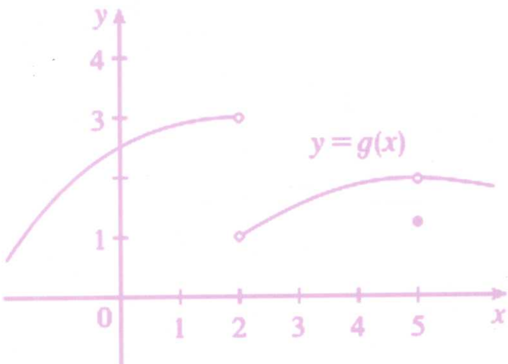
高等院校经济管理类专业　经济数学基础系列教材

总主编⊙赵新泉



GAODENG SHUXUE (WENKE)

高等数学（文科）

熊波　主编

中国财政经济出版社

高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材
总 主 编　赵新泉

高等数学（文科）

熊　波　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．文科／熊波主编．—北京：中国财政经济出版社，2014.3
高等院校经济管理类专业．经济数学基础系列教材
ISBN 978-7-5095-5104-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①熊…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 030940 号

责任编辑：吕小军　　责任校对：胡永立
封面设计：思梵星尚

中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：88190406　北京财经书店电话：64033436　84041336
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　10.5 印张　251 000 字
2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月北京第 1 次印刷
印数：1—5 000　定价：20.00 元
ISBN 978-7-5095-5104-2/O·0045
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010-88190744
反盗版举报热线：010-88190492，88190446

序

Preface

目前，各高等院校的文科专业都陆续开设了“文科高等数学”课程。在社会进步、科学现代化的过程中，数学与数学方法显得越来越重要，它不仅是一种工具，而且也成为解决问题的关键所在。“高科技本质上是数学”这句话已经越来越得到人们的认同。美国数学史学家M. 克莱因曾经说过：“一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。这种关系在我们这个时代尤为明显。”“数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说。”数学已经广泛地影响着人类的生活和思想，是形成现代文化的主要力量。

本书是专门为高等院校法、哲、史、文、语言等文科专业学生编写的数学教材，在教材中我们强调的不是数学公式的推导、定理的证明，而是介绍数学概念的形成、数学方法的应用，注重数学思想方法的熏陶，希望通过本书的学习让文科学生认识和体会到数学严密的思维方式。本教材在叙述中放弃了一些纯数学的理论描述而采取更直观的解释，以便能更好地满足文科专业学生对数学的理解。文中“*”号部分的内容授课教师可以根据学生们的数学基础选讲。

本教材由熊波主编，全书分为三部分共9章。第一部分是微积分，共四章，编写分工为：周月梅编写第1、第2章；熊波编写第3章；韩娅玲编写第4章。第二部分是线性代数初步，共两章，编写分工为：熊波编写第5章；邓薇编写第6章。第三部分是概率论初步，共三章，编写分工为：杜薇薇编写第7、第8章及附录一；蒋锋编写第9章及附录二；本教材的习题参考答案由研究生贾晓斌、何运、胡铭元校正。本书编写过程中得到了很多老师的指导，在此表示感谢！

由于水平有限和时间仓促，教材中难免会存在一些错误，恳请使用本教材的师生多提供宝贵意见，以便我们改进。

编　者

2014年1月

目 录

Contents

第一部分 微积分

第二部分 线性代数初步

第三部分 概率论初步

第一部分

微 积 分

微积分是研究微分学和积分学的统称，英文名称是 Calculus，意为计算。这是因为早期微积分主要用于天文、力学、几何学中的计算问题。后来人们也将微积分称为分析学，或称无穷小分析，专指运用无穷小或无穷大等极限过程分析处理计算问题的学问。

极限是整个微积分学的基础。微分学包括求导和微分的运算，是一套关于变化率的理论。它使得函数、速度、加速度和曲线斜率等均可用一套通用的符号进行讨论。积分学包括不定积分和定积分的概念和应用，为定义和计算面积、体积等提供一套通用的方法。如果将整个数学比作一棵大树，那么初等数学是树的根，名目繁多的数学分支是树枝，而树干的主要部分就是微积分。

