"十二五"应用型本科系列规划教材

跟我学线性代数

——导学与习题精解

董晓波 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”应用型本科系列规划教材

跟我学线性代数
——导学与习题精解

主编　董晓波
参编　廖大见　刘才贵　张　颖　秦　涛　杨小勇

机械工业出版社

本书是线性代数学习辅导书，主要内容包括：矩阵、行列式与矩阵的秩、向量组与线性方程组、矩阵的特征值与二次型、向量空间与线性变换等，涵盖了线性代数的基本内容。每章由知识结构框架图、内容回顾、疑难解析、典型例题、习题详解和考研真题等六个部分构成。

全书阐述详尽，解析透彻，便于自学，利于读者开拓视野。本书可以作为线性代数课程的全程学习辅导书也可作为学生考研复习的辅导书，还可作为教师从事线性代数教学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

跟我学线性代数：导学与习题精解/董晓波主编. —北京：机械工业出版社，2014.1

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-45013-9

Ⅰ.①跟… Ⅱ.①董… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 289918 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 熊海丽
版式设计：常天培 责任校对：张 薇
封面设计：路恩中 责任印制：刘 岚
北京中兴印刷有限公司印刷
2014 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 11.75 印张 · 289 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-45013-9
定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务 网络服务
社服务中心：(010)88361066 教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294 机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649 机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203 封面无防伪标均为盗版

前　言

线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，同时非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题从而得以解决。因此，用代数解决实际问题的方法，已经渗透到各个领域。这决定了线性代数这门课程具有独特的重要性和实用性。线性代数作为研修后续课程不可或缺的一门数学基础课程，更凸显其重要的地位和作用。为了更好地指导学生跟随教学进度，学好这门课程，加深对其精髓的理解和掌握，提升学生运用所学知识解决实际问题的综合能力；帮助有志于考研的学生优化时间，提高备考的效率；同时，也为从事线性代数本科教学、研究生升学辅导的教师提供教与学的参考书，我们历时一年，组织从事一线教学多年、经验丰富的教师们编写了这本书。

本书按照教育部制定的线性代数教学规范编写，兼顾了正常教学、考研内容的理解，提升综合解题能力的需要。本书还精选了400道题目，为方便读者学习，全部都给出了解答。本书的内容包括矩阵、行列式与矩阵的秩、向量组与线性方程组、矩阵的特征值与二次型、向量空间与线性变换等五章内容，覆盖了线性代数的全部内容。每章分成知识结构、内容回顾、疑难解析、典型例题、习题详解、考研真题等六大板块。

一、知识结构

根据教育部颁发的工科本科线性代数课程基本要求，形象、具体地指明了本章涉及的重要知识点以及它们之间的逻辑关系。

二、内容回顾

囊括了本章的基本内容，对本章的学习、复习起到提纲挈领的作用。

三、疑难解析

针对每章中常遇到的困惑问题，以及涉及的重、难点问题予以解析，理清结论的来龙去脉，以帮助读者准确地理解每章的知识。

四、典型例题

给出典型的、有代表性的例题，通过对例题的分析、解答使读者进一步加深对知识点的理解；通过点评归纳，总结出通用的解题方法和技巧，引申到更一般的结论，帮助学有余力的读者进一步提升分析问题和解决问题的能力。

五、习题详解

选取典型和有难度的习题，解答这些题需从独特的视角切入，从而拓展读者的视野。对于这样的习题，本书给出了详尽的解答。很多题给出了多种解法，以提高学生举一反三、将所学的知识融会贯通的能力。

