2013 注册考试辅导经典系列丛书

注册环保工程师执业资格考试
基础考试复习教程及真题详解

（上册）

徐洪斌　曹纬浚　何新生　| 主编

本书由北京市注册工程师考试辅导班和郑州大学的教师们共同编写，内容紧密结合考试大纲和考试实际，紧跟规范、规程的更新，收录有大量历年真题，并附有答案和详细解析，是注册环保工程师基础考试必备的经典复习用书

人民交通出版社
China Communications Press

注册环保工程师执业资格考试
基础考试复习教程及真题详解

（上册）

ZHUCE HUANBAO GONGCHENGSHI ZHIYE ZIGE KAOSHI
JICHU KAOSHI FUXI JIAOCHENG JI ZHENTI XIANGJIE

徐洪斌　曹纬浚　何新生　| 主编

人民交通出版社
China Communications Press

内 容 提 要

本书编写人员全部是多年从事注册环保工程师基础考试培训工作的专家、教授。书中内容紧扣现行考试大纲并覆盖了考试大纲的全部内容，着重于对概念的理解运用，重点突出。全书分“考试大纲”、“必备基础知识”、“经典练习”等模块。其中，“必备基础知识”除包含考试须知须会的内容以外，还配有“典型例题解析”。全书最后附2套模拟题及参考答案、提示，便于考生复习和巩固已学知识。

由于本书篇幅较大，特分为上、下两册，上册为公共基础考试内容，下册为专业基础考试内容，以便于携带和翻阅。

本书可供参加注册环保工程师执业资格考试基础考试的考生复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

注册环保工程师执业资格考试基础考试复习教程及真题详解/徐洪斌，曹纬浚，何新生主编．—北京：人民交通出版社，2013.4

ISBN 978-7-114-10271-4

Ⅰ.①注… Ⅱ.①徐…②曹…③何… Ⅲ.①环境保护—工程技术人员—资格考试—自学参考资料 Ⅳ.①X

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第312748号

书　　名：注册环保工程师执业资格考试基础考试复习教程及真题详解
著 作 者：徐洪斌　曹纬浚　何新生
责任编辑：刘彩云　吴燕伶
出版发行：人民交通出版社
地　　址：(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：(010)59757973
总 经 销：人民交通出版社发行部
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京交通印务实业公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：69
字　　数：1764千
版　　次：2013年4月　第1版
印　　次：2013年4月　第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-10271-4
定　　价：138.00元(含上、下两册)

前　言

住房和城乡建设部、环境保护部及人力资源和社会保障部从2005年起实施注册环保工程师执业资格考试制度。

本教程的编写老师都是本专业有较深造诣的教授和高级工程师，分别来自北京建筑工程学院、北京工业大学、北京交通大学、北京工商大学、郑州大学及北京市建筑设计研究院。为了帮助环保工程师们准备考试，教师们根据多年教学实践经验和考生的回馈意见，依据考试大纲和现行教材、规范，为学员们编写了这本教程。本教程的目的是为了指导复习，因此力求简明扼要，联系实际，着重对概念和规范的理解应用，并注意突出重点，是一套值得考生信赖的考前辅导和培训用书。

本教程严格按现行考试大纲编写，并在多年教学实践中不断加以改进。为方便考生复习，本教程分上、下册出版，上册第1～11章为上午段公共基础考试内容，并配套《全国勘察设计注册工程师公共基础考试历年真题及详解》一书，考生可用此书多做练习；下册第12～17章为下午段专业基础考试内容，所选例题及练习题大多来自真题，并注有年号，考生做题时，可对此部分题多加关注。

(1)在结构设置上，首先对大纲要求的知识点进行精炼阐述，然后辅以典型例题并进行解析，每一小节后附经典练习，并在每一章后提供提示及参考答案。

(2)例题、练习题、模拟题等试题多来自历年真题，考生可在复习、练习过程中熟悉本考试的深度和广度。

(3)全书是对考试大纲内容的精炼，考生通过本书的复习和练习，可在较短时间内完成对考试大纲的理解和掌握。

随后，我们会根据规范、规程的修订和试题的实际情况对教材进行修订。参加本教程编写工作的教师有：第1章1.1～1.8节吴昌泽；第1章1.9节范元玮；第2章程学平；第3章毛怀玲、谢亚勃；第4章刘燕；第5章钱民刚；第6章李兆年；第7章、第8章许怡生；第9章许小重；第10章陈向东；第11章李魁元；第12章徐洪斌；第13章马浩亮、董亚丽；第14章孙震宇、周广远；第15章何新生；第16章雷达、高静；第17章王靖雯、李留刚。