微积分堪称人类智慧最伟大的成就之一。微积分这门学科在现代也一直发展着，中国的数学泰斗陈省身先生所研究的微分几何领域，便是利用微积分的理论来研究几何。这门学科对人类认识时间和空间的性质发挥着巨大的作用，并且这门学科至今仍然很活跃。

第1章

函 数

函数是客观世界中变量与变量之间依赖关系的一种数学抽象。函数是从量的方面研究事物运动变化规律，函数也是微积分的基本研究对象。根据课程的需要，本章将对函数的概念及相关知识做简单的复习，并介绍几个常见的经济函数。

§1.1 实数与绝对值

1.1.1 实数

在中学课程中，我们知道实数由有理数和无理数两部分组成。有理数可以用分数形式表示，也可以用有限十进小数或无限十进循环小数来表示；而无限十进不循环小数则称为无理数。有理数和无理数统称为**实数**。为方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 R，即

$$R = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

1.1.2 绝对值

实数 x 的**绝对值**定义为

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

在数轴上 $|x|$ 就是 x 到原点的距离，数轴上任意两点 x、y 之间的距离是 $|x-y|$。

绝对值具有以下基本性质：

① $|-x| = |x| \geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$|x|=0$

② $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

③ $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$

④ $|xy| = |x||y|$

⑤ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

1.1.3 区间与邻域

介于两实数之间的全体实数构成的集合称为一个**有限区间**，这两个实数叫区间的端点。对于给定的 a、$b\in R$ 且 $a<b$：

$\{x\mid a<x<b\}$——开区间，记作：(a,b)

$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$——闭区间，记作：$[a,b]$

$\{x\mid a\leqslant x<b\}$——半开半闭区间，记作：$[a,b)$

$\{x\mid a<x\leqslant b\}$——半开半闭区间，记作：$(a,b]$

从数轴上看，闭区间比开区间多包括两个端点，半开半闭区间比开区间多一个端点。

类似的有 $\{x\mid x\leqslant a\}$记作$(-\infty,a]$；$\{x\mid x<a\}$记作$(-\infty,a)$；$\{x\mid x\geqslant a\}$记作$[a,+\infty)$，$\{x\mid x>a\}$记作$(a,+\infty)$。以上这几类数集都称为**无限区间**。

有限区间和无限区间统称为**区间**。

集合$\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$称为**点 x_0 的 δ 邻域**，其几何意义是以 x_0 为中心，δ 为半径的对称区间，记作 $U(x_0;\delta)$或简单的写作 $U(x_0)$；集合$\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$称为**点 x_0 的 δ 空心邻域**，简记为 $U^\circ(x_0)$其几何意义是以 x_0 为中心，δ 为半径的对称区间，但要去掉点 x_0。

此外，我们常用到以下几种邻域：

点 x_0 的 δ 左邻域 $U_-(x_0;\delta)=(x_0-\delta,x_0]$，简记为 $U_-(x_0)$；

点 x_0 的 δ 右邻域 $U_+(x_0;\delta)=[x_0,x_0+\delta)$，简记为$U_+(x_0)$；

$U_-(x_0)$与 $U_+(x_0)$去除点 x_0 后，分别为**点 x_0 的空心 δ 左、右邻域**，简记为 $U^\circ_-(x_0)$与 $U^\circ_+(x_0)$。

§1.2 函数的概念

1.2.1 函数的定义

(1) 映射的概念

定义 1.1 设 X、Y 是两个非空集合，若存在一个对应法则 f，使得任意 $x\in X$,按照法则 f，有惟一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的**映射**，记作：

$$f:X\to Y$$

其中元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，记作 $y=f(x)$；元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的**原像**；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，它是 Y 的子集，记作 R_f，即：

$$R_f=\{f(x)\mid x\in X\}$$

从上述映射的定义中，需要注意的是：

①构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域 $R_f\subset Y$；对应法则 f。

②对于每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是惟一的；而每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是惟一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集。

从实数集（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的**函数**。

（2）函数的概念

定义 1.2　设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的**函数**，通常简记为：

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$。

函数定义中，对每个 $x\in D$ 按对应法则 f，总有惟一的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$。因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f，即 $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$。