六、考研真题

收集了近年来每章范围内的典型考研真题，使学生通过考题的练习，亲身感受考研题目的水平、深度和难度。考研真题还给出了详细的解答，以便于学生检验自己的学习效果。

本书的适用范围：

1）作为学生学习的参考书，与教学进程同步，对学生起到巩固所学内容、课后补充学习和提升解题能力的作用。

2）作为有志于考研学生的考研辅导书。

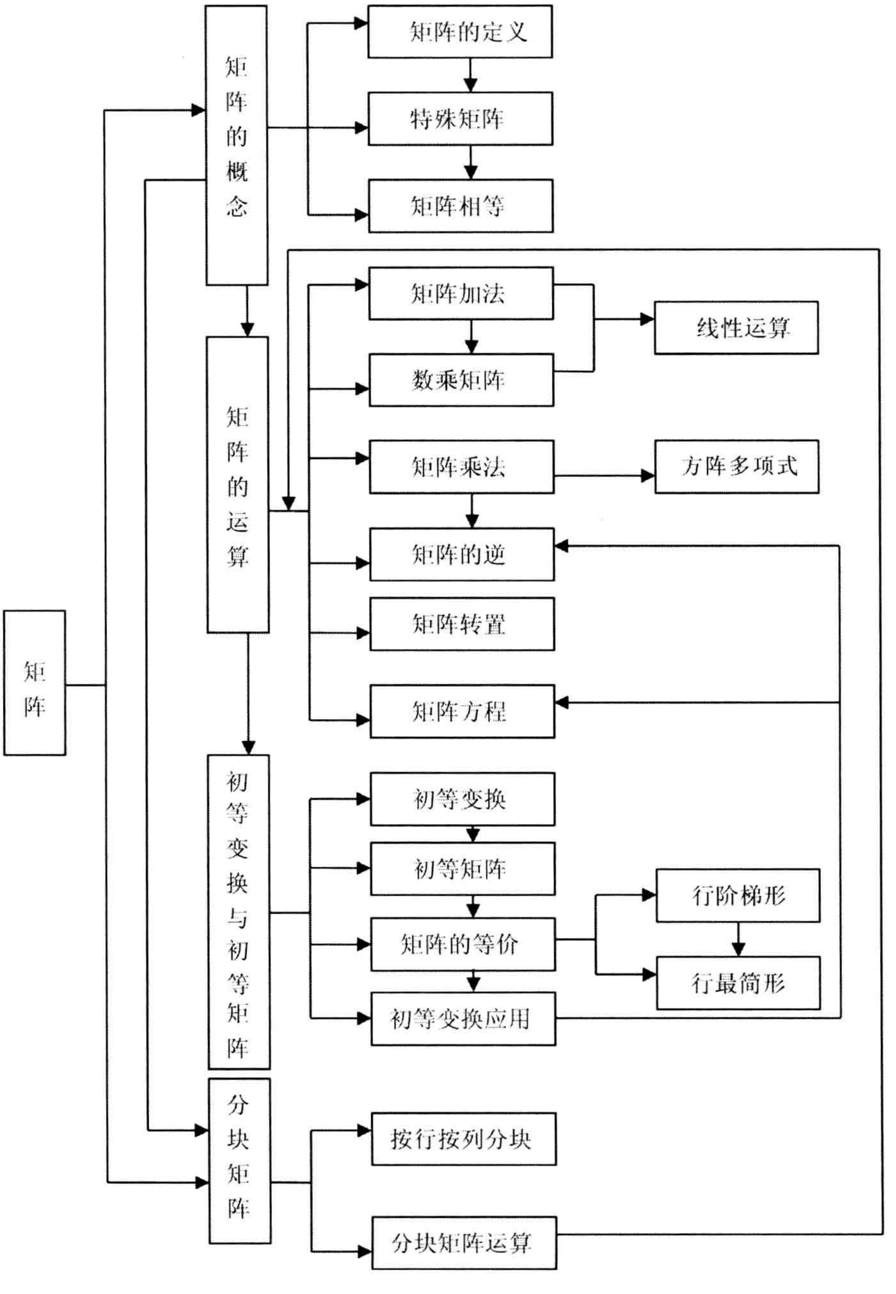
3）作为从事线性代数教学和考研辅导的教师的参考书。

编　者

目　　录

第一章　矩　　阵

一、知识结构



矩阵
矩阵的概念
矩阵的定义
特殊矩阵
矩阵相等
矩阵的运算
矩阵加法
数乘矩阵
线性运算
矩阵乘法
方阵多项式
矩阵的逆
矩阵转置
矩阵方程
初等变换与初等矩阵
初等变换
初等矩阵
矩阵的等价
行阶梯形
行最简形
初等变换应用
分块矩阵
按行按列分块
分块矩阵运算

