·浙大四版·

概率论与数理统计
习题详解

张天德　王文轲◎主编

GAILULUN YU SHULI TONGJI
XITI XIANGJIE

中国政法大学出版社

· 浙大四版 ·

概率论与数理统计
习题详解

张天德　王文轲◎主编

中国政法大学出版社
2013 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（浙大四版）习题详解 / 张天德，王文轲主编. —北京：中国政法大学出版社，2013.9

ISBN 978-7-5620-4967-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… ②王… Ⅲ. ①概率论-高等学校-题解②数理统计-高等学校-题解 Ⅳ. ①021-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第203986号

书　名	概率论与数理统计（浙大四版）习题详解
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路 25 号)
	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088　fada.sf@sohu.com
	http://www.cuplpress.com　(网络实名：中国政法大学出版社)
	(010) 58908433(编辑部)　58908325(发行部)　58908334(邮购部)
承　印	固安华明印刷厂
规　格	787mm × 1092mm　1/16
印　张	10.5
字　数	160 千字
版　本	2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 978-7-5620-4967-8/O
定　价	16.80 元

前言

大学期间，如何学好数学？考研准备期，又该如何复习好数学呢？虽然考研数学没有指定的教材，全国各高校的教材又是五花八门，百家争鸣，但总体来讲，值得我们关注的，也是我在此重点推荐的，是如下四本书：同济大学数学系主编的《高等数学（上册）》（第六版）、《高等数学（下册）》（第六版）、《线性代数》（第五版）和浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第四版）。这四本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，亦是最接近考研数学的权威教材。所以，我建议同学们用这套书做大学数学的学习和考研复习之用。

那么，如何才能使用好这套书呢？大家应该有所共识：数学学习得好与坏，那是需要通过做题去检验的。做什么题？就做这套书的课后习题。为了使同学们能真正用好这套书，能真正掌握解题的方法，我们组织了一批在本科教学一线和考研辅导一线的老师、专家，共同编写了与此相配套的四本图书，包括：《高等数学习题详解（上册）》、《高等数学习题详解（下册）》、《线性代数习题详解》、《概率论与数理统计习题详解》。在体例方面，本系列图书章节的划分与设置均与教材保持一致。每章内容包括：概念网络图；习题详解；单元小结。通过概念网络图对本章知识进行体系总结；在习题详解部分，提供准确的解题思路和方法，并对相应的考试要求加以提示；在单元小结中，对本章知识要点予以准确概括和提炼，并对基本方法进行说明。

总之，本系列图书汇集了编者丰富的教学经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，配合权威教材所附习题的解答和分析，帮助学生融会贯通相关知识，提高学习效率。

本系列丛书编写过程中，参考了同济大学数学系主编的《高等数学（上册）》（第六版）、《高等数学（下册）》（第六版）、《线性代数》（第五版）和浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第四版）以及教育部考试中心编写的《考研数学考试大纲》等，在此感谢诸多相关作者的辛勤工作，同时也要感谢中国政法大学出版社。限于水平，本书在编写过程中难免出现不妥之处，敬请广大读者给予指正。

编　者

目 录

第 一 章
随机事件与概率

一、概念网络图

- 基本概念
  - 随机试验 E:重复性、所有结果已知和不确定性
  - 样本空间 S:所有可能结果的组成的集合
  - 随机事件 A:样本空间的子集
    - 关系:包含、互斥、对立、独立
    - 表示:和事件、积事件、差事件、逆事件
    - 运算:交换律、结合律、分配律、德摩根律
- 概率概念
  - 统计概念:频率
  - 公理化概念:非负性、规范性和可列可加性
  - 古典概念与几何概念:等可能概型
  - 计算公式
    - 加法公式:
      - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$(若事件 A 与 B 互斥)
    - 减法公式:
      - $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
      - $P(A-B)=P(A)-P(B)$(若事件 $A\supseteq B$)
    - 求逆公式:$P(\bar{A})=1-P(A)$
- 条件概率概念
  - 定义:若 $P(A)>0$ 时,$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$,且满足公理化的三个条件(非负性、规范性和可列可加性)
  - 计算公式:与概率的计算公式类似,有加法、减法和求逆公式
  - 条件概率的应用
    - 乘法公式:若 $P(A)>0$ 时,$P(AB)=P(A)P(B|A)$
    - 全概率公式:$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$
    - 贝叶斯公式:$P(B_i|A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}$
    - (其中 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分,$P(B_i)>0$)

- 独立性
  - 定义
    - 两个事件：$P(AB)=P(A)P(B)$
    - 多个事件：积事件的概率等于事件概率的乘积，推广多个事件的独立性
  - 性质
    - 相互独立的事件中部分事件间相互独立
    - 相互独立的事件中部分事件的逆事件与其余事件仍相互独立
  - 重要应用
    - 将多个事件的和事件概率转化为逆事件概率乘积求解
    - 伯努利试验

二、习题详解

1. 写出下列随机试验的样本空间

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）.