按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x),x\in D$”或“$y=f(x),x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f。

变量表示的是在某一变化过程中不断变化的量，例如，某产品的成本、平均成本随产量的变化而变化，成本、平均成本以及产量都是变量；某生产商的总收益随着其产品价格和销售量的变化而变化，总收益、产品的价格以及销售量是变量。而函数则表示变量之间的对应关系。习惯上用字母 F、f、g、φ 等来表示函数，而用小写字母 x、y、z 来表示自变量和因变量。

1.2.2　函数的表示法

在中学课程中，我们已经知道函数的表示方法主要有三种：列表法、图示法和解析法（或称公式法）。

列表法：列表法是利用表格的形式反映自变量与因变量之间函数关系的表示方法，在经济和管理问题中，常用图示法或列表法表示变量与变量之间的函数关系。

例 1.1　要表示某地区城镇居民人均收入与时间之间的函数关系，可以用表 1.1 表示。

表 1.1

时间	2006 年	2007 年	2008 年	2009 年	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年
城镇居民人均收入（元）	1374	2024	2965	3876	5160	5846	6860	8500

图示法：图示法是用坐标系中的曲线，描述函数关系的表示方法。

公式法：公式法是借助于数学解析式给出变量与变量之间对应规则的方法。

有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表示，这类函数通常称为**分段函数**。

例 1.2　函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，称为**符号函数**，其图像如图 1.1 所示。

例 1.3　函数 $f(x)=|x|$ 的分段函数形式为：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

它还可表示为 $f(x)=x\operatorname{sgn}x$。其图像如图 1.2 所示。

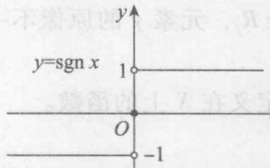


图 1.1

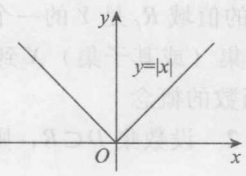


图 1.2

要注意的是：分段函数并不是几个函数，而是一个函数，仅仅是它在不同的区间对应关系式不同。

有些函数难以用上述三种方法来表示，只能用言语来描述，如定义在 R 上的狄利克雷（Dirichlet） 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

和定义在[0,1]上的黎曼 （Riemann） 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}(p,q\in N_+,\dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}) \\ 0, & \text{当 } x=0,1 \text{ 和}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$$

§1.3　函数的性质

1.3.1　函数的性质

（1） 有界性

设函数 $y=f(x), x\in D$,区间 $I\subset D$。如果存在实数 K_1，对任意的 $x\in I$，$f(x)\leqslant K_1$,则称 $f(x)$在 I 上**有上界**；若存在实数 K_2，对任意的 $x\in I$，$f(x)\geqslant K_2$,则称 $f(x)$在 I 上**有下界**；若存在实数 $M>0$，对任意的 $x\in I$，$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**。如果不存在这样的正数 M，就称 $f(x)$在 I 上无界。

不难验证：f 在 I 上有界的充要条件是 f 在 I 上既有上界又有下界。若 f 为 I 上的有界函数，则 f 的图像完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间。

例如：$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界；$y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内有下界，但无上界，$y=x^2$ 在$[-2,2]$内有界。

（2） 单调性

任取 x_1、$x_2\in I, x_1<x_2$,若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$为 I 上的**增函数**；若 $f(x_1)<f(x_2)$,称 $f(x)$为 I 上的**严格单调增函数**；若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$为 I 上的**减函数**；若 $f(x_1)>f(x_2)$,称 $f(x)$为 I 上的**严格单调减函数**。