二、内容回顾

(一) 矩阵的概念

1. 矩阵 由$m\times n$个数a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 排成m行n列的数表示:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵,简称$m\times n$矩阵.通常,为表示其为一个整体,用括号将其括起来,并用大写字母表示,即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,其中$a_{ij}$称为$\boldsymbol{A}$的$i$行$j$列元素.

2. 几种特殊的矩阵 在$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 中,(1) 若$a_{ij}\in\mathbf{R}$,称$\boldsymbol{A}$为实矩阵; (2) 若$a_{ij}\in\mathbf{C}$,称$\boldsymbol{A}$为复矩阵; (3) 若$m=n$,称$\boldsymbol{A}$为方阵; (4) 若$m=1$,$n>1$,称$\boldsymbol{A}$为行矩阵,又称为行向量;(5) 若$m>1$,$n=1$,称$\boldsymbol{A}$为列矩阵,又称为列向量;(6) 若$a_{ij}=0$ ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$),即$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$,记为$\boldsymbol{O}_{m\times n}$,当$m=n$时,称为$n$阶零矩阵,简记为$\boldsymbol{O}$; (7) $\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$称为$n$阶单位矩阵; (8) $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$称为对角矩阵,简记为$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,若$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$,则称$\boldsymbol{\Lambda}$为$n$阶数量矩阵; (9) 上 (下) 三角矩阵: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$为上三角矩阵,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$为下三角矩阵,易知,设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$为上 (下) 三角矩阵,则$\lambda\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{AB}$仍为上 (下) 三角矩阵.

3. 矩阵之间的关系 (1) 行数相等、列数相等的矩阵称为同型矩阵. (2) 设矩阵$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$为同型矩阵,且它们对应位置的元素相同,则称矩阵A与B相等,记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(二) 矩阵的运算

1. 矩阵的加减法运算

(1) 加法运算. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2) 数乘. $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$.

(3) 负矩阵. $-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

(4) 减法. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$.

(5) 性质. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为同阶矩阵, k, l 为常数, 则有① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; ② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$; ③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$; ④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$; ⑤ $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$; ⑥ $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$; ⑦ $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$; ⑧ $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

2. 矩阵的乘法运算

(1) 特殊情形. $\boldsymbol{P}_{1\times n}=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, $\boldsymbol{Q}_{n\times 1}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{PQ}=p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$.

(2) 一般情形. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 则有 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ 其中 $c_{ij}=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$.

(3) 性质 (设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{E}$ 之间涉及的加法及乘法运算均能成立, k 为常数) ① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; ② $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$; ③ $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$; ④ $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$.

3. 方阵的幂

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵, k, $l\in\mathbf{Z}^+$, 令 $\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}^k$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k ($k\in\mathbf{Z}^+$) 次幂, 特别地, 定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

(2) 性质: ① $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$; ② $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相乘可换的.

4. 矩阵的转置

(1) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

（2）性质（设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 之间涉及的加法及乘法运算均能成立，k 为常数）：①（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）$^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；②（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$）$^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. ③（$k\boldsymbol{A}$）$^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；④（$\boldsymbol{AB}$）$^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5. 逆矩阵

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若有 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

6. 逆矩阵的性质

①方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆⇒$\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且（$\boldsymbol{A}^{-1}$）$^{-1}=\boldsymbol{A}$；②方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，常数 $k\neq0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且（$k\boldsymbol{A}$）$^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；③$\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ 都可逆⇒$\boldsymbol{AB}$ 可逆，且（$\boldsymbol{AB}$）$^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；④ $\boldsymbol{A}$ 可逆⇒$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）$^{-1}=$（$\boldsymbol{A}^{-1}$）$^{\mathrm{T}}$.