（2）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，连续查出 2 件次品就停止检查，或检查 4 件产品就停止检查，记录检查的结果.

（4）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

解　（1）记 n 为小班学生的人数，一次数学考试的平均分为

$$S_1=\left\{\frac{k}{n}\,\middle|\,\text{其中 } k \text{ 为小班的一次数学考试的成绩和}\right\}$$

（2）生产产品直至 10 件正品为止，生产的总件数为 $S_2=\{10,11,\cdots\}$.

（3）记 0 为出厂的产品是“次品”，记 1 为出厂的产品为“合格品”，检查 4 件产品就停止检查，其结果为 $\{0000,0001,0010,0100,1000,0011,0101,1001,0110,1010,1100,1110,1101,1011,0111,1111\}$ 连续查出两件次品就停止检查，则上述结果中去除样本点 $\{0000,0001,0010,1000,0011,1001\}$，即样本空间为

$$S_3=\{00,0100,100,0101,0110,1010,1100,1110,1101,1011,0111,1111\}.$$

（4）单位圆内任意取一点坐标集合为 $S_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

（1）A 发生，B 与 C 不发生；　（2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（3）A,B,C 中至少有一个发生；　（4）A,B,C 都发生；

（5）A,B,C 都不发生；　（6）A,B,C 中不多于一个发生；

（7）A,B,C 中不多于二个发生；　（8）A,B,C 中至少有两个发生.

解　（1）$A\bar{B}\bar{C}$　（2）$AB\bar{C}$　（3）$A\cup B\cup C$

（4）ABC　（5）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$　（6）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C$

(7) $\Omega - ABC$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$

(8) $ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}$

3. (1) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率．

(2) 已知 $P(A)=1/2$，$P(B)=1/3$，$P(C)=1/5$，$P(AB)=1/10$，$P(AC)=1/15$，$P(BC)=1/20$，$P(ABC)=1/30$，求 $A\cup B,\bar{A}\bar{B},A\cup B\cup C,\bar{A}\bar{B}\bar{C},\bar{A}\bar{B}C,\bar{A}\bar{B}\cup C$ 的概率．

(3) 已知 $P(A)=1/2$，(i) 若 A,B 互不相容，求 $P(A\bar{B})$，(ii) 若 $P(AB)=1/8$，求 $P(A\bar{B})$．

解　(1) 因为 $ABC\subseteq AB$ 所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$ 即 $P(ABC)=0$ 于是

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{49}{60}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{11}{60}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(C\overline{A\cup B})=P(C)-P[(A\cup B)C]$$
$$=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{7}{60}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\cup C)=P(\bar{A}\bar{B})+P(C)-P(\bar{A}\bar{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}$$

(3) 若 A，B 互不相容，$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A)=\frac{1}{2}$；若 $P(AB)=\frac{1}{8}$，则

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

【考试要求】掌握概率的加法公式、减法公式.

加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，当 A，B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$，当A，B互不相容时，$P(A-B)=P(A)$ 若 $A\supseteq B$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$

4. 设 A,B 是两个事件．

（1）已知 $A\bar{B}=\bar{A}B$，验证 $A=B$．

（2）验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$．

解 （1）因为 $A\bar{B}=\bar{A}B$，于是 $A\bar{B}\cup AB=\bar{A}B\cup AB$，等式左边 $A\bar{B}\cup AB=A$，等式右边 $\bar{A}B\cup AB=B$ 即 $A=B$．

（2）事件A和事件B恰有一个发生的事件表示为 $A\bar{B}\cup\bar{A}B$，$A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互不相容于是，

$$\begin{aligned}&P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)\\&=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-2P(AB)\end{aligned}$$

5. 10片药中有5片是安慰剂．

（1）从中任意抽取5片，求其中至少有2片是安慰剂的概率．

（2）从中每次取一次，作不放回抽样，求前3次都取到安慰剂的概率．

解 （1）10片药片任取5片的基本事件数 C_{10}^{5}，事件5片中至少有2片是安眠药的基本事件数 $C_5^2C_5^3+C_5^3C_5^2+C_5^4C_5^1+C_5^5$ 或 $C_{10}^5C_5^0C_5^5-C_5^1C_5^4$，即任取5片药片其中至少有2片安眠药的概率为 $\dfrac{C_5^2C_5^3+C_5^3C_5^2+C_5^4C_5^1+C_5^5}{C_{10}^5}=\dfrac{113}{126}$.