祝各位考生考试取得好成绩！

徐洪斌

2013年1月

主编致考生

一、注册环保工程师在专业考试之前进行基础考试是和国外接轨的做法。通过基础考试并达到职业实践年限后就可以申请参加专业考试。基础考试是考大学中的基础课程，按考试大纲的安排，上午考试段考 11 科，120 道题，4 个小时，每题 1 分，共 120 分；下午考试段考 6 科，60 道题，4 个小时，每题 2 分，共 120 分；上、下午共 240 分。试题均为 4 选 1 的单选题，平均每题时间上午 2 分钟，下午 4 分钟，因此不会有复杂的论证和计算，主要是检验考生的基本概念和基本知识。考生在复习时不要偏重难度大或过于复杂的知识，而应将复习的注意力主要放在弄清基本概念和基本知识方面。

二、考生在复习本教程之前，应认真阅读“考试大纲”，清楚地了解考试的内容和范围，以便合理制订自己的复习计划。复习时一定要紧扣“考试大纲”的内容，将全面复习与突出重点相结合。着重对“考试大纲”要求掌握的基本概念、基本理论、基本计算方法、计算公式和步骤，以及基本知识的应用等内容有系统、有条理地重点掌握，明白其中的道理和关系，掌握分析问题的方法。同时还应会使用为减少计算工作量或简化、方便计算所制作的表格等。本教程中每章前均有一节“复习指导”，具体说明本章的复习重点、难点和复习中要注意的问题，建议考生认真阅读每章的“复习指导”，参考“复习指导”的意见进行复习。在对基本概念、基本原理和基本知识有一个整体把握的基础上，对每章节的重点、难点进行重点复习和重点掌握。

三、注册环保工程师基础考试上、下午试卷共计 240 分，上、下午不分段计算成绩，这几年及格线都是 55%，也就是说，上、下午试卷总分达到 132 分就可以通过。因此，考生在准备考试时应注意扬长避短。从道理上讲，自己较弱的科目更应该努力复习，但毕竟时间和精力有限，如 2009 年新增加的“信号与信息技术”，据了解，非信息专业的考生大多未学过，短时间内要掌握好比较困难，而“信号与信息技术”总共只有 6 道题，6 分，只占总分的2.5%，也就是说，即使“信号与信息技术”1 分未得，其他科目也还有 234 分，从 234 分中考 132 分是完全可以做到的。因此考生可以根据考试分科题量、分数分配和自己的具体情况，计划自己的复习重点和主要得分科目。当然一些主要得分科目是不能放松的，如“高等数学”24 题(上午段)24 分，“工程流体力学与流体机械”10 题(下午段)20 分，“污染防治技术”22 题(下午段)44 分，都是不能放松的；其他科目则可根据自己过去对课程的掌握情况有所侧重，争取在自己过去学得好的课程中多得分。

四、在考试拿到试卷时，建议考生不要顺着题序顺次往下做。因为有的题会比较难，有的题不很熟悉，耽误的时间会比较多，以致到最后时间不

够，题做不完，有些题会做但时间来不及，这就太得不偿失了。建议考生将做题过程分为三遍：

(1)首先用15～20分钟将题从头到尾看一遍，一是首先解答出自己很熟悉很有把握的题；二是将那些需要稍加思考估计能在平均答题时间里做出的题做个记号。这里说的平均答题时间，是指上午段4个小时考120道题，平均每题2分钟；下午段4个小时考60道题，平均每题4分钟，这个2分钟(上午)、4分钟(下午)就是平均答题时间。将估计在这个时间里能做出来的题做上记号。

(2)第二遍做这些做了记号的题，这些题应该在考试时间里能做完，做完了这些题可以说就考出了考生的基本水平，不管考生基础如何，复习得怎么样，考得如何，至少不会因为题没做完而遗憾了。

(3)这些会做或基本会做的题做完以后，如果还有时间，就做那些需要稍多花费时间的题，能做几个算几个，并适当抽时间检查一下已答题的答案。

(4)考试时间将近结束时，比如还剩5分钟要收卷了，这时你就应看看还有多少道题没有答，这些题确实不会了，建议考生也不要放弃。既然是单选，那也不妨估个答案，答对了也是有分的。建议考生回头看看已答题目的答案，A、B、C、D各有多少，虽然整个卷子四种答案的数量并不一定是平均的，但还是可以这样考虑，看看已答的题A、B、C、D中哪个答案最少，然后将不会做没有答的题按这个前边最少的答案通填，这样其中会有1/4可能还会多于1/4的题能得分，如果考生前边答对的题离及格正好差几分，这样一补充就能及格了。