（三）初等变换与初等矩阵

1. 三种初等行变换

1）交换矩阵的第 i，j 行，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$；2）用非零常数 k 乘矩阵的第 i 行，记为 kr_i；3）把矩阵的第 i 行的 k 倍加到第 j 行，记为 r_j+kr_i.

2. 三种初等列变换

1）交换矩阵的第 i，j 列，记为 $c_i\leftrightarrow c_j$；2）用非零常数 k 乘矩阵的第 i 列，记为 kc_i；3）把矩阵的第 i 列的 k 倍加到第 j 列，记为 c_j+kc_i.

3. 初等变换

矩阵的初等行变换与列变换，统称为矩阵的初等变换.

4. 初等矩阵

由单位矩阵经一次初等变换而得的矩阵称为初等矩阵. 对应矩阵的三种初等变换，初等矩阵有三种：1）$\boldsymbol{E}$（i，j）：由单位矩阵交换第 i，j 行（列）而得的方阵；2）$\boldsymbol{E}(i(k))$：由单位矩阵的第 i 行（列）乘非零常数 k 而得的方阵；3）$\boldsymbol{E}$（j，i（k））：由单位矩阵的第 i 行乘常数 k 加于第 j 行而得的方阵，也即由单位矩阵的第 j 列乘常数 k 加于第 i 列而得的方阵.

5. 矩阵的等价

（1）等价. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行（列）变换，化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行（列）等价，记作 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$）；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行和列变换，化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

（2）性质. ①反身性：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；②对称性：如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；③传递性：如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

6. 行阶梯形矩阵

如果在矩阵中能够画出一条阶梯线，横线下方全是 0；每阶只有一行，阶数即非零行的行数；竖线后面第一个元素为非零元素，则这样的矩阵称为行阶梯形矩阵.

7. 行最简形矩阵

1）在行阶梯形矩阵的基础上，每行第一个非零元素为 1，且该元素所在的列其余元素为 0. 2）可逆矩阵的行最简形矩阵是单位矩阵. 3）可逆矩阵可看做一系列初等矩阵的乘积，因为单位矩阵在乘积中可略去.

定理 1.1 任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以经过有限次初等行变换化成行阶梯形矩阵或行最简

形矩阵.

8. 初等变换与初等矩阵的关系

定理 1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

定理 1.3 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，那么 1）$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在有限个 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；2）$\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在有限个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$，…，$\boldsymbol{Q}_t$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B}$; 3）$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在有限个 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_s$ 和有限个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$，…，Q_t，使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B}$.

9. 可逆矩阵与等价的关系

定理 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，那么 1）$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；2）$\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$；3）$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

10. 初等矩阵的作用

定理 1.5 任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，一定存在有限个 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，…，$\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是行最简形矩阵.

推论 1 若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶可逆矩阵，则存在有限个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，…，$\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

推论 2 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则存在有限个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，…，$\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.

推论 3 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 行等价于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

定理 1.6 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均有逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

11. 初等变换的应用

（1）解矩阵方程.

① 设有 m 个方程式，n 个未知量的一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可以表示为矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为系数矩阵，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

对于更加一般的方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，系数矩阵是 $\boldsymbol{A}$，增广矩阵记为（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$）.

② 解矩阵方程. 对矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

（2）求逆矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，构造矩阵（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}$），其中 $\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵，

对 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 施行初等行变换，当 $\boldsymbol{A}$ 化成 $\boldsymbol{E}$ 时，原来的 $\boldsymbol{E}$ 就化成了 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$.

