中学数学第九册

教学参考资料

吉林人民出版社

目　　录

第三章 概率初步

第一章　复　数

一、教 材 分 析

［一］前八册教材，都是在实数范围内研究问题。本章，把数的范围从实数扩充到复数，开始在复数范围内研究问题。

复数是近一百多年来发展起来的理论，在近世代数中占有重要的地位。它不但在解决数学本身的许多问题上（如复变函数论、微分方程等），起重要作用，在科学技术、生产实际中也有广泛的应用。如在天体力学、流体力学、弹性力学、电工学等问题的研究中，复数都是十分重要的工具。在中学阶段，只是学习复数的基本概念和基本运算，为进一步学习和应用打下基础。

本章教材，先介绍了向量和向量的加减运算法则，为研究复数的概念及运算打下基础。然后，简短地回顾过去学过的从整数到有理数到实数的数的扩充过程，说明了数的概念是从实际中产生、并随着生产技术发展的需要而逐步发展的，指出了在数的概念扩充到实数之后，仍有进一步扩充的需要，进而导出虚数单位 i 和复数定义。紧接着联系复数的几何表示，讲解了复数的有关概念，复数的代数表示式、三角函数表示式及它们的运算法则。对复数的指数表示式和运算

也作了介绍。

［二］本章的教学目的和要求。

1、通过数的逐次扩充，使学生对数系有概括的了解，并认识到，数的概念是从实际中产生，并随着生产技术的发展而发展的。从而对学生进行历史唯物主义的教育。

2、使学生了解复数的定义，有关复数的一些概念，掌握复数相等的定义。

3、使学生掌握复数的代数表示式，三角函数表示式及它们的互化法则。熟练地进行复数的代数式运算和三角式运算。也要了解复数的指数表示式，会进行指数式的运算。

［三］本章的重点、难点、关键。

本章教材的重点是复数的概念和运算（主要是代数表示式和三角表示式的运算）。复数的运算和实数运算一样，是基本运算，在进一步学习及应用中常常用到，应要求学生熟练掌握。

学好本章教材的关键，在于能够很好理解复数的概念。复数概念不清，在运算中就会发生困难。由于复数概念比较抽象，难于理解，因而它又是本章的难点。

要突破这个难点。在教学中应该注意：①要使学生理解扩充数的概念的必要，弄清扩充后的新数与原有的数之间的联系和区别；②讲解复数的概念时，要紧密结合复数的几何表示来进行，使学生具体地看到复数的形象表示，减少对于理解复数概念的困难。

二、教 学 建 议

【一】向量介绍

［一］在讲解复数之前，先介绍向量的基本概念和加减法则，是为学习复数的概念和运算法则打基础。

采用平面上的点来表示复数，这是德国数学家高斯在十九世纪初对数学的一大贡献。这样，复数和平面上的向量（从原点出发的）建立起一一对应关系。在学习中，我们可以借助向量去理解复数的有关概念（如复数的绝对值，复数的相等等）可以在复数与向量对应的基础上建立起复数的三角表示式，同时复数的加减运算法则规定的合理性，也可通过向量的运算来解释。所以在学习复数前，先简单介绍向量的基础知识是必要的。

但要注意，复数并不是由研究向量而得来的。复数由来于负数的开平方。早在十六世纪，一些科学家就发现负数的平方根这个新数可以与实数在一起按相同的方法进行运算而无矛盾。可是，长时期来，并没认识它的重要性。直到十九世纪，把复数与平面上的点和向量建立起一一对应关系后，复数的重要性才被发现，得到广泛的应用。

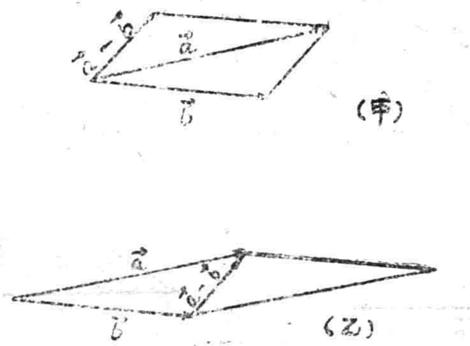
［二］学生在物理学中学过力、速度等概念及力、速度的合成、分解方法。现在学习向量的概念及加减运算，并不困难。但是把向量抽象出来作为一个数学概念加以研究，与具体的物理量的研究还有一些不相同的地方。在讲解时应注意以下几点：