五、基础考试是不允许带书和资料的，2012年前，考试时会给每位考生发一本“考试手册”，载有公式和一些数据，考后收回。但从2012年起，取消了“考试手册”的配发。据说原因是考生使用不多，事实上也没有更多时间去翻手册。因此一些重要的公式、规定，考生一定要自己记住。

六、本教程每节后均附有习题，并在每章后附有提示及参考答案。建议考生在复习好本教程内容的基础上，多做习题。多做习题能帮助巩固已学的概念、理论、方法和公式等，并能发现自己的不足，哪些地方理解得不正确，哪些地方没有掌握好；同时熟能生巧，提高解题速度。本教程在最后提供了两套模拟试题，建议考生在复习完本教程以后，集中时间，排除干扰，模拟考试气氛，将模拟试题全部做一遍，以接近实战地检验一下自己的复习效果。

复习中若遇到疑问，可发邮件至544641689@qq.com，我们会尽快回复解答。相信这本教程能帮助大家准备好考试。

最后，祝愿各位考生取得好成绩！

曹纬浚

2013年1月

目　　录

上　　册

1 高 等 数 学

考题配置　单选，24 题
分数配置　每题 1 分，共 24 分

复习指导

在注册结构工程师基础考试中，基础部分试卷试题总数为 120 道题，其中高等数学占 24 题。高等数学题微积分部分有 16 道题，线性代数、概率、矢量代数有 8 道题。数学题的数量占上午试题总量的 1/5，因而复习好数学是至关重要的。

在复习中，首先要熟悉大纲，按大纲的要求分清哪些属于考试要求，哪些不属于考试要求，有的放矢地做好复习工作。建议考生除了复习本复习教程上的内容外，还可结合同济大学编的高等数学上、下册（第四版或第五版）课本一起复习。由于复习教程篇幅所限，有的内容显得简单了，结合书本复习，可进一步充实相关的内容。另外在教科书中还附有大量的习题，可在复习时做练习题用。

关于考试的试题基础部分在上午考，时间为 4 个小时，考题有 120 道，也就是要在 240 分钟内做完 120 道题，平均 2 分钟做 1 道题，这一点也是我们在复习中应该注意的。这样，大的定理证明、复杂的计算题、计算量大大超过 2 分钟的题目就不可能在试题中出现。试题的形式都是单选题，从给出的四个选项中挑一个。如果题目是以计算题形式给出的，可通过正确的计算选择其中一个答案。

有的从形式上看也是计算题，但涉及的内容有奇偶函数，不妨先去判定一下。有的题目属于概念题，应认真回顾所学过的概念作出正确的选择，有的题目要求根据学过的定义、定理判定，要很好想一下这些定义、定理的具体内容，经分析后选出要求的答案。因而熟记书本的定义、定理性质是必要的，另外，熟悉一些题目的计算步骤，记住曾做过一些题目的结论也是必要的。另外注意根据题目的要求，当能肯定选出某一选项后，其余三个选项，不论它所给出的内容是什么，也不再去验证它为什么错。除了有的题目给了四个选项，一时判定不了的，可以采取逐一排除的方法，得到最后的结论。这些做法在具体做题时需要灵活掌握。但可以肯定的是选择题往往是从涉及概念性较强，计算比较灵活，而计算量又不很大的一类题目中选出。了解以上情况之后，从一开始复习就要加以注意。最后通过系统的复习达到对考试要求的内容有一个全面了解，应该记忆的定义、定理、性质和一些推导出来的结论要记住，应该记忆的公式要记牢，对各种类型的计算题解题的步骤要记住，只有这样，才能较好地应对这次考试。

下面按章、节讲一下每一部分的重点和难点，按复习教程所写的内容顺序进行。

1）空间解析几何与向量代数

重点：①掌握利用向量的基本向量分解式或坐标表示式进行向量运算，如加法、减法、数乘，两向量的数量积、向量积、混合积的计算。

②熟练掌握利用两向量平行、两向量垂直坐标所具备的性质，如$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$；若$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$，求直线方程、平面方程，或判定直线和平面间的某种位置关系，空间曲线在坐标面上的投影曲线。