（四）分块矩阵

用若干条横线与纵线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 划分为若干个小矩阵，称这些小矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵，以子矩阵为其元素的矩阵称为分块矩阵.

1. 行分块与列分块

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 行分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{\mathrm{T}}$；列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

2. 分块矩阵的运算

（1）加法. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同阶，$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}$，且分块方式相同，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}$.

（2）数乘（k 为常数）. $k\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$.

（3）乘法. $\boldsymbol{A}$ 的列划分方式与 $\boldsymbol{B}$ 的行划分方式相同，即 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数.

$\boldsymbol{A}_{m\times l}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{l\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}_{ij}=(\boldsymbol{A}_{i1},\cdots,\boldsymbol{A}_{it})\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{1j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{tj} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr} \end{pmatrix}$.

（4）转置. $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

（5）分块对角矩阵. 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是方阵，记 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 可逆$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{pmatrix}$.

三、疑难解析

问题 1　矩阵运算的规律和实数的运算规律存在哪些不同之处？

答 1）实数的运算系统中任意两个数都可以做加、减法与乘法，而矩阵运算的系统中不是任意两个矩阵都可以做加、减法与乘法. 只有行数与列数均相同的两个矩阵才可以做加法与减法.

两个矩阵相等指的是两个矩阵对应位置的元素全部相等，进而矩阵运算系统中的 $\boldsymbol{O}$ 矩阵指的是所有位置的元素均为 0 的矩阵.

对于矩阵的乘法来说，它需要满足的条件是前一个矩阵的列数和后一个矩阵的行数相同，乘积矩阵的行数为前一个矩阵的行数，列数为后一个矩阵的列数，这也就是所谓的“前行后列”原则. 同时，应注意矩阵乘法的定义：若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行、第 j 列的元素是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的元素对应相乘的结果.

2）乘法的交换律不成立，这表现在以下几方面.

① 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，但 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 未必可乘. 如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}$ 不存在. ②若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 与 $\boldsymbol{B}_{n\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 均存在，但是两者未必相同. 如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，但 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. ③即使 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{AB}$ 也未必等于 $\boldsymbol{BA}$. 如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}7&10\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&4\\3&10\end{pmatrix}$.

上例中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为初等矩阵，$\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$，等同于对 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换，$\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$，视为对 $\boldsymbol{B}$ 施行初等列变换，两者结果不同.

3）与数的乘法不同，当矩阵的乘积为 $\boldsymbol{O}$ 的时候，两个矩阵中不必有一个 $\boldsymbol{O}$ 矩阵. ①$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都不是 $\boldsymbol{O}$ 矩阵. ②$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，但 $\boldsymbol{A}$ 不是 $\boldsymbol{O}$ 矩阵. ③$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2\\5&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&2\\4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$，但由于 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 不等，所以矩阵乘法不一定满足消去律. 注意，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则满足消去律.

问题 2 一个非零矩阵的行最简形矩阵与行阶梯形矩阵有什么区别和联系？

答 首先举例说明它们的定义。行阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$，横线下方全是 0；每阶只有一行，阶数即非零行行数；竖线后面第一个元素为非零元素. 行最简形矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2$，在行阶梯形矩阵的基础上，每行第一个非零元素为 1，且该元

素所在的列其余元素为 0.

其次，介绍它们的区别与联系：1）与一个矩阵行等价的行最简形矩阵和行阶梯形矩阵都是通过初等行变换得到的；2）行最简形矩阵一定是行阶梯形矩阵，但行阶梯形矩阵不一定是行最简形矩阵；3）与一个矩阵行等价的行最简形矩阵是由这个矩阵唯一确定的，而行阶梯形矩阵不是唯一的.

问题 3 在本章涉及的内容中，求逆矩阵的方法有哪几种？

答 常用的有三种方法. 1）当矩阵为抽象矩阵时，求其逆矩阵或证明其可逆时，用定义$=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$较为方便；2）当矩阵为较低阶的非抽象矩阵时，求其逆矩阵时，可以用待定系数法，利用$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$解出矩阵中的元素；3）当矩阵为较高阶的非抽象矩阵时，求其逆矩阵时，用初等行变换的方法较为简单.