（1）现在所研究的向量只和它的大小、方向有关。所以，当两个向量的方向相同且大小相等时，就规定这两向量相等，而不考虑它们的起点在哪里。这样，平面上，向量是可以平移的。以后我们常常把向量的起点平移到原点，而只研究起点在原点的向量就可以了。在物理学中，力是一个向量，但它有三个要素，除大小、方向外，要考虑力的作用点（在力的图示中就是起点），力只能沿它的作用线移动，不能平移。

（2）现行物理教材在力的合成与分解方法上只介绍了平行四边形法则，没介绍三角形法则。学生对于向量的加法，用与求合力的平行四边形法则类似的方法求解，易于掌握。但是对向量的减法，如求 $\vec{a}-\vec{b}$ 时，课本介绍的方法与物理教材中力的分解的方法不一样。按力的分解的方法是以 $\vec{a}$ 为平行四边形对角线，以 $\vec{b}$ 为平行四边形一边，而以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 公共起点为起点的平行四边形的另一边就表示 $\vec{a}-\vec{b}$（如图1、甲）。在向量减法法则中，是使 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 起点重合，以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边作平形四边形，而以 $\vec{b}$ 的终点为起点，以 $\vec{a}$ 的终点为终点的对角线，表示 $\vec{a}-\vec{b}$（如图1乙）。这样，学生可能产生疑问。应该指出，这两种作法虽然不同，但结果是相等的。从图2可以看出，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 方向相同、大小相等，都可以表示 $\vec{a}-\vec{b}$。

（3）讲解向量加减的三角形法则时，要特别注意向量的"起点""终点"位置，不要混淆。

如进行 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相加时应把 $\vec{b}$ 的起点放在 $\vec{a}$ 的终点上，而

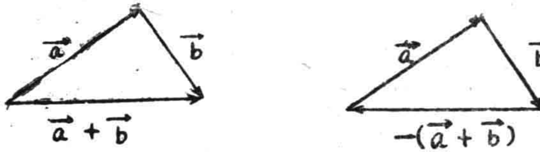


（图 1）

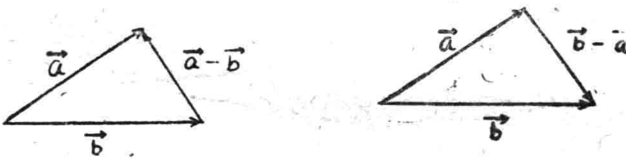
（图 2）

以 $\vec{a}$ 的起点为起点，$\vec{b}$ 的终点为终点的向量才是 $\vec{a}+\vec{b}$。如果弄成以 $\vec{b}$ 的终点为起点，$\vec{a}$ 的起点为终点，这个向量就不是 $\vec{a}+\vec{b}$ 而是 $-(\vec{a}+\vec{b})$（如图 3）。

又如进行减法时，应把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点放在一起，以 b 的的终点为起点，$\vec{a}$ 的终点为终点的向量是 $\vec{a}-\vec{b}$。如果，把它弄成以 $\vec{a}$ 的终点为起点，$\vec{b}$ 的终点为终点的向量，那就不是 $\vec{a}-\vec{b}$，而是 $\vec{b}-\vec{a}$（如图 4）。在减法中，这一点是很容易错的，最好根据减法是加法的逆运算，先根据加法法则来考



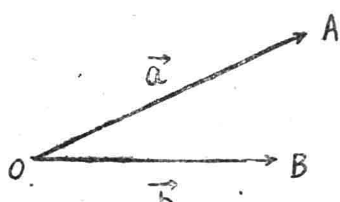
（图 3）



（图 4）

虑，进行判别， 不要死记。 如要求$\vec{a}-\vec{b}$（如图5），$\because \vec{a}$是和，只有$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\therefore \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$，若求$\vec{b}-\vec{a}$时，$\vec{b}$是和，只有$\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\therefore \vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$。

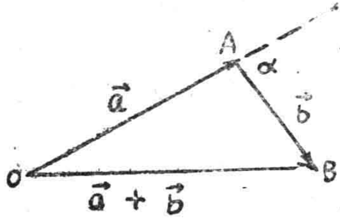
［三］、在回答习题一中的一些问题时，要考虑到两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$在一直线上同向或反向的情况，可作为一种特殊现象加以介绍。如加法法则



