在其中任选 4 名共有 $C_{12}^{4}=495$ 种选法，其中每年级各选 1 名的选法有 $C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1=60$ 种选法，因此，所求概率为

$$P=\frac{60}{495}=\frac{4}{33}.$$

(2) 在 12 名学生中任选 5 名的选法共有 $C_{12}^{5}=792$ 种. 在每个年级中有一个年级取 2 名，而其他 3 个年级各取 1 名的取法共有

$$C_5^2C_2^1C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^2C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^2C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^1C_2^2=240(\text{种}).$$

于是所求的概率为

$$P=\frac{240}{792}=\frac{10}{33}.$$

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

(2) 已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

【解】 (1) $P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$.

由题设得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7,\quad P(\overline{B})=1-P(B)=0.6,$$

$$P(AB)=P(A(S-\overline{B}))=P(A)-P(A\overline{B})=0.2,$$

故

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=0.25.$$

(2) $P(AB)=P(B|A)P(A)=\dfrac{1}{12}$,

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\dfrac{1}{12}}{\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{6},$$

故　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$

15. 掷两颗骰子,已知两颗骰子点数之和为 7,求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

【解】 **解法一:**取两颗点数之和为 7 的所有可能情况的全体为样本空间 Ω,则 $\Omega=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$;用 A 表示两颗骰子点数之和为 7,所以

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

解法二:$X=\{$第一颗骰子的点数$\}$,$Y=\{$第二颗骰子的点数$\}$,则

$$P\{\{X=1\}\cup\{Y=1\}\mid X+Y=7\}=\frac{P\{X=6,Y=1\}+P\{X=1,Y=6\}}{P\{X+Y=7\}}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{3}$$

16. 据以往资料表明,某一 3 口之家,患某种传染病的概率有以下规律:

$P\{$孩子得病$\}=0.6$,$P\{$母亲得病$\mid$孩子得病$\}=0.5$,$P\{$父亲得病$\mid$母亲及孩子得病$\}=0.4$,求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

【解】 设 $A=\{$孩子得病$\}$,$B=\{$母亲得病$\}$,$C=\{$父亲得病$\}$,则 $P(A)=0.6$,$P(B|A)=0.5$,$P(C|AB)=0.4$,所以 $P(\overline{C}|AB)=0.6$.

由乘法定理得

$$P(AB\overline{C})=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\overline{C}|AB)=0.6\times0.5\times0.6=0.18$$

故母亲及孩子得病,但父亲未得病的概率为 0.18.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品,在其中取两次,每次任取一件,作不放回抽样,求下列事件的概率:

(1) 两件都是正品.

(2) 两件都是次品.

(3) 一件是正品,一件是次品.

(4) 第二次取出的是次品.

【解】 (1) $P=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$　　(2) $P=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$

(3) $P=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$　　(4) $P=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他随意地拨号,(1) 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率;(2) 若已知最后一个数字是奇数,那么此概率是多少?

【解】 (1) $P=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$

(2) $P=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

19. (1) 设甲袋中装有 n 只白球,m 只红球,乙袋中装有 N 只白球,M 只红球,今从甲袋中任取一只球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一只球,问取到白球的概率是多少?

(2) 第一只盒子装有 5 只红球,4 只白球;第二只盒子装有 4 只红球,5 只白球,先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去,然后从第二盒子中任取一只球,求取得白球的概率.

【解】 (1) 设 $B_1=\{$甲袋中任取一球放入乙袋中去,取得是白球$\}$,$B_2=\{$甲袋中任取一球放入乙袋中时,取得是红球$\}$,$A=\{$乙袋中取出白球$\}$

$$P(B_1)=\frac{n}{m+n}$$

$$P(B_2)=\frac{m}{m+n}$$

$$P(A|B_1)=\frac{N+1}{M+N+1}$$

$$P(A|B_2)=\frac{N}{M+N+1}$$

由全概率公式得：

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)\\&=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{N+1}{M+N+1}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{N}{M+N+1}\\&=\frac{(n+m)N+n}{(m+n)(M+N+1)}\end{aligned}$$

(2) 设 $B_1=\{$从第一只盒中取得 2 只红球的事件$\}$，$B_2=\{$从第一只盒中取到 2 只白球的事件$\}$，$B_3=\{$从第一只盒中取到一只红球和一只白球的事件$\}$，$A=\{$从第二盒中取到一只白球的事件$\}$，则有

$$P(B_1)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18}\qquad P(A\mid B_1)=\frac{5}{5+4+2}=\frac{5}{11}$$

$$P(B_2)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}\qquad P(A\mid B_2)=\frac{5+2}{5+4+2}=\frac{7}{11}$$

$$P(B_3)=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}\qquad P(A\mid B_3)=\frac{5+1}{5+4+2}=\frac{6}{11}$$

由全概率公式得：

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)\\&=\frac{5}{18}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{11}+\frac{5}{9}\times\frac{6}{11}=\frac{53}{99}\end{aligned}$$

20. 某种产品的商标为“MAXAM”，其中有 2 个字母已经脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM” 的概率.