问题 4 分块矩阵的子矩阵有何特点？试给出几种特殊的分块矩阵，并说明其在运算上有何特征？

答 特点是，同行上的子矩阵有相同的“行数”；同列上的子矩阵有相同的“列数”. 常见的分块矩阵有行分块矩阵、列分块矩阵和分块对角阵.

（1）行分块矩阵. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$，其中$\boldsymbol{\alpha}_i$（$i=1, 2, 3, \cdots, n$）为行向量；若$\boldsymbol{AB}$存在，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{B}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

（2）列分块矩阵. $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$，其中$\boldsymbol{\beta}_i$（$i=1, 2, 3, \cdots, n$）为列向量；若$\boldsymbol{AB}$存在，则$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{A\beta}_1, \boldsymbol{A\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{A\beta}_n)$.

（3）分块对角阵. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$，其中$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$都是方阵，$\boldsymbol{B}$也是分块矩阵，分块的方式与$\boldsymbol{A}$相同，则$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$.

特别地，若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}_i$（$i=1, 2, \cdots, s$）可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&&&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix}$.

四、典型例题

(一) 矩阵的概念与运算

例 1 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，试问下列性质是否成立？(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\14&29\end{pmatrix}$，但 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix}$，故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix}$，故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

点评：矩阵的乘法运算不满足交换律时，平方差与完全平方和公式不成立.

例 2 举反例说明下列命题是错误的 (1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解 (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$；(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$；(3) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 但 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$.

点评：实数之间的乘法满足消去律，而矩阵乘法运算是不满足消去律的. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则满足消去律.

例 3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解 显然与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为二阶方阵，设为 $\boldsymbol{X}$，并令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，又 $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{XA}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}$，由可交换条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，可得 $b=0$，$a=d$（其中 a，d，c 为任意常数)，即 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$.

点评：矩阵乘法运算一般不满足交换律，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 称为可交换. 本例利用待定系数法求出所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

例 4 求 $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

解 $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3$

$a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$

点评： 多元二次齐次多项式也可以通过三个矩阵的乘积来表示，左边为行矩阵，右边为列矩阵，中间为对称矩阵，这样在形式上更加简练.

例 5 将 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$写成方程组的形式.

解 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x+3y+z \\ x-2y+3z \\ 5x+7y+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. 即 $\begin{pmatrix} 4x+3y+z \\ x-2y+3z \\ 5x+7y+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{cases} 4x+3y+z=1, \\ x-2y+3z=2, \\ 5x+7y+0=3. \end{cases}$

点评： 1）两个矩阵可以相乘的条件是前面矩阵的列数等于后面矩阵的行数；乘积矩阵的行数为前一个矩阵的行数，列数为后一个矩阵的列数，此为“前行后列”原则. 2）矩阵的相等就是两个行数与列数都相同的矩阵在对应位置上的元素也相等. 3）任意一个这样的矩阵方程都相当于一个多元线性方程组.

例 6 计算 $(a, b, c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

解 $(a, b, c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=a^2+b^2+c^2$.

点评： 单行的矩阵乘以单列的矩阵的结果可以看成一个数.

例 7 计算 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a, b, c)$.

解 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a, b, c)=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$.

点评： 一个单列矩阵乘以一个单行矩阵等于一个矩阵.

例 8 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ 均可交换，求证：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$ 也可交换，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}_1^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_1)$.

证明 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ 可交换，即 $\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\boldsymbol{AB}_1+\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$ 可交换. 又 $\boldsymbol{AB}_1\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$ 也可交换. 所以 由 $\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}$，有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_1)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}_1^2$.

点评： 平方差公式成立的充要条件为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 乘法可交换.