（2）依次不放回抽取3次药片的基本事件数 A_{10}^3，前3次取得安眠药的基本事件数为 A_5^3，于是前3次取到安眠药的概率为 $\dfrac{A_5^3}{A_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$

6. 在房间里有10个人，分别佩戴从1号到10号的纪念章，任选3人记录其纪念章的号码．

（1）求最小号码为5的概率．

（2）求最大号码为5的概率．

解 （1）任选3人佩戴纪念章的基本事件数为 $C_{10}^3=120$ 事件最小号码为5等价于其中有个人佩戴5号纪念章，其余2人佩戴纪念章号均大于5，即事件最小号码为5的基本事件数为 $C_5^2=10$，于是最小号码为5的概率为 $\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$．

（2）事件最大号码为5等价于有个人佩戴5号纪念章，其余2人佩戴纪念章的号码小于5，所含基本事件数为 $C_4^2=6$，于是最大号码为5的概率为 $\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$．

7. 某油气公司发生 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客．问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率为多少?

解　17 桶油任取 9 桶的基本事件数为 C_{17}^9，其中 9 桶油含有 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆的基本事件数为 $C_{10}^4C_4^3C_3^2$ 于是，商家如数得到订货的概率为 $\dfrac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\dfrac{252}{2\ 431}$.

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品．任取 200 件．

(1) 求恰有 90 件次品的概率．

(2) 求至少有 2 件次品的概率．

解　(1) $\dfrac{C_{400}^{90}C_{1\ 100}^{110}}{C_{1\ 500}^{200}}$.

(2) 事件至少有 2 件次品的对立事件为 200 件产品中全部为正品或恰有一件次品，于是至少有 2 件次品的概率 $1-\dfrac{C_{1\ 100}^{200}+C_{1\ 100}^{199}C_{400}^{1}}{C_{1\ 500}^{200}}$.

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

解　事件 A 为至少有两只能配成一双，从 5 双不同的鞋中任取 4 只种数为 $n=C_{10}^4=210$，4 只鞋中至少有两只能配成一双可以理解为 4 只鞋恰能配成 1 双鞋事件 B 与 4 只鞋恰能配成 2 双鞋事件 C 的并集，即 $A=B\cup C$，事实上

$$n_B=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1=120\ ,\ n_C=C_5^2=10$$

于是

$$n_A=n_B+n_C=130$$

所以

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

例外一种做法，考虑事件 A 的逆事件 $\bar{A}$，即事件 $\bar{A}$ 为 4 只鞋中没有成对的鞋，此时 $n_{\bar{A}}=C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$，于是 $n_A=n-n_{\bar{A}}=130$，即得相同的答案.

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率．

解　设事件 A 为抽取字母排列为 ability，11 个字母中任意连抽 7 张含有基本事件是为 $S(\Omega)=A_{11}^7$，在字母中共有两个 b，两个 i，则 $S(A)=4$，所以

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{4}{\mathrm{A}_{11}^{7}}=2.4\times10^{-6}.$$

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率．

解　3 只球随机放入 4 个杯中的基本事件数 $4^3=64$，其中事件 A_1：杯中球的最大数为 1，等价于 4 个杯中其中有 3 个杯中各有一个球，事件 A_1 含有基本事件数为 $\mathrm{A}_4^3=24$，于是 $P(A_1)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$，事件 A_2：杯中球的最大数为 2，等价与 4 个杯中其中有 2 个杯中各有 1、2 个球，事件 A_2 含有基本事件数为 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_3^2=36$，即 $P(A_2)=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$；事件 A_3，杯中球的最大数为 3，等价于 4 个杯中仅有一个杯中含有 3 个球，即 A_3 的基本事件数为 C_4^1，于是 $P(A_3)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$．

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 铆钉强度太弱．将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱．问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解　记事件 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$ 为第 i 个部件强度太弱，由题意可知 $P(A_i)=\frac{1}{\mathrm{C}_{50}^3}$，且这里满足 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 互不相容，所以发生一个部件强度太弱的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10})=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{10})=\frac{10}{\mathrm{C}_{50}^3}.$$

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生．

(1) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率．

(2) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率．

解　(1) 任选 4 名学生的共有 $\mathrm{C}_{12}^4=495$ 种取法，其中一、二、三、四年级的学生各一名共有 $\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1=60$ 种取法，因此所求的概率为 $\frac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{12}^4}=\frac{4}{33}$.