难点：利用两向量平行或垂直的条件求直线方程、平面方程，判定直线和平面的位置关系又是其中的难点。

2)一元函数微分学

重点：①熟练掌握函数奇偶性、单调性、周期性、有界性的判定办法。

②熟练掌握求函数极限的方法，把两个重要极限、利用等价无穷小求极限等方法和用洛必达法则求极限方法灵活地结合在一起，解决求极限的问题。

③掌握利用函数在一点连续的定义，判定函数在一点的连续性或求某一个数值。

④掌握用在一点导数的定义的两种形式求函数在一点的导数，并会利用在一点左、右导数的定义判定分段函数在交界点的可导性。掌握利用在一点导数的几何意义求切线方程、法线方程。

⑤熟练掌握复合函数、参数方程、隐函数、幂指函数的一阶导数以及高阶导数的计算。

⑥熟练掌握符合三个中值定理条件的ξ值求法，会求函数的单调区间、函数的极值、函数的最值、函数的凹凸区间、拐点，会求函数的渐近线。其中，求各种给出函数的导数，确定函数曲线的单调性、凹凸区间等，又是这一节的难点。

3)一元函数积分学

重点：①掌握原函数的概念，并要求把原函数的概念灵活地运用到求函数的不定积分中，计算出不定积分。

②熟练掌握利用不定积分公式、换元法、分部积分法，求不定积分。

其中，涉及利用原函数概念的不定积分计算，用换元积分法计算不定积分，是难点。

③掌握积分上限函数求导的方法，熟练掌握利用定积分的性质、奇偶函数在对称区间上积分的知识，利用定积分的换元积分和分部积分等求定积分。

④熟练掌握利用定积分求平面图形的面积和旋转体的体积、平面曲线的弧长、计算变力沿直线运动所做的功等。

⑤熟练掌握广义积分的计算，判定广义积分敛散性。

难点：计算不定积分、定积分及利用定积分求平面图形的面积和旋转体的体积。

4)多元函数微分学

重点：①熟练掌握复合函数偏导数和全微分的计算，隐函数偏导数和全微分的计算。

②掌握二元函数在一点的连续性，偏导存在和全微分的概念及它们之间的联系。

③熟练掌握求空间曲线的切线和法平面、空间曲面的切平面和法线的方程的方法。

难点：二元函数连续性、偏导存在和可微概念之间的关系，求二元复合函数和隐函数的偏导、全微分是难点。

5)多元函数积分学

重点：①熟练掌握二重积分的计算，并会在直角坐标系下把二重积分写成二种积分顺序下的二次积分，会把二重积分化为极坐标系下的二次积分。

②熟练掌握把三重积分化为在直角坐标系下、柱面坐标系下、球面坐标系下的三次积分

(计算三重积分不是重点)。

③熟练掌握对弧长的曲线积分、对坐标的曲线积分的计算。在对坐标的曲线积分中,利用与路径无关的条件,应用格林公式计算曲线积分一定要会。

难点:把三重积分化为直、柱、球坐标系下三次积分、对坐标的曲线积分是难点。

6)级数

重点:①熟练掌握数项级数敛散性的判定。

②熟练掌握幂级数的收敛半经和收敛区间的求法。

③熟练掌握利用已知函数展开式,采用间接展开法,把函数展开成幂级数。

④掌握用迪利克雷收敛定理确定傅里叶级数的和函数,求在某点傅里叶级数的和。

难点:①数项级数敛散性的判定。

②用间接展开法把函数展开成幂级数。

7)常微分方程

重点:①熟练掌握一阶微分方程中可分离变量方程、一阶线性方程通解的求法。

②熟练掌握二阶常系数线性齐次方程通解的计算的。

③掌握列微分方程、解应用题方法。

难点:列微分方程解应用题是难点。

8)矩阵计算

根据考试大纲的要求,线性代数需要掌握以下内容:行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。

行列式是线性代数的基本工具,而高阶行列式的计算一般都要用到行列式的相关性质。

矩阵是线性代数研究的主要对象,是求解线性方程组的有力工具。除了会矩阵的基本运算外,还应会求逆矩阵、矩阵的秩,进而会求解矩阵方程。

在求解线性方程组时会涉及解向量的最大线性无关组的问题,对于向量组要会求它的最大线性无关组。

特征值与特征向量是矩阵理论中最基本的概念之一,对此,应熟练掌握。

关于二次型,首先要会写出它的矩阵形式,即找出它所对应的实对称阵。将一般二次型化为标准型时,也会遇到求二次型所对应矩阵的特征根的问题。

9)概率论与数理统计

概率论与数理统计需要掌握的内容有:

随机事件与概率、古典概型、一维随机变量的分布和数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

对事件运算、古典概型、全概率公式、独立重复试验要会灵活运用这些工具解决具体问题。

对于随机变量可以有三种描述工具:分布函数、离散型随机变量的分布律、连续型随机变量的概率密度,需要熟悉它们的定义、性质并且要会使用。比如,概率密度 $f(x)$ 中如果含未知数 A,则可用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ 定出 A。而对正态 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的随机变量要转化成标准正态 $N(0,1)$ 分布才可查表。

数字特征可从某个侧面反映随机变量分布的特点,数学期望和方差的性质及有关计算公式属于基本内容,用它们可以解决一些实际问题,应该予以关注。

统计量,比如样本均值 $\overline{X}$ 和方差 S^2,抽样分布是参数估计、假设检验的基础。

总之，大家应在基本概念清晰的基础上，熟练掌握有关的计算问题，特别是比较简捷的计算。

1.1 空间解析几何与向量代数

考试大纲☞：向量的线性运算；向量的数量积、向量积及混合积；两向量垂直、平行的条件；直线方程；平面方程；平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的位置关系；点到平面、直线的距离；球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程；常用的二次曲面方程；空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

必备基础知识

1.1.1 空间直角坐标

1）坐标轴的平移

设旧坐标系为 $Oxyz$，新坐标系为 $O'x'y'z'$，新轴与旧轴平行，点 O' 的旧坐标为 (a,b,c)，点 M 的旧、新坐标依次为 (x,y,z) 及 (x',y',z')，则

$$x=a+x',y=b+y',z=c+z' \tag{1-1}$$

2）两点间的距离

在空间直角坐标系中，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3）定比分点

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为两定点，点 $M(x,y,z)$ 将 $\overline{M_1M_2}$ 分为两段 $\overline{M_1M}$、$\overline{MM_2}$，使 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{1-2}$$

当 $\lambda=1$ 时，M 为 $\overline{M_1M_2}$ 的中点，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{1-3}$$

4）空间方向的确定

设有一条有向直线 L，它与三个坐标轴正向的夹角分别为 α、β、$\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$，称为直线 L 的方向角；$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 称为直线 L 的方向余弦，三个方向余弦有如下关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1-4}$$

1.1.2 向量代数

1）向量的概念

空间具有一定长度和方向的线段称为向量。以 A 为起点，B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，或简记作 $\vec{a}$。向量 $\vec{a}$ 的长记作 $|\vec{a}|$，又称为向量 $\vec{a}$ 的模，两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 若满足：① $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，② $\vec{a}/\!/\vec{b}$，③ a，b 指向同一侧，则称 $\vec{a}=\vec{b}$。

与 $\vec{a}$ 方向一致的单位向量 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。

2)向量的运算

(1)两向量的和

以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线所表示的向量 $\vec{c}$ 称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和,记作

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \tag{1-5}$$

一般说,n 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的和可定义如下:先作向量 $\vec{a}_1$,再以 $\vec{a}_1$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_2$,…,最后以向量 $\vec{a}_{n-1}$的终点为起点作向量 $\vec{a}_n$,则以向量 $\vec{a}_1$ 的起点为起点、以向量 $\vec{a}_n$ 的终点为终点的向量 $\vec{b}$ 称为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的和,即

$$\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n \tag{1-6}$$

(2)两向量的差

设 $\vec{a}$ 为一向量,与 $\vec{a}$ 的模相同,而方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的负向量,记作 $-\vec{a}$,规定两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \tag{1-7}$$

(3)向量与数的乘法

设 λ 是一个数,向量 $\vec{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 规定为:

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\vec{a}$ 表示一个向量,它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同,它的模等于 $|\vec{a}|$ 的 λ 倍,即 $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$;

当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\vec{a}$ 是零向量,即 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$;

当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\vec{a}$ 表示一个向量,它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反,模等于 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$。

(4)两向量的数量积

两向量的数量积为一数量,表示为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{a,b}) \tag{1-8}$$

(5)两向量的向量积

两向量的向量积为一向量,记作 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$。

①$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$,$|\vec{c}|$的几何意义为以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边作出的平行四边形的面积;