注意：函数的单调性、有界性与所讨论的区间有关。同一函数，在不同的区间，其单调性、有界性可能会发生改变。

例如函数 $y=x^2$ 在区间 $[-1,1.5]$ 内不是单调的，而在区间 $[0,1.5]$ 内是严格单调增函数（图1.3）。

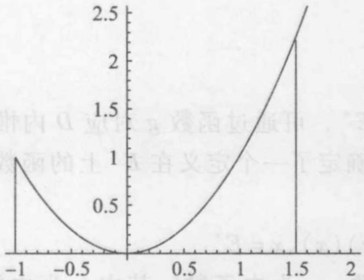


图1.3

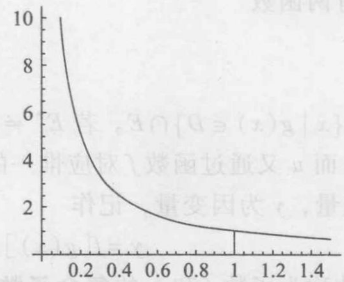


图1.4

又如函数 $y=\dfrac{1}{x}$，在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内都是严格单调减函数，但是在区间 $(0,1)$ 内无界，而在区间 $(1,2)$ 内有界（图1.4）。

（3）奇偶性

任意 $x\in D$，且 $-x\in D$，若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**。

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。又例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。

注意：偶函数的图形关于 y 轴是对称的，如图1.5。奇函数的图形关于原点是对称，如图1.6。若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义，则当 $f(x)$ 为奇函数时，必有 $f(0)=0$。

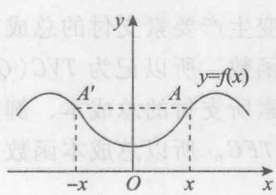


图1.5

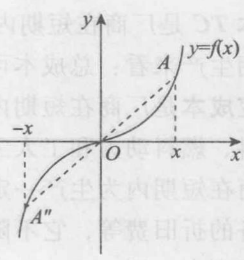


图1.6

（4）周期性

存在 $l>0$，任意的 $x\in D$，$x\pm l\in D$，若 $f(x\pm l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 l 为周期（一般指最小正周期）。

从周期函数的定义可知，若常数 l 是 $f(x)$ 的周期，则对任意整数 k，kl 也是 $f(x)$ 的周期，即 $f(x+kl)=f(x)$。

例如三角函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期；$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 是以 π 为周期。函数 $y=c$ 为周期函数，但没有最小正周期。

1.3.2 复合函数

设有两函数

$$y=f(u),u\in D$$
$$u=g(x),x\in E$$

记 $E^*=\{x\mid g(x)\in D\}\cap E$。若 $E^*\neq\phi$，则对每个 $x\in E^*$，可通过函数 g 对应 D 内惟一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应惟一的一个值 y，这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，.它以 x 为自变量，y 为因变量，记作

$$y=f[g(x)],x\in E^* \text{ 或 } y=(fog)(x),x\in E^*$$

这个函数称为函数 f 和 g 的**复合函数**。并称 f 为**外函数**，g 为**内函数**。其中 u 为**中间变量**。函数 f 和 g 的复合运算也可简单地写作 fog。

例 1.4 $y=f(u)=\sqrt{u},u\in D=[0,+\infty)$ 与 $u=g(x)=1-x^2,x\in E=R$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2} \text{ 或 } (fog)(x)=\sqrt{1-x^2}$$

其定义域 $E^*=[-1,1]\subset E$。

§1.4 简单的经济函数

这节我们将简单地介绍几种常用的经济函数。

1.4.1 成本函数

总成本 TC 是厂商在短期内生产一定数量的产品对全部生产要素所支出的货币总额。

从短期生产来看：总成本可以看做由两部分组成，一个是总可变成本，一个是总不变成本。**总可变成本**是厂商在短期内生产一定数量的产品对可变生产要素支付的总成本，例如厂商对原材料、燃料动力和工人工资的支付等。它是产量的函数，所以记为 $TVC(Q)$。**总不变成本**是厂商在短期内为生产一定数量的产品对不变生产要素所支付的总成本，例如，建筑物和机器设备的折旧费等，它不随产量的变化而变化，记为 TFC。所以总成本函数 = 总可变成本 + 总不变成本，即