(2) 任选 5 名学生的共有 $\mathrm{C}_{12}^5=792$ 种取法，其中一、二、三、四年级的学生均包含在内事件等价于其中来自某一年级学生 2 人其余班级均含有 1 名同学，所以共有

$$\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^2=240$$

种取法，因此所求的概率为 $\frac{10}{33}$.

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

(2) 已知 $P(A)=1/4$，$P(B|A)=1/3$，$P(A|B)=1/2$，求 $P(A\cup B)$.

解　(1) $P(\bar{A})=0.3$，则 $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7$，又 $P(B)=0.4$，$P(\bar{B})=1-P(B)=0.6$，由减法公式可得 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.5$，即 $P(AB)=0.2$，所以

$$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=0.8,$$

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{1}{4}.$$

(2) 由乘法公式得 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，再由公式得 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}.$$

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率（用两种方法）.

解　**方法一**　记事件 A 为两颗骰子点数之和为 7，事件 B 为其中有一颗为 1 点，$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，$P(A)=\frac{1}{6}$，$AB=\{(1,6),(6,1)\}$，$P(AB)=\frac{1}{18}$，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$.

方法二　采用缩小样本空间法，事件 $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，事件 A 中有一颗为 1 点的事件 $\{(1,6),(6,1)\}$，于是已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率为 $\frac{1}{3}$.

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$P\{$孩子得病$\}=0.6$，$P\{$母亲得病$|$孩子得病$\}=0.5$，$P\{$父亲得病$|$母亲及孩子得病$\}=0.4$，

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解　记 A 为孩子得病，B 为母子得病，C 为父亲得病，由条件可知

$$P(A)=0.6,P(B|A)=0.5,P(C|AB)=0.4$$

事件母亲及孩子得病但父亲未得病的事件为 $AB\bar{C}$，则 $P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)$，由乘法公式可得 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.3$，$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=0.12$，于是 $P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)=0.18$.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，从其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样，求下列事件的概率：

(1) 两件都是正品.

(2) 两件都是次品.

(3) 一件是正品，一件事次品.

(4) 第二件取出的是正品.

解 记 A_i 为第 i 次取出次品（$i=1,2$）

(1) 两件正品的事件为 $\bar{A}_1\bar{A}_2$，于是 $P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$.

(2) 两件次品的事件为 A_1A_2，于是 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$.

(3) 一件是正品和一件事次品的事件为 $\bar{A}_1A_2\cup A_1\bar{A}_2$，则

$$P(\bar{A}_1A_2\cup A_1\bar{A}_2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}.$$

(4) 第二件取出的是正品的事件为 $\bar{A}_2$，则由抽签原理可得

$$P(\bar{A}_2)=1-P(A_2)=0.8$$

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{45}+\frac{8}{45}=0.2$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号．求他拨号不超过三次而接通所需号码的概率．若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解 记 A_i 为第 i 次接通所需要的号码（$i=1,2,3$），拨号不超过三次而接通的事件表示为 $A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$，则

$P(A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$（$A_1,\bar{A}_1A_2,\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 两两互不相容）

由题意可知

$$P(A_1)=\frac{1}{10},P(\bar{A}_1A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10},$$

则拨号不超过三次而接通的概率 $P(A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{3}{10}$.

若最后一个数字是奇数，则

$$P(A_1)=\frac{1}{5},P(\bar{A}_1A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5},P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$

则拨号不超过三次而接通的概率 $P(A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{3}{5}$.