（图 5）

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$（图 6）

在下列特殊情况下也适合：

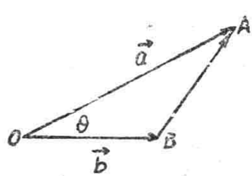


$\alpha=0^{\circ}$时

$\alpha=180^{\circ}$时

（图6）

如减法法则，$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$，（图7）在下列特殊情况下也适合：



$\theta=0^{\circ}$时

$\theta=180^{\circ}$时

（图7）

【二】复数的概念

［一］在引入复数之前，有必要先复习实数，使学生对实数系有概括的了解，认识到数系的发展是由实际需要引起的，结合数的扩充，对学生进行历史唯物主义教育，为讲解复数的意义及其性质作准备。在复习中应讲清下列一些问题：

1、可以简单地介绍实数的发展过程，从原始社会生产力薄弱只需要数数而产生自然数，以后出现了零。由于土地测量产生了分数、无理数。进入商业贸易时期由于“盈余”、“负债”两种相反的事实而产生了负数的概念，说明数的概念的发展是由于社会生产的发展的实际需要而发展的。

2、还应结合学生学习数学的过程，说明生产实际的需要反映在数学中，就是“逆运算是否可以进行”（方程是否有解）的问题。如在自然数范围内，加法和乘法是可以通行无阻的，但乘法的逆运算除法就不能永远进行。例如方程 $2x=3$ 在自然数范围内就无解。为了解决这个矛盾，引进了分数。可是在正有理数的范围内，也只能进行加、乘、除（除数不能是零）三种运算，加法的逆运算减法就不能永远进行。例如方程 $x+2=0$，在这范围内就无解。为了解决这个矛盾，引进了负数。把数的概念扩充到有理数。在有理数范围内，加、减、乘（包括乘方）、除（除数不能为零）运算可以畅通无阻，但是乘方的逆运算开方又迂到阻碍，如方程 $x^2=2$ 在有理数范围内就无解。为了使正数的乘方的逆运算——正数的开方能畅行无阻，就需要引进无理数．把数的概念扩充到实数。在此基础上，总结出实数系统表：

- 实数
  - 有理数
    - 整　数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分　数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

3、结合从正整数发展到实数的过程，说明数的扩充的原则，为下一步再扩充到复数作准备。这些原则大致可归纳为：

（1）为解决原有数系运算中的矛盾，在原有数的基础上，增添一种新的数；

（2）引进新数运算时，规定新数与原有数之间的运算关系；

（3）新数和原有的数，合成一个新的数系；

（4）在新的数系中，原有的数仍保持原有的运算关系和性质。

4、复习实数的有关性质。

根据学生实际及学习复数的需要，可指出实数有关性质如下：

（1）实数与数轴上的点一一对应；

（2）实数具有顺序性（怎样规定其顺序？），可以比较大小。（关于实数的稠密性、连续性可略提或不提）

（3）实数的绝对值的定义及几何意义。（与有理数同）

（4）在实数范围内，四则运算（除法时，除数不能是零）能通行无阻，运算结果是唯一的实数，对于开方运算，

在实数范围内有阻碍，即负数不能开偶数次方。

(5) 有理数的基本运算规律在实数范围内仍适用。

〔二〕、虚数单位 i 的引入，是建立复数概念的基础，讲解时要十分注意。

首先要使学生认识到引入 i 的必要，这一点，在复习实数时应作好引入前的准备，在此基础上，从实数范围内负数不能开偶次方，方程 $x^2=-1$ 无解，而引入新数。

引入 i 以后，必须明确指出，虚数单位 i，具有两个性质：(1) $i^2=-1$，(2) 它和实数在一起可以按照通常的法则进行运算。这两条是引进 i 时的规定，是建立复数系的基础。尤其是第二个性质，在教学中，往往被忽视，却不知，如果没有它，引入 i 以后也寸步难行。一定要使学生知道，$i^2=-1$，而且 i 可以和其它实数在一起，按实数的运算的一般法则进行运算。如：$i+i=2i$，$i\cdot i^2=i^3$，$8i^4\div 2i=4i^3$，$(3+i)^2=9+6i+i^2$ 等等。