【解】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 分别表示字母 MA，MX，MA，MM，AX，AA，AM，XA，XM，AM 脱落事件，则 $P(A_i)=\frac{1}{10}$，$i=1,2,\cdots,10$，设 $B=\{$放回后仍为“MAXAM”$\}$，则 $P(B|A_i)=\frac{1}{2}$，$i=1,2,3,5,7,8,9,10$，$P(B|A_4)=P(B|A_6)=1$，

$$P(B)=\frac{8\times\frac{1}{2}+2\times 1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

21. 已知男子有 5% 是色盲患者，女子有 0.25% 是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

【解】 设 $A=\{$抽到一名男性$\}$；$B=\{$抽到一名女性$\}$；$C=\{$抽到一名色盲者$\}$. 由全概率公式和贝叶斯公式得：

$$\begin{aligned}P(A|C)&=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)}\\&=\frac{\frac{1}{2}\times 5\%}{5\%\times\frac{1}{2}+0.25\%\times\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{20}{21}$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试,第一次及格的概率为 p,若第一次及格则第二次及格的概率也是 p,若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$.(1) 若至少一次及格则他能取得某种资格,求他取得该资格的概率;(2) 若已知他第二次已经及格,求他第一次及格的概率.

【解】 设 $A_1=\{$该生第一次考试及格$\}$,$A_2=\{$该生第一次考试不及格$\}$,$B=\{$该生第 2 次考试及格$\}$,已知 $P(A_1)=p, P(A_2)=1-p, P(B|A_1)=p, P(B|A_2)=\frac{p}{2}$.

(1)
$$\begin{aligned} P(A_1\cup B) &= P(A_1)+P(B)-P(A_1B)\\ &= P(A_1)+P(A_1B+A_2B)-P(A_1B)\\ &= P(A_1)+P(A_1B)+P(A_2B)-P(A_1B)\\ &= P(A_1)+P(A_2)P(B|A_2)\\ &= p+(1-p)\cdot\frac{p}{2}=p\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式和全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}\\ &= \frac{p^2}{p^2+(1-p)\times\frac{p}{2}}=\frac{2p}{1+p}\end{aligned}$$

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去,接收站收到时,A 被误收作 B 的概率为 0.02,而 B 被误收作 A 的概率为 0.01,信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1,若接收站收到的信息是 A,问原发信息是 A 的概率是多少?

【解】 设 $B_1=\{$发出信号"A"$\}$,$B_2=\{$发出信号"B"$\}$,$A_1=\{$收到信号"A"$\}$,$A_2=\{$收到信号"B"$\}$,有

$$P(B_1)=\frac{2}{3}\quad P(B_2)=\frac{1}{3}$$

$$P(A_1|B_1)=0.98\quad P(A_2|B_1)=0.02$$

$$P(A_1|B_2)=0.01\quad P(A_2|B_2)=0.99$$

由贝叶斯公式和全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B_1|A_1) &= \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)}\\ &= \frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=\frac{196}{197}\end{aligned}$$

24. 有两箱同种类的零件,第一箱装 50 只,其中 10 只一等品;第二箱装 30 只,其中 18 只一等品,今从两箱中任挑出一箱,然后从该箱中取零件两次,每次任取一只,作不放回抽样.试求(1) 第一次取到的零件是一等品的概率;(2) 第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

【解】 (1) $P_1=\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=0.4$

(2) $$P_2=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}}{\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}}=0.4856$$

25. 某人下午 5:00 下班，他所积累的资料见下表：

到家时间	5:35～5:39	5:40～5:44	5:45～5:49	5:50～5:54	5:54 之后
乘地铁到家的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车到家的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是汽车，结果他是 5:47 到家的，试求他是乘地铁回家的概率.

【解】 设 $A=\{$乘地铁回家$\}$，$B=\{$乘汽车回家$\}$，$C=\{$在 5:47 回家$\}$，由全概率公式和贝叶斯公式得：

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)}$$

$$=\frac{0.45\times\frac{1}{2}}{0.45\times\frac{1}{2}+0.20\times\frac{1}{2}}=\frac{9}{13}$$

26. 病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.8. 若浇水则树死去的概率为 0.15，有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

(1) 求主人回来树还活着的概率.

(2) 若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

【解】 (1) 记 A 为事件"树还活着"，记 W 为事件"邻居记得给树浇水"，即有

$$P(W)=0.9, P(\overline{W})=0.1, P(A|W)=0.85, P(A|\overline{W})=0.2,$$

$$P(A)=P(A|W)P(W)+P(A|\overline{W})P(\overline{W})$$
$$=0.85\times0.9+0.2\times0.1=0.785.$$

(2) $$P(\overline{W}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|\overline{W})P(\overline{W})}{P(\overline{A})}=\frac{[1-P(A|\overline{W})]P(\overline{W})}{1-P(A)}$$

$$=\frac{0.8\times0.1}{0.215}=0.372.$$

27. 设本题涉及的事件均有意义，设 A，B 都是事件.

(1) 已知 $P(A)>0$，证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2) 若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

(3) 若设 C 也是事件，且有 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

【证】 (1) 若 $P(A)>0$，要证 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

上式左边等于 $P(AB)/P(A)$，上式右边等于 $P(AB)/P(A\cup B)$.

因为 $A\cup B\supset A$，$P(A\cup B)\geqslant P(A)$，故有 $P(AB)/P(A)\geqslant P(AB)/P(A\cup B)$，

即 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2) 由 $P(A|B)=1$ 得 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，

即 $P(AB)=P(B)$. ①

于是 $P(\overline{B}|\overline{A})=P(\overline{A}\,\overline{B})/P(\overline{A})=P(\overline{A\cup B})/P(\overline{A})=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}.$$

由 ① 式得到

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$$