②$\vec{c}\perp\vec{a}$,$\vec{c}\perp\vec{b}$;

③$\vec{c}$ 的正向按右手规则四个手指从 $\vec{a}$ 以不超过 π 的角度转向 $\vec{b}$,则大拇指的指向即为 $\vec{c}$ 的方向。

(6)三个向量的混合积

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积,记作$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$,模$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$的几何意义表示以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积。可推出,当向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面时,混合积$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$,即$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$。

3)向量运算的性质($\vec{a}$、$\vec{b}$ 为向量,λ、μ 为数量)

交换律

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$,$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

结合律

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$,$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

分配律

$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

向量的数量积满足交换律，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

向量的向量积不满足交换律，即 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$。

4）向量在轴上的投影

给定向量$\overrightarrow{AB}$及 u 轴，过 A、B 点分别向 u 轴作垂直平面，与 u 轴交于 A_1、B_1，则有向线段$\overrightarrow{A_1B_1}$的值 A_1B_1 称为$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，向量的投影是一个数量。

设$\overrightarrow{AB}$与 u 轴的夹角为 α，则

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$$

n 个向量的和在 u 轴上的投影为

$$\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\vec{a}_1+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_n \tag{1-9}$$

5）向量的投影表示

设 $\vec{a}$ 的起点 A 坐标为(x_1,y_1,z_1)，终点 B 坐标为(x_2,y_2,z_2)，则 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，记 $a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$，a_x、a_y、a_z 称为向量 $\vec{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影。又设 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 依次为与 x、y、z 轴正向一致的单位向量，则

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k} \tag{1-10}$$

又可写成

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\} \tag{1-11}$$

式(1-10)又称为向量 $\vec{a}$ 按基本单位向量的分解式，式(1-11)又叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标表示式。

6）向量运算的坐标表示式

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k} \tag{1-12}$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_y&b_z\\c_y&c_z\end{vmatrix}a_x-\begin{vmatrix}b_x&b_z\\c_x&c_z\end{vmatrix}a_y+\begin{vmatrix}b_x&b_y\\c_x&c_y\end{vmatrix}a_z$$

向量的模和方向余弦的坐标表示式：

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，α、β、γ 为 $\vec{a}$ 的方向角，$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，则

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\\cos\beta&=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\\cos\gamma&=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned} \tag{1-13}$$

且满足 $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$。

7)两向量的夹角、平行与垂直坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\tag{1-14}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

1.1.3 平面

1)平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中，平面法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$。

2)平面的点法式方程

过定点 (x_0,y_0,z_0)，以 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为法线向量的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

称为平面的点法式方程。

3)平面的截距式方程

设 a,b,c 为平面在三个坐标轴上的截距，平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\tag{1-15}$$

称平面的截距式方程。

4)两平面的夹角(通常指锐角)

设两平面方程为

$$\pi_1\qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2\qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则两平面夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\tag{1-16}$$

两平面平行的充分必要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}\tag{1-17}$$

两平面垂直的充分必要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\tag{1-18}$$

5)三平面的交点

设三个平面方程为 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$(其中，$i=1,2,3$)，若系数行列式 $D\neq0$，则三平面有唯一交点，交点坐标即方程组的解。

6)点到平面的距离

若平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，平面外一点 $M(x_1,y_1,z_1)$，则点 M 到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\tag{1-19}$$

7)点到直线的距离

设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线 L 外的一点，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是直线 L 上的任意取定的点，且直线 L 的方向向量为 $\vec{S}$，点 M_0 到直线 L 的距离为 d，设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，L：$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$，则

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|}{|\vec{S}|}=\frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{1-20}$$

1.1.4 空间直线

1)空间直线的一般方程

设空间直线 L 由两个平面 π_1 和 π_2 的交线给出，设 π_1 和 π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1-21}$$

2)空间直线的点向式方程(或对称式方程)与参数方程

设直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个方向向量 $S=\{m,n,p\}$，则 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{1-22}$$

称为直线的点向式方程(或对称式方程)。

设 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，得到空间**直线 L 的参数方程为**

$$x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt \tag{1-23}$$

3)两直线的夹角(通常指锐角)

设两直线的方程分别为 $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，则两直线间夹角的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{1-24}$$

两条直线平行的充分必要条件为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{1-25}$$

两条直线垂直的充分必要条件为

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

4)两直线共面(平行或相交)的条件

设两直线的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

则它们共面的条件为