对于 i 的乘幂的性质，可以让学生通过一些实例的计算而后归纳出它的周期性。运用它能将 i 的乘幂化简，一定要学生熟练掌握。除了能正确迅速解答 1.4 节例二那样的问题外，对于常用的 $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$i^5=i$，应十分熟练。可以补充一些基本练习题。(见后)

〔三〕、对复数的定义，学生比较难理解，因为它分成两个部分，学生总认为它是两个数的和，不是一个数。对定义，最好逐步引入，不宜生硬的举出 $a+bi$ 就定义。

引入时，首先根据关于 i 的规定，在运算中必然出现实数 b ($b\neq 0$) 与 i 的积 bi 这种形式的数，肯定它不是实数【$\because (bi)^2=-b^2$ 是负数】，而是实数以外的新数，有必要给以定义，叫纯虚数。再从运算中得出形式为 $a+bi$ 的

数（a、b是实数，$b\neq0$）它也不是实数，再定义是虚数。然后把它们与实数比较（实数a可以写成$a+0i$）而得出可以把实数与虚数合起来建立的新数系，用$a+bi$（a、b是实数）来定义它。

学生在学习复数概念时，最常见的错误有三：

一是把复数和实数对立起来，认为实数就不是复数，复数就不是实数。主要是因为复数$a+bi$在形式上与虚数的一般形式相同，认识不到实数包含在复数之中，是复数的一种特殊情况（$a+bi$中 $b=0$）。故在教学中一定要通过实例的比较分析，使学生认识到：复数既包括虚数又包括实数。复数$a+bi$（a、b是实数）只有当$b\neq0$时才是虚数，$b=0$时则是实数。

错误之二是往往认为复数$a+bi$（a、b是实数），当$a=0$时就是纯虚数，而忽略只有$a=0$、且$b\neq0$时，$a+ai$才是纯虚数。

上述错误，可以让学生通过习题二第1题，列出复数系统表（如下）加深理解。

$$\text{复数}a+bi\ (a、b\text{是实数})\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\cdots\cdots\ (\text{以下接实数系统表})\\ \text{虚数}\ (b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ (a=0、b\neq0)\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq0、b\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

还可以通过类似“a是什么实数时，复数$Z=(6a^2-a-2)+(3a-2)i$是实数？虚数？纯虚数？”这样的练习，来帮助学生加深对概念的理解。

常见的错误之三是学生往往把$3i$看成是正数，$-2i$看成是负数。理由是：既然读作“正$3i$”“负$2i$”当然是正数、负数。这是概念不清。必须强调实数和虚数是互相排斥

的，一个数，若是实数就不是虚数，若是虚数就不是实数。正数、负数都是实数范围内的数，而$3i$、$-2i$都是纯虚数，是实数范围外的数，不能既是纯虚数又是正数或负数。还要讲清在习惯上把$3i$、$-2i$读作“正$3i$”“负$2i$”是由于它们的虚数系数是实数，“$+3$”“-2”，但“$+3i$”却不是正数，“$-2i$”也不是负数。另外也可以从$(3i)^2$、$(-2i)^2$都是负数来说明$3i$、$-2i$不是实数，也就不能是正数或负数。

［四］、关于负数的平方根问题，课本在1.4节例三、例四中出现$\sqrt{-1}$、$\sqrt{-a}$（$a>0$）等记号，这些记号在实数范围内是无意义的，现在在复数范围内它们表示什么？教材并没有给予明确的定义。只是写出$i=\sqrt{-1}$、$\sqrt{a}\,i=\sqrt{-a}$。在讲解中只能讲这是规定，即规定$\sqrt{-1}$表示-1的一个平方根i，$-\sqrt{-1}$表示-1的另一个平方根$-i$；规定$\sqrt{-a}$（$a>0$）表示$-a$的一个平方根$\sqrt{a}\,i$，$-\sqrt{-a}$表示$-a$的另一个平方根$-\sqrt{a}\,i$。这样规定，与复数开方的记号会出现一些矛盾，这点在后面再讨论。