$$TC(Q)=TFC+TVC(Q)$$

平均总成本 AC 是厂商在短期内平均每生产一单位产品所消耗的全部成本，它等于总成本除以产量，即

$$AC(Q)=\frac{TC(Q)}{Q}$$

1.4.2 收入函数

总收入 TR 是企业将产品出售后所得到的全部货币总额，用 P 来表示产品价格，Q 来表示售出的产品数量，则总收入 = 产品价格 × 产品数量，即

$$TR=P\cdot Q$$

平均收入 **AR** 表示企业平均每售出一单位产品所得到的收入。它等于总收入除以售出的产品数，即

$$AR=\frac{TR}{Q}=P$$

因此，平均收入就等于产品的单位价格。

1.4.3　利润函数

利润 TL 是厂商生产一定数量的产品并销售所得的收入扣除成本后所剩余的货币总额，总利润 = 总收入 - 总成本。

企业生产的一个重要目的就是利润最大化，而利润又由生产成本和收入共同决定，生产成本决定于要素价格和产量，收入决定于产品价格和产量，所以利润的大小是由要素市场和货币市场共同起作用的。

上述三个函数均可认为是产量的函数。

1.4.4　需求函数

一种商品的需求是指消费者在一定时期内在各种可能的价格水平下愿意而且能够购买的商品的数量。

当市场其他因素不变时，需求量与价格之间的关系称为**需求函数**。

将不同价格下所对应的商品需求量连起来，就可以得到商品的需求曲线，例如图 1.7 中所表示出的即是某商品的需求曲线。

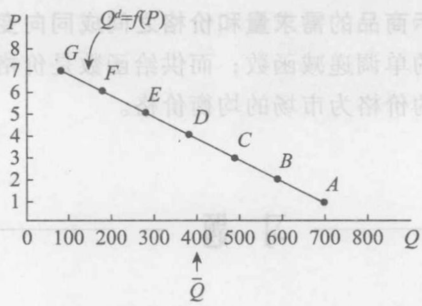


图 1.7　某商品的需求曲线

图 1.7 中的需求曲线是一条直线，实际上，需求曲线可以是直线型的，也可以是曲线型的。通常，为了简化分析过程，在不影响结论的前提下，大多使用线性需求曲线。线性需求曲线的通常形式为：

$$Q^d=\alpha-\beta\cdot P$$

其中 α、β 为常数，且 α、$\beta>0$。

由需求函数的表达式和需求曲线的图形可以看出，**需求曲线具有一个明显的特征，它是向右下方倾斜的，即它的斜率为负值，表示商品的需求量和价格之间成反向变动的关系。**

1.4.5 供给函数

一种商品的供给是指生产者在一定时期内在各种可能的价格下愿意而且能够提供出售的该种商品的数量。

当市场其他因素不变时，供给量与价格之间的关系称为**供给函数**。

将不同价格下所对应的商品供给量连起来，就可以得到商品的供给曲线，例如图1.8中所表示出的某商品的供给曲线。

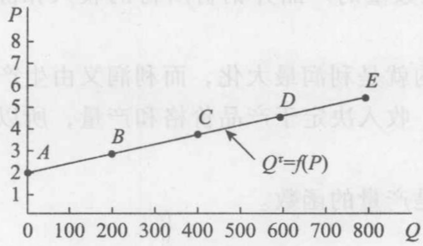


图1.8　某商品的供给曲线

如同需求曲线一样，供给曲线可以是直线型，也可以是曲线型。通常，为了简化分析过程，大多使用线性供给曲线。它的通常形式为：

$$Q^s=-\delta+\gamma\cdot P$$

其中，δ、γ 为常数，且 δ、$\gamma>0$。

由供给函数的表达式和需求曲线的图形可以看出，**供给曲线表现出向右上方倾斜的特征，即它的斜率为负值，表示商品的需求量和价格之间成同向变动的关系。**

通常，需求函数是价格的单调递减函数；而供给函数是价格的单调递增函数。

当需求量等于供给量时的价格为市场的均衡价格。

习　题

1. 设 $f(x)=2x^2+3x-4$，求：
$f(0)$、$f(2)$、$f(\sqrt{2})$、$f(1+\sqrt{2})$、$f(-x)$、$f(x+1)$、$2f(x)$ 和 $f(2x)$。

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求 $f(2+h)$、$f(x+h)$ 和 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，其中 $h\neq0$。

3. 已知 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$。

4. 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$　　（2）$f(x)=\sqrt[4]{x^2-6x}$

（3）$f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$　　（4）$f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$