19. (1) 设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球；乙袋中装有 N 只白球、M 只红球．今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球．问取到白球的概率是多少？

(2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球．先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒中任取一只球．求取到白球的概率．

解　(1) 记事件 A 为从乙袋中任意取白球，事件 B 为从甲袋中任意取白球，

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$
$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{N}{N+M+1}=\frac{nN+n+mN}{(m+n)(N+M+1)}$$

(2) 记事件 A 为从第二盒中任意一只白球，事件 B_1 为从第一盒中取出两个白球，事件 B_2 为从第一盒中取出一个白球一个红球，事件 B_3 为从第一盒中取出两个红球，由全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$
$$=\frac{C_4^2}{C_9^2}\times\frac{C_7^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}\times\frac{C_6^1}{C_{11}^1}+\frac{C_5^2}{C_9^2}\times\frac{C_5^1}{C_{11}^1}=\frac{53}{99}.$$

20. 某种产品的商标为"MAXAM"，其中有 2 个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为"MAXAM"的概率．

解　记事件 B_1 为脱落的字母为"AA"，事件 B_2 为脱落的字母为"MM"，事件 B_3 为脱落的字母为"AM"，事件 B_4 为脱落的字母为"AX"，事件 B_5 为脱落的字母为"MX"，事件 A 为放回后仍为"MAXAM"，即

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},P(B_3)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{4}{10},P(B_4)=P(B_5)=\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10},$$

$$P(A|B_1)=P(A|B_2)=1,P(A|B_3)=P(A|B_4)=P(A|B_5)=\frac{1}{2},$$

由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{3}{5}=0.6.$$

21. 已知男子有 5% 是色盲患者，女子有 0.25% 是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解　记事件 A 为色盲患者，事件 B 为此人为男性，由条件可知

$$P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2},P(A|B)=0.05,P(A|\overline{B})=0.0025,$$

利用贝叶斯公式可得

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}=\frac{20}{21}.$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试．第一次及格的概率为 p ，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p ；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $p/2$ ．

（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率．

（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率．

解 记事件 $A_i(i=1,2)$ 为学生参加第 i 次考试及格，A 为取得资格，

（1）至少有一次及格的事件表示为 $A=A_1\cup\bar{A}_1A_2$ ，此时 $A_1,\bar{A}_1A_2$ 互不相容，于是

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup\bar{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)\\&=p+\frac{p}{2}(1-p)=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2.\end{aligned}$$

（2）已知他第二次已经及格，第一次及格的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1|A_2)&=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)}\\&=\frac{p^2}{p^2+\frac{p}{2}(1-p)}=\frac{2p}{p+1}.\end{aligned}$$

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01．信息 A 与信息 B 传送的频率程度为 2∶1．若接收站收到的信息是 A ，问原发信息是 A 的概率是多少？

解 记事件 H 为将传送信息 A，事件 $\bar{H}$ 为将传送信息 B，事件 I 为接收信息 A，事件 $\bar{I}$ 为接收信息 B，由题意可知 $P(H)=\frac{2}{3},P(\bar{H})=\frac{1}{3},P(\bar{I}|H)=0.02,P(I|\bar{H})=0.01$ ，于是

$$\begin{aligned}P(H|I)&=\frac{P(HI)}{P(I)}=\frac{P(H)P(I|H)}{P(H)P(I|H)+P(\bar{H})P(I|\bar{H})}\\&=\frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=\frac{196}{197}.\end{aligned}$$

24. 有两箱同类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等奖；第二箱装 30 只，其中 18

只一等品．今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样．求：

（1）第一次取到的零件是一等品的概率．

（2）在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率．

解　设事件 $H_i(i=1,2)$ 零件取自第 i 箱，$A_i(i=1,2)$ 为第 i 次取出一等品，其中 $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$，

(1) $P(A_1)=P(H_1)P(A_1|H_1)+P(H_2)P(A_1|H_2)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5}.$$

(2) $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$，其中

$$P(A_1A_2)=P(H_1)P(A_1A_2|H_1)+P(H_2)P(A_1A_2|H_2)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}=0.194,$$

于是 $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=0.486.$

25. 某人下午 5：00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5：35～5：39	5：40～5：44	5：45～5：49	5：50～5：54	迟于 5：54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5：47 到家的．试求他是乘地铁回家的概率．

解　记事件 B 为乘地铁回家，事件 $\bar{B}$ 为乘汽车回家，事件 A 为到家时间在 5：45～5：49，由题意可知 $P(B)=P(\bar{B})=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=0.45$，$P(A|\bar{B})=0.20$，所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{9}{13}.$$

26. 病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.8．若浇水则树死去的概率为 0.15．有 0.9 的把握确定邻居记得浇水．

（1）求主任回来树还活着的概率．