要防止学生对$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$（$a>0$）的来源有错误的理解，本来是由$(\sqrt{a}\,i)^2=-a$，$\therefore\sqrt{a}\,i$是$-a$的一个平方根，而规定$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$，但是有些学生会认为根据公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$可得$\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\,i$，这是错误的，因为，公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，只在实数范围内成立。根据算术根的性质，只有当$a\geq 0$且$b\geq 0$时，上式才成立。而$\sqrt{-a}$（$a>0$）不是算术根，不能变为$\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$。

从例四可得出“负数（$-a$）的平方根有两个且只有两个（$\pm\sqrt{a}\,i$）”这个结论很重要，应该让学生掌握。有了

这个结论，在复数范围内，负数就可以开偶次方。相应的实系数一元二次方程判别式小于零的情形，在实数范围内方程是无解的，在复数范围内就有两个虚数根。教材1.4节例5就指出这点，还可以举一般的一元二次方程为例加以说明。

［五］、复数的几何表示，是学生理解复数有关概念的关键内容，掌握它并不困难，但有些问题学生不易理解。如有些学生不清楚，为什么平面上的一点可以表示一个复数？应讲清在直角坐标平面上的点与有顺序的实数对（a，b）一一对应，而有顺序的实数对（a，b）又与复数$a+bi$一一对应。这样就可以将平面上的点和复数$a+ai$建立起一一对应关系。平面上的向量（从原点出发的）也可以与复数建立起一一对应关系。

学生在学习过程中有的还会产生这样的问题：过去学过的直角坐标平面与复平面有什么区别呢？它们都是以两条垂直的数轴作为标准建立起来的。它们的区别是：直角坐标平面，它的横轴、纵轴上一单位长都表示实数单位1，故平面上的点都与一对有顺序实数对应，而复平面上，横轴的一单位长表示实数单位1，纵轴的一单位长表示虚数单位i，（注意：并不是1单位长度是i，而是用1单位长与i对应）故复平面上的点与一个复数相对应。

建立起复数的几何表示后，要利用它加深对复数分类的理解。指出所有平面上的点所对应的数都是复数，其中，又分两类，一是在横轴上的点，对应的复数都是实数，其它的点对应的复数都是虚数，而在纵轴上的点对应的虚数是纯虚数。

［六］、紧密结合复数的几何表示，讲解复数的有关概念和性质。

1、对于两个复数，只要有一个不是实数就不能比较大小的这一性质，可以这样来说明：复平面上的点，除了在横轴上的点规定了顺序外，不能再规定点的顺序，不然，将要放弃另外一些性质或运算。因此，两个虚数或者一个虚数和一个实数间，是没有大小规定的。如：不能说$2+3i$、$-7i$、3、$4-5i$这些数间谁大谁小。

有的学生会提出：在纵轴上的点所对应的纯虚数也可以规定大小，如可以规定纵轴上方的点所对应的纯虚数大于下方的点所对应的纯虚数。事实上，这样规定是不行的。就拿最简单的情况来说，我们能不能规定 $i>0$，$2i>i$ 呢？如果 $i>0$，$2i>i$，那么把不等式两边都乘以 i，得 $i^2>0$ 和 $2i^2>i^2$，即 $-1>0$ 和 $-2>-1$。这与实数的大小规定矛盾。也就是说，在这样的规定下，我们要放弃乘法运算。如果我们反过来规定 $i<0$，$2i<i$，那么把不等式两边同乘以 i，仍得 $i^2>0$，$2i^2>i^2$（不等号应改变方向），同样得到 $-1>0$，$-2>-1$，与实数的大小规定矛盾。可见我们不能规定纯虚数的大小。

2、要使学生了解，任意两复数间虽无大小顺序，却有相等与不相等的规定。关于两复数相等的充要条件【即复数$a+bi=a'+b'i$的充要条件是$a=a'$，$b=b'$】，可利用两复数对应点相重合的充要条件去说明。对这应要求学生理解和掌握。特别要注意条件：这里的a、b、a′、b′都是实数。

关于复数$a+bi$等于零的规定，也可以结合复平面上只有原点对应的复数为零，而得到$a+bi=0$的充要条件是$a=0$，$b=0$。

3、讲解复数的绝对值时，可结合图形使学生理解复数的绝对值（模数）是表示对应点到原点的距离或对应向量的